

УДК 539.3

ВПЛИВ РІДИННИХ МІСТКІВ НА КОНТАКТ ТІЛА З ГІДРОФОБНОЮ ПЕРІОДИЧНО ТЕКСТУРОВАНОЮ ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ

О. П. КОЗАЧОК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено безфрикційний контакт пружного півпростору та текстурованої прямокутними виїмками жорсткої основи за наявності нестисливої рідини, що не змочує їх поверхні, у міжповерхневих просвітах. Під дією поверхневого натягу рідина формує містки на краях просвітів, а у внутрішніх частинах під сталим тиском знаходиться газ. Перепад тисків у рідині й газі описує формула Лапласа. Сформульовану контактну задачу для пружного півпростору зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від висоти просвітів і трансцендентного рівняння для визначення ширини ділянки з газом. Проаналізовано залежності ширини ділянки з газом, форми просвітів і контактної зближення тіл від прикладеного навантаження, об'єму рідини та її поверхневого натягу.

Ключові слова: контактна взаємодія, прямокутні виїмки, міжповерхневі просвіти, рідинні містки, контактне зближення тіл.

The frictionless contact of an elastic half-space and a rigid base textured with rectangular notches in the presence of an incompressible liquid which does not wet the body surface in the interface gaps was studied. Under the action of surface tension, the liquid forms bridges at the edges of the gaps, and the middle parts contain gas under constant pressure. Laplace's formula describes the pressure difference in liquid and gas. The formulated contact problem for an elastic half-space is reduced to a singular integral equation with a Hilbert kernel with respect to the derivative of the gaps height and a transcendental equation for determining the width of the area with gas. The dependences of the area width with gas, the shape of the gaps and the contact approach of the bodies on the applied load, the volume of the liquid and its surface tension are analyzed.

Keywords: contact interaction, rectangular grooves, interface gaps, liquid bridges, contact approach of the bodies.

Вступ. Функціонування технічних і природних систем часто супроводжується конденсацією вологи на поверхнях, яка за їхнього контакту переміщується під дією поверхневого натягу у вузьчі місця міжповерхневих просвітів. Вплив рідинних містків на контактну поведінку тіл посилюється зі зменшенням їх розмірів, що засвідчують експериментальні результати [1–5]. Містки суттєво змінюють контактні характеристики з'єднань: розподіл тиску, розміри міжконтактних просвітів, зближення рухомих з'єднань. Огляд публікацій про взаємодію тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача просвітів між ними здійснено у праці [6]. Розв'язано [7, 8] контактні задачі для тіл з номінально плоскими поверхнями, які мають поодинокі або періодично розташовані просвіти, що містять один вид заповнювача – рідину або газ. Вперше взаємодію випуклих тіл з урахуванням впливу рідинних міжповерхневих містків вивчено в працях [9, 10]. Контактні задачі теорії пружності для двох пружних тіл з урахуванням міжконтактного середовища розглянуто раніше [11–13]. Нижче досліджено взаємодію пружного тіла

та текстурованої прямокутними виїмками жорсткої основи за наявності на краях міжповерхневих просвітів рідини, що не змочує поверхні тіл, а у внутрішніх частинах – газу, що перебуває під сталим тиском.

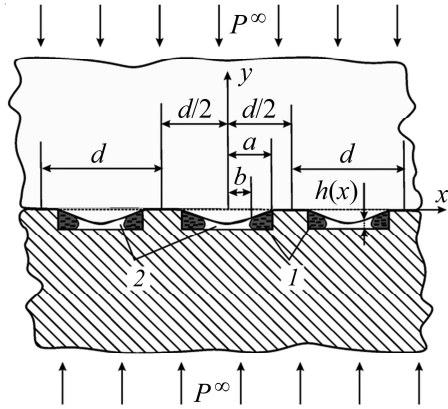


Рис. 1. Схема контакту:
1 – рідина; 2 – газ.

Fig. 1. Contact scheme:
1 – liquid; 2 – gas.

Формулювання задачі. Вивчали безфрикційну взаємодію пружного ізо- тропного півпростору з жорсткою осно- вою, на межі якої з періодом d розта- шована нескінченна система плитких тунельних виїмок заввишки $2a$, фор- му яких описує функція $r(x) = -A$, де A – їх висота ($A/a \ll 1$). У півпросторі, який притискається до основи рівно- мірно розподіленим на нескінченності навантаженням P^∞ , реалізується плоска деформація. Через нерівність основи між тілами виникають просвіти зав- вишки $h(x)$ (рис. 1). Вважаємо, що вони заповнені нестисливою рідиною, яка повністю не змочує поверхні тіл (кут змочування $\theta = 180^\circ$), а частково – га- зом, що перебуває під сталим тиском P_1 . Кількість рідини в кожному просві- ті однакова і залишається незмінною під навантаженням. Тому виконується умо- ва збереження рідини

$$\rho \int_b^a h(x) dx = \frac{1}{2} V_0 + \frac{h^2(b)}{8} \pi, \quad (1)$$

де $2b$ – ширина ділянки дії газу; V_0 – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини $\rho = 1$ т просвіту в поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 1.

Перепад тисків визначає формула Лапласа $\Delta P = P_2 - P_1 = 2\sigma/h(b)$, де $h(b)$ – висота меніска; P_2 – тиск рідини; σ – її поверхневий натяг.

Контактно-крайові умови задачі мають вигляд:

– уздовж просвітів $|x - kd| < a$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$\sigma_{yy} = -P_1, \quad x \in (-b + kd, b + kd),$$

$$\sigma_{yy} = -P_2, \quad x \in (-a + kd, -b + kd) \cup (b + kd, a + kd);$$

– на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0;$$

– на нескінченності ($y \rightarrow \pm\infty$)

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – компонента вектора переміщення уздовж осі Oy .

Розв'язання задачі. Використовуючи метод комплексних потенціалів Коло- сова–Мусхелішвілі [14] та метод функцій міжконтактних просвітів [7, 8, 13],

сформульовану задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші відносно похідної висоти просвітів за горизонтальною змінною

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^{\infty} - P(\xi)), \quad |\xi| \leq \alpha \quad (2)$$

та трансцендентного рівняння для невідомої півширини ділянки газу β :

$$\frac{\rho d}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{h(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} V_0 + \frac{h^2(\beta)}{8} \pi, \quad (3)$$

де $K = 2(1 - \nu)/G$; $G = E/[2(1 + \nu)]$; $\kappa = 3 - 4\nu$; G, E, ν – відповідно модуль зсуву, модуль пружності і коефіцієнт Пуассона пружного тіла; $\xi = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{d}$; $\eta = \operatorname{tg} \frac{\pi t}{d}$;

$$\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}; \quad \beta = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{d}; \quad h(\pm \alpha) = A; \quad P(\xi) = \begin{cases} P_1, & |\xi| \leq \beta, \\ P_1 + 2\sigma/h(\beta), & \beta < |\xi| \leq \alpha. \end{cases}$$

Через існування на межі основи куткових точок шукатимемо необмежений у точках $\xi = \pm \alpha$ розв'язок рівняння (2) [14]:

$$h'(\xi) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \sum_{l=0}^L \Theta_l (2l+1) T_{2l+1} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right), \quad (4)$$

де $T_{2l+1}(\xi/\alpha)$ – поліном Чебишева першого роду. Невідомі коефіцієнти Θ_l ($l = 0, \dots, L$) визначаємо зі системи $L+1$ лінійних алгебричних рівнянь [13]:

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} \sum_{l=0}^L \Theta_l (2l+1) T_{2l+1} \left(\frac{\xi_j}{\alpha} \right) = \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi_j, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi_j, -\beta)}{1 + \xi_j^2} +$$

$$+ \left(\frac{K(P^{\infty} - P_1 - 2\sigma/h(\beta))\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi} + \frac{2K\sigma\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \times \frac{\xi_j d}{(1 + \xi_j^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}},$$

$$\text{де } \xi_j = \alpha \cos \left(\frac{\pi j}{2L+3} \right), \quad j = 1, \dots, L+1; \quad \Gamma(a, x, t) = \ln \left(\frac{a^2 - tx + \sqrt{(a^2 - t^2)(a^2 - x^2)}}{a^2 - tx - \sqrt{(a^2 - t^2)(a^2 - x^2)}} \right).$$

Проінтегрувавши рівняння (4), знаходимо висоту просвітів:

$$h(\xi) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l U_{2l} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) + A, \quad |\xi| \leq \alpha.$$

Підставивши її в умову збереження кількості рідини (3), отримаємо трансцендентне рівняння для невідомої півширини β ділянки з газом:

$$\frac{\rho d}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l U_{2l} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) d\xi - \frac{h^2(\beta)}{8} \pi - A \arctan(\beta) - A \arctan(\alpha) [V_0 - 1] = 0. \quad (5)$$

Трансцендентне рівняння (5) відносно невідомої величини β розв'язуємо числово, використовуючи метод послідовних наближень. За початкове наближення вибираємо аналітичний розв'язок задачі за відсутності поверхневого натягу рідини ($\sigma = 0$), тобто за сталого тиску заповнювача P_1 у просвітах.

Зумовлене поодиноким виїмкою збурення переміщень v у півплощині прямує до нуля на нескінченності. Проте за інтегрального впливу періодичної систе-

ми виїмок на великих відстанях від поверхні контакту (якщо $y \rightarrow \infty$) у напрямі дії прикладених зусиль P^∞ виникає додаткове зближення матеріалів тіл [12, 13]:

$$\Delta v^\infty = - \sum_{l=0}^L \Theta_l \alpha^{-2l} (-1)^l \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right)^{2l+1}.$$

Контактний тиск поверхонь тіл $P(\xi)$ визначає формула

$$P(\xi) = \sum_{l=0}^L (2l+1) \Theta_l \left(\frac{|\xi|}{\alpha} - \sqrt{\frac{\xi^2}{\alpha^2} - 1} \right)^{2l+1} \frac{2\pi(1+\xi^2)}{Kd\sqrt{\xi^2/\alpha^2 - 1}} - P^\infty, \quad a \leq |x| \leq d/2.$$

Числові результати. Обчислювали безрозмірні величини: координату $\tilde{x} = x/d$; висоту виїмки $\tilde{A} = A/d$; висоту міжконтактного просвіту $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)/d$; висоту поверхні пружного тіла, яка просіла над виїмкою, $\tilde{h}^*(\tilde{x}) = \tilde{A} + \tilde{h}(\tilde{x})$; півширину виїмки (просвіту) $\tilde{a} = a/d$; півширину ділянки з газом $\tilde{b} = b/d$; поверхневий натяг рідини $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$; тиск на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; тиск газу $\tilde{P}_1 = KP_1$; контактний тиск поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$; контактне зближення тіл $\Delta\tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$; об'єм рідини в просвіті $\tilde{V}_0 = V_0/V$, що припадає на одиницю його довжини $\rho = 1$ м у поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 1, де V – об'єм виїмки. Числово аналізували для виїмок завширшки $\tilde{a} = 0,25$, максимальна висота яких $\tilde{A} = 0,001$, тиску газу $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$ і об'єму рідини $\tilde{V}_0 = 0,5$ за різного її поверхневого натягу $\tilde{\sigma}$: 10^{-8} ; $5 \cdot 10^{-8}$; 10^{-7} .

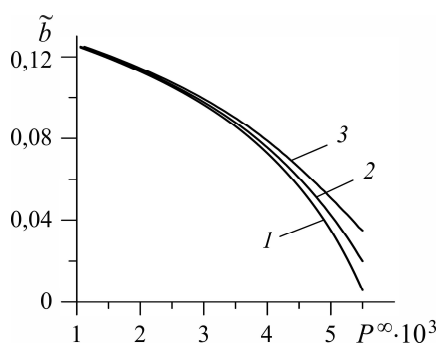


Рис. 2. Залежність півширини ділянки з газом $\tilde{b}$ від прикладеного навантаження $\tilde{P}^\infty$ за різних поверхневих натягів рідини $\tilde{\sigma}$:
1 – $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$; 2 – $5 \cdot 10^{-8}$; 3 – 10^{-7} .

Fig. 2. Dependence of the half-width of the section with gas $\tilde{b}$ on external load $\tilde{P}^\infty$ at different surface tension of the liquid $\tilde{\sigma}$:
1 – $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$; 2 – $5 \cdot 10^{-8}$; 3 – 10^{-7} .

З ростом навантаження $\tilde{P}^\infty$ півширина ділянки з газом $\tilde{b}$ зменшується (рис. 2): що відчутніший поверхневий натяг рідини $\tilde{\sigma}$, то вона більша. Зі зниженням зовнішнього навантаження контактне зближення $\Delta\tilde{v}^\infty$ (рис. 3) тіл зменшується.

Зі збільшенням поверхневого натягу рідини висота просвітів $\tilde{h}(\tilde{x})$ зростає, особливо – в їхній центральній частині (рис. 4). Посередині вона збільшується на 10,5%, якщо поверхневий натяг рідини зростає від 0 до $\tilde{\sigma} = 10^{-7}$.

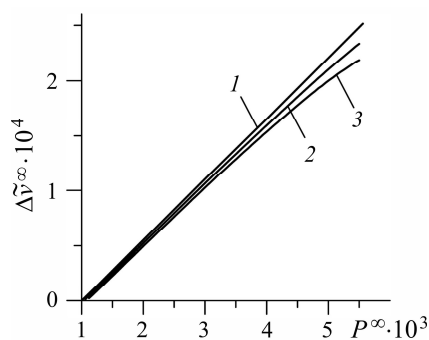


Рис. 3. Fig. 3.

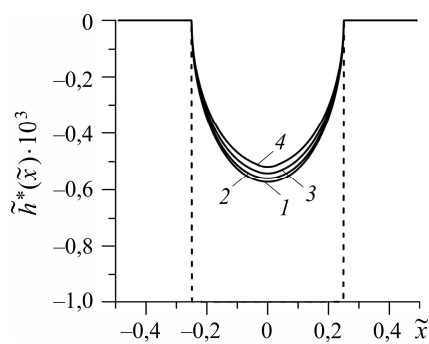


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 3. Залежність контактної зближення тіл $\Delta\tilde{u}^\infty$ від прикладеного навантаження $\tilde{P}^\infty$ за різних поверхневих натягів рідини $\tilde{\sigma}$: 1 – 0; 2 – $5 \cdot 10^{-8}$; 3 – 10^{-7} .

Fig. 3. Dependence of the contact approach of the bodies $\Delta\tilde{u}^\infty$ on the load $\tilde{P}^\infty$ for different surface tension of the liquid $\tilde{\sigma}$: 1 – 0; 2 – $5 \cdot 10^{-8}$; 3 – 10^{-7} .

Рис. 4. Висота $\tilde{h}^*(\tilde{x})$ поверхні, яка просіла за зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty = 0,005$ та різних поверхневих натягів рідини $\tilde{\sigma}$: 1 – 0; 2 – 10^{-8} ; 3 – $5 \cdot 10^{-8}$; 4 – 10^{-7} . Штрихова крива – форма виїмок $\tilde{r}(\tilde{x})$.

Fig. 4. Height $\tilde{h}^*(\tilde{x})$ of the subsided surface at the external load $\tilde{P}^\infty = 0.005$ and different surface tension of the liquid $\tilde{\sigma}$: 1 – 0; 2 – 10^{-8} ; 3 – $5 \cdot 10^{-8}$; 4 – 10^{-7} . Dashed curve – the grooves shape $\tilde{r}(\tilde{x})$.

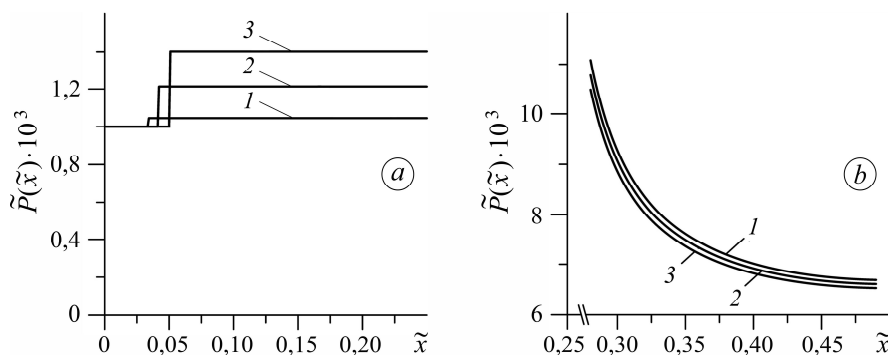


Рис. 5. Тиск рідини і газу (а), контактний тиск поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$ (b) за зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty = 0,0035$ та різних поверхневих натягів рідини $\tilde{\sigma}$: 1 – 10^{-8} ; 2 – $5 \cdot 10^{-8}$; 3 – 10^{-7} .

Fig. 5. Pressure of liquid and gas (a), the contact pressure of the bodies surfaces $\tilde{P}(\tilde{x})$ (b) for the external load $\tilde{P}^\infty = 0.0035$ and different surface tension of the liquid $\tilde{\sigma}$: 1 – 10^{-8} ; 2 – $5 \cdot 10^{-8}$; 3 – 10^{-7} .

Зі збільшенням поверхневого натягу рідини її тиск у просвіті підвищується (рис. 5a), а контактний тиск тіл поза нею зменшується (рис. 5b). Контактний тиск поверхонь тіл ззовні виїмки прямує до нескінченності на її краях, а з віддаленням від неї монотонно спадає, набуваючи локального мінімуму посередині ділянок між виїмками ($\tilde{x} = \pm 0,5$). Зі зменшенням поверхневого натягу від 10^{-7} до 10^{-8} тиск рідини знижується на 34%, а контактний у точці, яка ділить навпіл ділянки між виїмками, збільшується на 6%.

ВИСНОВКИ

Досліджено контакт пружного півпростору та гідрофобної жорсткої основи, межа якої має періодичну систему виїмок прямокутної форми, за наявності в міжконтактних просвітах рідинних містків. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта для похідної від висоти міжконтактних просвітів та трансцендентного рівняння для півширини ділянки з газом, яке отримано з рівняння збереження кількості рідини. Вивчено залежності півширини ділянки з газом, висоти просвітів, контактних тиску, зближення тіл від прикладеного навантаження, поверхневого натягу рідини та її об'єму. Виявлено, що зі збільшенням поверхневого натягу рідини її тиск підвищується, контактний тиск поверхонь та контактне зближення півпростору зменшуються.

1. Kato T., Watanabe S., and Matsuoka H. Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 1. Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // Trans. ASME. J. Tribol. – 1999. – **122**, № 3. – P. 633–638. DOI:10.1115/1.555413
2. Kato T., Watanabe S., Matsuoka H. Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 2. Application to the disk with random undulation and design conditions // Trans. ASME. J. Tribol. – 2000. – **123**, № 1. – P. 168–174. <https://doi.org/10.1115/1.1330741>
3. Kobatake S., Kawakubo Y., and Suzuki S. Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribol. Int. – 2003. – **36**, № 4–6. – P. 329–333. [https://doi.org/10.1016/S0301-679X\(02\)00206-2](https://doi.org/10.1016/S0301-679X(02)00206-2)
4. Shi L. and Majumdar A. Thermal transport mechanisms at nanoscale point contacts // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2001. – **124**, № 2. – P. 329–337. DOI:10.1115/1.1447939
5. Zheng J. and Streater J. L. A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribol. Lett. – 2004. – **16**, № 1–2. – P. 1–9. DOI:10.1023/B:TRIL.0000009708.85844.c3
6. Block J. M. and Keer L. M. Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, № 7. – P. 1207–1237. DOI:10.2140/jomms.2008.3.1207
7. Kit G. S., Martynyak R. M., and Machishin I. M. The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299. DOI:10.1023/A:1024414302961
8. Kozachok O. P. Influence of partial filling of the gaps with compressible liquid on the contact of elastic bodies with wavy surfaces // Materials Science. – 2020. – **56**, № 3. – P. 310–318. <https://doi.org/10.1007/s11003-020-00432-y>
9. Rabinovich Y. I., Esayanur M. S., and Moudgil B. M. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment // Langmuir. – 2005. – **21**, № 24. – P. 10992–10997. DOI: 10.1021/la0517639
10. Zitzler L., Herminghaus S., and Mugele F. G. Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // Phys. Rev. B. – 2002. – **66**, № 15. – Article number: 155436. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.155436>
11. Kozachok O. P. Contact of an elastic body with a rigid base containing grooves partially filled with nonwetting liquid // Materials Science. – 2020. – **55**, № 5. – P. 765–773. <https://doi.org/10.1007/s11003-020-00369-2>
12. Kozachok O. P. Influence of compressible intercontact liquid on the interaction of an elastic body with a rigid base textured by rectangular grooves // Materials Science. – 2018. – **54**, № 3. – P. 354–360. <https://doi.org/10.1007/s11003-018-0192-1>
13. Kozachok O. P., Slobodian B. S., and Martynyak R. M. Contact between an elastic body and a rigid base with periodic array of quasielliptic grooves partially filled with liquid wetting the surfaces of the bodies // J. Math. Sci. – 2019. – **240**, № 2. – P. 162–172. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04344-4>
14. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.

Одержано 26.04.2023