

НАПРУЖЕНИЙ СТАН М'ЯКОГО ПРОШАРКУ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ТА ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЙ

Б. К. ГАНУЛІЧ

Луцький національний технічний університет

Розглянуто напружений стан м'якого про шарку за контакт ного зміцнення, коли розтягувальні напруження у середньому більші за границю плинності металу про шарку, але менші від напружень, які зумовлюють загальну плинність. Отримано аналітичні вирази за плоскої деформації та осесиметричного розтягу. У першому випадку напруження визначені зі застосуванням функції напружень Ері у вигляді відповідного полінома, у другому – на основі функції напружень п'ятого степеня, яка будується на відповідних поліномах Лежандра. Напруження задовольняють диференціальні умови рівноваги та крайові умови.

Ключові слова: м'який про шарок, плоска деформація, осесиметрична деформація, напружений стан.

The stress state of a soft interlayer under contact strengthening, when tensile stresses are greater than the yield strength, and less than the stresses causing a genetal yield, is considered. The analytical expressions under plain strain and axisymmetric tension are obtained. In the first case the stresses are determined using the Airy stress function as a corresponding polynomial, in the second case – based on the stress function of the fifth degree, built on the corresponding Legendre polynomial. The stresses satisfy the differential equations of equilibrium and boundary conditions.

Keywords: soft interlayer, plane strain, axisymmetric strain, stress state.

Вступ. За розтягування зразків з м'яким про шарком (рис. 1) виявлено [1–3], що зі зменшенням його товщини h границі плинності та міцності таких зразків можуть бути суттєво більшими, ніж для металу про шарку. Таке підвищення отримало назву “ефект контакт ного зміцнення”.

Мета роботи – описати напружений стан м'якого про шарку за розтягування в умовах плоскої та осесиметричної деформації, коли прикладене напруження розтягу перевищує границю плинності матеріалу про шарку, але менше від напруження, яке зумовлює його загальну плинність [1].

Вперше задачу про стиск пластичного шару між абсолютно жорсткими плитами, які наближаються зі сталою швидкістю, розглянуто у праці [4]. Схема плоского плин у шару зображена на рис. 2. Для визначення компонент напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} ($\sigma_z = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$) – матеріал про шарку у пластичній області нестискувального) взято три рівняння – два рівняння рівноваги і умову плинності:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_s^2, \quad (2)$$

де τ_s – границя плинності за зсуву.

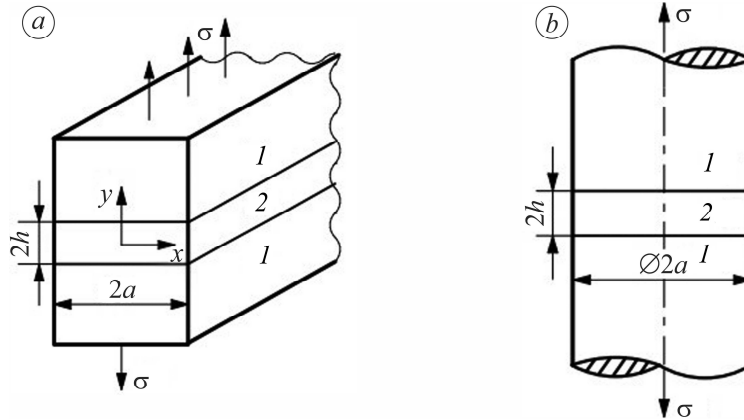


Рис. 1. Схема навантаження зразків із м'яким прошарком за плоскої (a) та осесиметричної деформацій (b): 1 – твердий матеріал; 2 – м'який прошарок.

Fig. 1. Loading mode of the sample with a soft interlayer under conditions of plane (a) and axisymmetric strain (b): 1 – solid material; 2 – soft interlayer.

Після диференціювання першого рівняння за y , другого за x і віднявши їх, одержали [4]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_y - \sigma_x) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tau_{xy} = 0. \quad (3)$$

Підставивши із виразу (2) $\sigma_y - \sigma_x = 2\sqrt{\tau_s^2 - \tau_{xy}^2}$, отримали [4]:

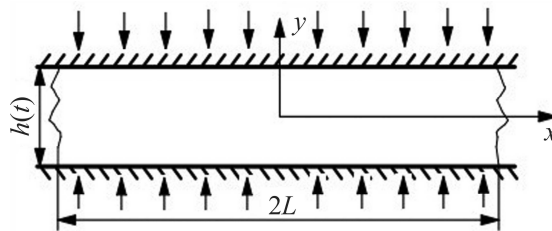
$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{\tau_s^2 - \tau_{xy}^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

Автор праці [4], розглядаючи переріз $|x|/h \gg 1$, $(L - |x|)/h \gg 1$ та допускаючи, що поверхні плит є поверхнями ковзання ($\tau_{xy}(x; \pm h/2) = \tau_s = \text{const}$), та, що τ_{xy} лінійно залежить тільки від y , із виразу (4) одержує такий розподіл напружень у шарі:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -2\tau_s y / h, \quad \sigma_y = -2\tau_s \left[\frac{L - |x|}{h} + \frac{\pi}{2} \right], \\ \sigma_x &= -2\tau_s \left[\frac{L - |x|}{h} + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{(h^2 - y^2)/h^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Рис. 2. Схема плоского плинущого шару.

Fig. 2. Plane layer flow scheme.



Плоска деформація (рис. 1а). Якщо розтягувальні напруження $\sigma < 2\tau_s$, то увесь зразок перебуває у стані однорідного розтягу. Коли $\sigma \geq 2\tau_s$, м'який прошарок переходить у новий напружений стан доти, поки напруження σ не досягнуть граничного значення $\sigma = 2\tau_s(1 + \chi^2) / 2\chi$ ($\chi = h/a$ – відносна товщина прошарку) [1].

У праці [5] стверджують, що описати напружений стан прямокутної області можна завжди, якщо вибрати функцію напружень Ері $\phi(x, y)$ у вигляді відповідного полінома.

Напруження у прямокутнику (рис. 1а) $|x| \leq a$, $|y| \leq h$ повинні задовольняти такі умови: диференційні рівняння рівноваги (1); $\sigma_x(x, y) = 0$, $\tau_{xy}(x, y) = 0$ при $|x| = a$ та

$$\int_{-a}^a \sigma_y(x, y) dx = 2a\sigma, \quad \forall y \in [-h, h]. \quad (6)$$

Диференційні рівняння рівноваги виконуються, якщо прийняти

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \partial^2 \phi(x, y) / \partial y^2, \quad \sigma_y(x, y) = \partial^2 \phi(x, y) / \partial x^2, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\partial^2 \phi(x, y) / \partial x \partial y, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\phi(x, y)$ – довільна функція, що має відповідні похідні і яка може не задовольняти біквадратне рівняння Лапласа, оскільки після переходу прошарку у “новий” напружений стан ($\sigma \geq \sigma_s^M$) закон Гука про лінійну залежність між напруженнями і деформаціями змінюється.

Якщо прийняти $\phi(x, y) = ky^2(x^2 - a^2)^2 + 0,5\sigma x^2$, то, згідно з виразом (7), отримаємо:

$$\sigma_x = 2k(x^2 - a^2)^2, \quad \sigma_y = \sigma + 4ky^2(3x^2 - a^2), \quad \tau_{xy} = -8kxy(x^2 - a^2). \quad (8)$$

Оскільки $\tau_{xy}(0, 0) = 0$, тобто у точці $(0, 0)$ $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ є головними напруженнями, згідно з умовами симетрії, то $\sigma_y(0, 0) - \sigma_x(0, 0) = 2\tau_s$, тоді

$$k = (\sigma - 2\tau_s) / 2a^4. \quad (9)$$

Після підстановки (9) у (8) отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4} (x^2 - a^2)^2, \quad \sigma_y(x, y) = \sigma + \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4} y^2 (3x^2 - a^2), \\ \tau_{xy} &= -4 \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4} xy (x^2 - a^2), \\ \sigma_z &= 0,5(\sigma_x + \sigma_y) = 0,5\sigma + (\sigma - 2\tau_s) \left[(x^2 - a^2)^2 + 2y^2(3x^2 - a^2) \right] / 2a^4. \end{aligned} \quad (10)$$

Осесиметрична деформація (рис. 1б). Напруження $\sigma_r = \sigma_r(r, z)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, z)$, $\sigma_z = \sigma_z(r, z)$ повинні задовольняти диференційні умови рівноваги [5]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (11)$$

і граничні умови

$$\sigma_r(a, z) = 0, \quad \tau_{rz}(a, z) = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sigma_z(r, z) r dr = \pi a^2 \sigma, \quad (12)$$

а також бути парними функціями

$$\sigma_z(r, z) = \sigma_z(r, -z), \quad \sigma_r(r, z) = \sigma_r(r, -z), \quad \sigma_\theta(r, z) = \sigma_\theta(r, -z). \quad (13)$$

Згідно з працею [5], умови рівноваги (11) виконуються, якщо прийняти, що

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Слід зауважити, що перше із рівнянь (11) виконується за довільної функції $\varphi(r, z)$, яка має відповідні похідні, друге – лише тоді, коли функція $\varphi(r, z)$ є розв’язком рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(r, z) = 0. \quad (15)$$

Функціями, які задовольняють рівняння (15), є поліномні розв’язки, що будуються на основі поліномів Лежандра [6].

Задовольняючи умову парності (13), для подальшого розгляду достатньо взяти функцію напружень $\varphi(r, z)$ у формі полінома п’ятого степеня

$$\varphi_5(r, z) = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z). \quad (16)$$

Тоді, згідно з виразом (14), при $\mu = 0,5$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (-b_5r^2 + 12b_5z^2), \quad \sigma_z = (80a_5 - 25b_5)r^2 + (-160a_5 + 14b_5)z^2, \\ \sigma_\theta &= (-20a_5 - 5b_5)r^2 + (80a_5 + 20b_5)z^2, \quad \tau_{rz} = (160a_5 - 14b_5)rz. \end{aligned} \quad (17)$$

З умови $\tau_{rz}(a, z) = 0$ $a_5 = 7b_5 / 80$. Тоді, якщо прийняти $b = 4b_5/9$, отримуємо:

$$\sigma_r = -br^2 + 12bz^2, \quad \sigma_z = -8br^2, \quad \sigma_\theta = -3br^2 + 12bz^2, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (18)$$

Коефіцієнт b вибирають так, щоб задовольнити умови (12) і $\sigma_z(a, z) = 2\tau_s$. Крім цього, до компонент $\sigma_z(r, z)$, $\sigma_r(r, z)$, $\sigma_\theta(r, z)$ можна додати сталі величини у межах дотримання диференціальних умов рівноваги (11) та умови $\sigma_r(a, z) = 0$. Отже, остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma + (\sigma - 2\tau_s) \left(1 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right), \quad \sigma_r = (\sigma - 2\tau_s) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \\ \sigma_\theta &= (\sigma - 2\tau_s) \left(1 - 3 \frac{r^2}{a^2} \right), \quad \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Результат $\tau_{rz} = 0$ викликає певні сумніви через невідповідність формулі (5) і розв'язку (10) для плоскої деформації, що можна пояснити експериментом [2], де відсутність дотичних напружень передбачено і підтверджено на основі інших міркувань.

Про деформації. Згідно з умовами у праці [5], пружний шар знаходиться між двома абсолютно жорсткими плитами, до яких він закріплений. Шар стискається ними, і нормальні напруження у напрямі стиску рівні σ_z . Вважаючи, що прикріплення до плит унеможливує поперечні деформації ϵ_x, ϵ_y ($\epsilon_r, \epsilon_\theta$), необхідно знайти явний вираз для модуля Юнга, тобто відношення σ_z/ϵ_z через E і μ . Якщо матеріал шару має коефіцієнт Пуассона не набагато менший за 0,5, як, наприклад, для гуми, то модуль Юнга буде у багато разів більшим.

Якщо у законі Гука $\epsilon_z = (\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)) / E$, $\epsilon_r = (\sigma_r - \mu(\sigma_z + \sigma_\theta)) / E$, $\epsilon_\theta = (\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)) / E$ покласти $\epsilon_r = 0, \epsilon_\theta = 0$, то отримуємо $\epsilon_z = \sigma_z(1 - \mu - 2\mu^2) / (1 - \mu)E$, звідси $\sigma_z / \epsilon_z = E(1 - \mu) / (1 - \mu - 2\mu^2)$, що підтверджує висновок задачі: $\epsilon_z \rightarrow 0$, якщо $\mu \rightarrow 0,5$.

ВИСНОВКИ

Отримано аналітичні вирази для напружень, які виникають у м'якому прошарку за контактного зміцнення в умовах плоскої та осесиметричної деформації. Оскільки формули напружень одержали на основі поліномів найменшого можливого степеня, то можна сподіватись у їх найбільшій вірогідності. Встановлено, що за розтягування (стискання) зварних зразків з м'яким прошарком в умовах контактного зміцнення деформація прошарку у напрямі розтягу (стиску) практично зупиняється, коли напруження досягають його границі плинності і коефіцієнт Пуассона наближається до 0,5. Згідно з другою гіпотезою міцності (руйнування відбувається тоді, коли деформація розтягу досягає максимально можливого значення), розірвати м'який прошарок відповідної геометрії неможливо.

1. Ganulich B. K., Gnyp I. P., and Pokhmursky V. I. Contact strengshening of soft layers // Soviet Materials Science. – 1981. – **17**, № 3. – P. 261–265.
2. Ganulich B. K. and Pokhmursky V. I. On stress relaxation at the tip of a crack under normal tension // Fundamentals and Applications, ESSIS/EGF9. Freiburg–London: Mech. Eng. Publ., 1991. – P. 55–63.
3. Das N. S., Banerjee J., and Collins I. F. Plane strein compression of rigidperfectly plastic between parallel dies with slipping friction // J. Appl. Mech. – 1979. – **46**, № 2. – P. 317–321.
4. Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen satz uber das plastische Gleichgewicht // ZAMM. – 1923. – № 3. – P. 401–406.
5. Timoshenko S. P. and Goodier J. N. Theory of Elasticity. – N.Y.: McGraw-Hill, 1970. – 576 p.

Одержано 25.09.2023