

УДК 620.193:661.96

## НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНА ПОВЕДІНКА ТА ЕФЕКТИВНІ ПАРАМЕТРИ МАТЕРІАЛІВ З ПОРАМИ ТА ЩІЛИНОПОДІБНИМИ ДЕФЕКТАМИ

А. В. КУЗЬМОВ<sup>1,2</sup>, О. В. ВДОВИЧЕНКО<sup>1,3</sup>, О. Г. КІРКОВА<sup>1</sup>, М. Б. ШТЕРН<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України, Київ;

<sup>2</sup> Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського";

<sup>3</sup> Київський академічний університет

Сформульовано нелінійно-пружну ізотропну модель та визначено ефективні характеристики матеріалу з дефектами у вигляді щілин та пор. За основу моделі взято вираз для питомої енергії деформування, що є однорідною функцією другого ступеня стосовно інваріантів тензора деформації. Зв'язок між макроскопічними параметрами моделі, вмістом дефектів та їх морфологією в матеріалі визначено методами обчислювальної мікромеханіки. Модель дала змогу врахувати пружну дилатанцію, а її граничний стан відповідає умові Cam–Clay.

**Ключові слова:** нелінійна пружність, пружний потенціал, пори, дефекти типу щілин.

A nonlinear-elastic isotropic model is formulated and effective characteristics of the material containing defects in the form of cracks and pores are determined. The expression for deformation specific energy, which is the second degree homogeneous function with respect to the invariants of the deformation tensor is the model base. The relationship between the macroscopic parameters of the model, the content of defects and the morphology of the material is established by the methods of computational micromechanics. The model allows taking into account elastic dilatancy, and its limiting state corresponds to the Cam–Clay condition.

**Keywords:** nonlinear elasticity, elastic potential, pores, slit-like defects.

**Вступ.** Звичкні уявлення про роль таких особливостей матеріалів, як наявність пор та щілиноподібних дефектів, зокрема тріщин, пов'язані переважно із елементами конструкцій, які характеризуються підвищеною міцністю та тривкістю до дії екстремальних умов експлуатації. Це визначає негативне ставлення до дефектів такого типу і налаштовує фахівців у галузі технології мінімізувати їх вплив на конструкційні властивості матеріалів, регулюючи їхню кількість.

Натомість успіхи матеріалознавства останніх десятиріч, пов'язані зі створенням функціональних матеріалів різного призначення, не тільки припускають існування подібних особливостей у матеріалах, а ще й роблять їх невід'ємним елементом забезпечення очікуваних функцій. Мова йде про пористі матеріали, які застосовують у хімічній, енергетичній та інших галузях промисловості, а також в ортопедії. Саме пори у таких виробках, як фільтри, каталізатори, електроди паливних комірок та емісійних елементів, ортопедичні імпланти тощо, забезпечують виконання даним класом матеріалів очікуваних від них функцій.

До того ж слід зазначити, що виготовлення таких матеріалів пов'язане із технологіями порошкової металургії, що сприяє появі додаткових особливостей їх структури на мезорівні. Це слабо пов'язані внутрішні поверхні, до яких належать

щілини, тріщини, несформовані контакти між частинками порошку та між фазами в композитних матеріалах, які по суті є двовимірними дефектами.

На рис. 1 зображені типові двовимірні (щілиноподібні) дефекти матеріалів між частково консолідованими частинками порошку металу (а), кераміки в агломератах (b) та литого матеріалу після інтенсивного вальцювання (с).

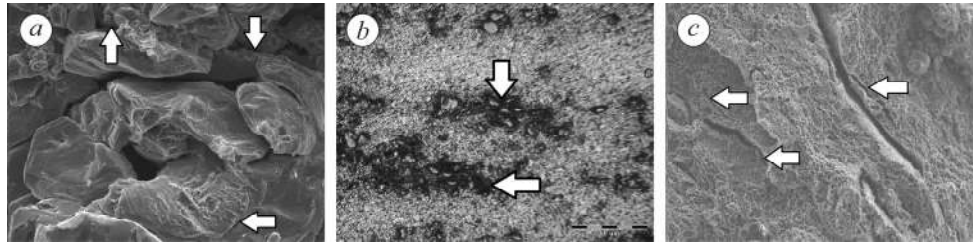


Рис. 1. Типові щілиноподібні дефекти в матеріалах (білі стрілки): контакти між частинками порошку титану (спікання за 973 K) (а), порошкового композита AlCuMn/SiC (екструзія 673 K) (b) та розшарування в литві композита AlMg/SiC після вальцювання (с).

Fig. 1. Typical slit-like defects of materials (white arrows): contacts between particles of titanium powder (sintering at 973 K) (a), AlCuMn/SiC powder composite (extrusion, 673 K) (b), and delamination of cast AlMg/SiC composite after rolling (c).

Аналіз поведінки таких матеріалів за умов їх експлуатації, спрямований на визначення напружено-деформованого стану, розвинуто раніше [1–3]. Важливі результати отримані також для динамічно коливальної реакції пружних тіл з пошкодженнями на мезоскопічному рівні [4, 5]. Розвинуті в цих працях моделі поведінки матеріалів дали змогу поставити зворотні задачі, що стало основою експериментальних методик оцінки вмісту пошкоджень.

Оцінка загального вмісту дефектів за акустичними характеристиками (швидкість поширення пружних хвиль або резонансна частота), визначеними за класичними методиками [6–8], ґрунтується головню на припущенні лінійно-пружної поведінки матеріалу з дефектами в акустичному експерименті. Водночас встановлено, що в квазістатичному експерименті матеріали з двовимірними дефектами демонструють відхилення від лінійної поведінки, зокрема, різний опір навантаженням розтягу і стиску (різноопірність) у пружному діапазоні. Таку відмінність значень уявного модуля пружності в умовах квазістатичного розтягу і стиску демонстрували матеріали, спечені з порошку нікелю [9], а також з титанових волокон [10]. Ця різниця зменшувалась зі збільшенням температури спікання, коли контакти між частинками вдосконалювались. Тензометричним та оптичним методами зафіксували зміщення нейтральної площини вигнутих за 4-точковою схемою зразків кераміки  $\text{Al}_2\text{TiO}_5$  з мікротріщинами від центра перерізу [11]. При цьому модуль пружності стиснених волокон ( $E^{(-)} = 5,67 \dots 5,83 \text{ GPa}$ ) був більший, ніж розтягнутих ( $E^{(+)} = 4,43 \dots 4,54 \text{ GPa}$ ).

Встановлено, що поздовжні резонансні коливання відрізняються від гармонійних і їх можна описати частинами двох квазісинусоїдальних кривих [12, 13]. При цьому фаза розтягу триває довше фази стиснення. Це можливо, коли модуль Юнга матеріалу в фазі стиснення перевищує такий у фазі розтягу. Таке явище не спостерігали для оксиду алюмінію з такою ж пористістю, спеченого за більших температур, що свідчить про те, що джерелом виявленої нелінійності коливань є морфологічні особливості двовимірних дефектів, береги яких, на відміну від пор, можуть розмикатись і змикатись залежно від знаку прикладених зусиль. Це свід-

чить про чутливість пружної поведінки розглянутих матеріалів до знаку навантаження. Такі матеріали належать до класу різномодульних, а для аналізу їх поведінки закон Гука у найрозповсюдженішій формі потребує узагальнення.

Нижче використано одну з моделей, яка описує ізотропні різномодульні матеріали [14], із подальшим застосуванням методів обчислювальної мікромеханіки для встановлення зв'язку між вмістом та морфологією дефектів з одного боку та ефективними (макроскопічними) характеристиками пружності матеріалів – з іншого.

**Пружний потенціал та визначальні співвідношення модифікованої моделі різномодульних матеріалів.** Міркування, викладені нижче, базуються на фізично нелінійній ізотропній моделі пружності, згідно з працею [14], яка характеризується різноопірністю до розтягу й стиску. Пружний потенціал  $U$  у ній не залежить від фази тензора деформацій [15], і відповідно може бути вираженим через інваріанти  $(\epsilon, \gamma)$  тензора малих деформацій  $\epsilon_{ij}$ :  $\epsilon = \epsilon_{ii}$ ;  $\gamma^2 = (\epsilon_{ij} - 1/3\epsilon\delta_{ij})(\epsilon_{ij} - 1/3\epsilon\delta_{ij})$ . Залежність  $U(\epsilon, \gamma)$  має вигляд

$$U(\epsilon, \gamma) = \frac{1}{2}(1+m)^{-2} \left( \sqrt{K\epsilon^2 + 2G\gamma^2} - \sqrt{Km\epsilon} \right)^2, \quad (1)$$

де  $K, G$  та  $m$  – параметри моделі.

Відповідно додаткову питому пружну енергію  $W$  виражають через інваріанти  $(p, \tau)$  тензора напружень  $\sigma_{ij}$  ( $p = \sigma_{ii}/3$ ;  $\tau^2 = (\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})$ ):

$$W(p, \tau) = \frac{1}{2}(1-m)^{-2} \left( \sqrt{p^2/K + (1-m^2)\tau^2/2G} + mp/\sqrt{K} \right)^2. \quad (2)$$

Якщо вираз для  $W$  використовувати як енергетичний критерій виходу поза межі пружності, то отримаємо граничну умову Cam-Clay [16].

Оскільки  $U$  та  $W$  є потенціалами, рівняння (1) та (2) встановлюють взаємно однозначний зв'язок в аналітичному вигляді між напруженнями та деформаціями

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon} \delta_{ij} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial \gamma} (\epsilon_{ij} - 1/3\epsilon\delta_{ij}); \quad \epsilon_{ij} = 1/3 \frac{\partial W}{\partial p} \delta_{ij} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W}{\partial \tau} (\sigma_{ij} - p\delta_{ij}).$$

Якщо  $m = 0$ , то наведена модель трансформується у класичну модель Гука [17]. Як впливає із виразу для її потенціалу  $U_{m=0}(\epsilon, \gamma) = 1/2(K\epsilon^2 + 2G\gamma^2)$ , параметри  $K$  та  $G$  набувають змісту об'ємного та зсувного модуля пружності, відповідно. Тому параметр  $m$  у рівнянні (1) необхідно розглядати як внесені дефектами збурення ідеально пружної поведінки.

**Мікромеханічний підхід до встановлення залежності між структурою матеріалу та ефективними модулями пружності.** Щоб знайти зв'язок між параметрами  $K, G, m$ , які задає модель (1), та структурою пористого матеріалу порошкового походження з розподіленими площинними дефектами, використаємо методи механіки мікронеоднорідних матеріалів. Для обчислення ефективних властивостей матеріал моделювали періодичною двовимірною структурою, одиничний елемент якої, тобто представницький осередок, зображений на рис. 2а. Осередок має круговий отвір, з яким сполучені чотири щілиноподібні прорізи. Така структура є відображенням неповної консолідації прямокутно упакованих частинок порошку зі залишковими порами та частково відмежованими поверхнями. Аналогічно до праці [18], ефективні модулі  $(K, G, m)$  мікронеоднорідного

матеріалу вважали залежними від двох параметрів стану, які описують негомогенність матеріалу: пористості  $\theta$ , яку задавали як відношення площі кругових отворів до площі представницької комірки, і показника площинних дефектів  $k$  – відношення довжини прорізу  $l$  до половини довжини міжчастинного перешийка  $L$  (рис. 2a). Таким чином, методом скінченних елементів з адаптивною сіткою (рис. 2b) розв’язували низку задач з мікрOMEХАнічного усереднення [19, 20] властивостей відповідно до різних значень з двопараметричного діапазону  $(\theta, k)$ .

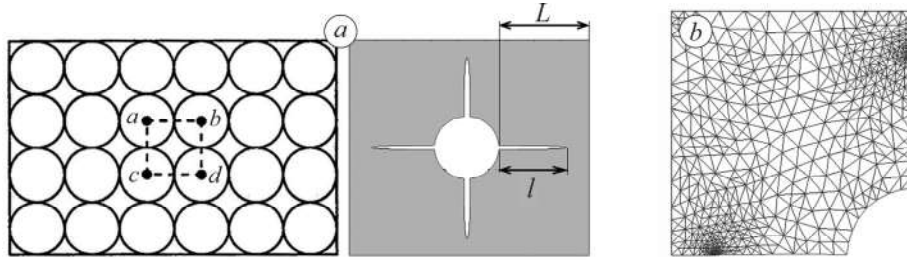


Рис. 2. Представницький осередок (a) та сітка скінченних елементів (b).

Fig. 2. Unit cell (a) and the finite elements mesh (b).

Вважали, що межі осередку розташовані вздовж головних осей і, відповідно, макроскопічний “ефективний” тензор деформацій описуємо тільки двома компонентами  $\epsilon_1 = \epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . Тоді внаслідок симетрії осередку мікрOMEХАнічні крайові умови на межі періодичної представницької комірки мають вигляд

$$\left( u_x = x\epsilon_{xx}, \tau_{xy} = 0 \right): n_x = 0, n_y = 1; \left( u_y = y\epsilon_{yy}, \tau_{xy} = 0 \right): n_x = 1, n_y = 0,$$

де  $(u_x, u_y)$  – переміщення;  $x, y$  – координати;  $n_x$  та  $n_y$  – компоненти нормалі.

Визначальні співвідношення різноопірної пружної поведінки залежать від трьох реологічних параметрів  $(K, G, m)$ , тому для знаходження пружного потенціалу достатньо знайти усередненням на представницькій комірці ефективну пружну енергію  $U$  для трьох різних макроскопічних напружено-деформованих станів і так отримати систему алгебраїчних рівнянь для невідомих  $K, G, m$ . Для такого набору напружено-деформованих станів брали: чистий зсув ( $\epsilon_{xx} = \epsilon_0$ ;  $\epsilon_{yy} = -\epsilon_0$ ), всебічний розтяг ( $\epsilon_{xx} = \epsilon_0$ ;  $\epsilon_{yy} = \epsilon_0$ ) та стиск ( $\epsilon_{xx} = -\epsilon_0$ ;  $\epsilon_{yy} = -\epsilon_0$ ) (рис. 3). При цьому припускали, що дефекти повністю зімкнені за всебічного стиску та повністю розімкнені за всебічного розтягу та чистого зсуву.

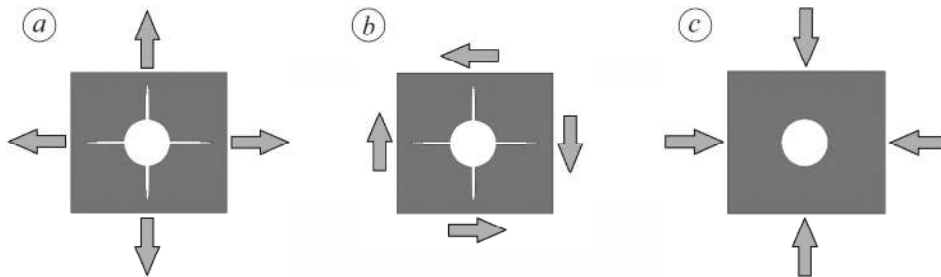


Рис. 3. Конфігурація дефектів для різних схем деформування: всебічний розтяг (a), чистий зсув (b), всебічний стиск (c).

Fig. 3. Configuration of defects for different deformation schemes: uniform tension (a), pure shear (b), uniform compression (c).

**Залежність модулів пружності різноопірного матеріалу від пористості та дефектності.** Щоб проаналізувати дані акустичної дефектоскопії зразків з порошку заліза, результати розрахунків подаємо для коефіцієнта Пуассона твердої фази  $\nu_0 = 0,28$ . Всі наведені значення жорсткостей нормують до відповідної жорсткості твердої фази  $K_0, G_0, E_0$ .

Оскільки за будь-яких  $m$  коефіцієнт  $K$  задає пропорційність між  $\epsilon$  та  $p$  за всебічного стиску ( $\gamma = 0$ ), а у цьому випадку припускали зімкненість дефектів, то параметр  $K$  залежить лише від пористості (рис. 4a). Залежність параметра  $G$  від  $k$  за фіксованої пористості нелінійна – за малих  $k$  нелінійність виражена слабо, але, починаючи з  $k = 0,7 \dots 0,8$ , спостерігаємо швидке зниження параметра  $G$  (рис. 4b). Параметр  $m$  залежить від  $k$  нелінійно за будь-яких  $k$ , проте  $m$  зростає швидше, починаючи з  $k = 0,85$ .

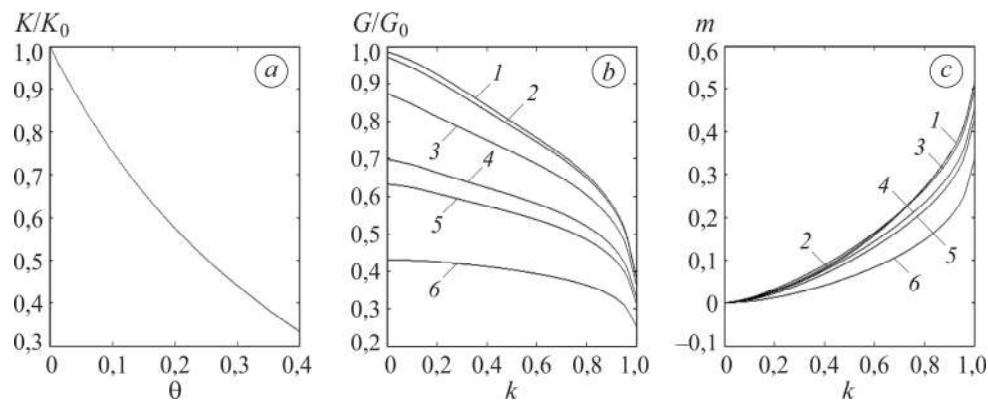


Рис. 4. Залежності коефіцієнта  $K/K_0$  від пористості  $\theta$  для матеріалів з будь-яким показником дефектів  $k$  (a) та коефіцієнтів  $G/G_0$  (b) і  $m$  (c) від  $k$  для матеріалів з пористістю  $\theta$ : 1 – 0,005; 2 – 0,01; 3 – 0,05; 4 – 0,15; 5 – 0,2; 6 – 0,4.

Fig. 4. Dependences of the ratio  $K/K_0$  on porosity  $\theta$  for materials with any defective factor  $k$  (a) and of coefficients  $G/G_0$  (b) and  $m$  (c) on  $k$  for materials with porosity  $\theta$ : 1 – 0.005; 2 – 0.01; 3 – 0.05; 4 – 0.15; 5 – 0.2; 6 – 0.4.

За одновісного навантаження, коли всі компоненти тензора напружень, крім одного нормального, наприклад,  $\sigma_{11} = \sigma$ , дорівнюють нулю, додаткова питома пружна енергія набуває вигляду  $W(\sigma) = \left(1/2E^{(\pm)}\right)\sigma^2$ , де за розтягу  $\sigma > 0$  треба брати константу  $E^{(+)}$ , а за стиску –  $E^{(-)}$ , відповідно. Ці константи можна розглядати як модулі Юнга на розтяг та стиск нелінійного матеріалу. Їх вираз через модулі  $K, G, m$  такий:

$$E^{(\pm)} = 9KG(1-m)^2 / \left( \sqrt{G + 3K(1-m^2)} \pm m\sqrt{G} \right)^2.$$

Графіки залежностей модулів Юнга від параметра  $k$  наведені на рис. 5.

Привертає увагу суттєве зменшення опору пошкодженого матеріалу не тільки за одновісного розтягу, але й за такого ж стиску.

**Акустичний контроль пошкоджених матеріалів порошкового походження.** За залежностями від  $k$  та  $\theta$  нормованих модулів Юнга  $E^{(+)} / E_0$  та  $E^{(-)} / E_0$  в умовах одновісного розтягу і стиску (рис. 5) можна відшукати таку ж залежність для резонансної частоти вільних коливань стрижня з пористого матеріалу з

нестабільними площинними дефектами  $f_{\text{eff}}$ , нормовану на частоту вільних коливань  $f_{\Theta}$  аналогічного стрижня, матеріал якого має таку ж пористість, але не містить площинних дефектів. З огляду на те, що повний період поздовжніх вільних коливань стрижня за першою модою  $\tau_t = \tau^{(+)} / 2 + \tau^{(-)} / 2 = 1 / f_{\text{eff}}$ , де  $\tau^{(+)}$  і  $\tau^{(-)}$  – відповідно періоди коливань стрижня з матеріалу з модулями пружності  $E^{(+)}$  і  $E^{(-)}$  (рис. 6),

$$f_{\text{eff}} / f_{\Theta} = 2\sqrt{E^{(+)}E^{(-)}} / \left( \sqrt{E_{\Theta}} \left( \sqrt{E^{(+)}} + \sqrt{E^{(-)}} \right) \right),$$

де  $E_{\Theta}$  – модуль Юнга пористого матеріалу без пошкоджень.

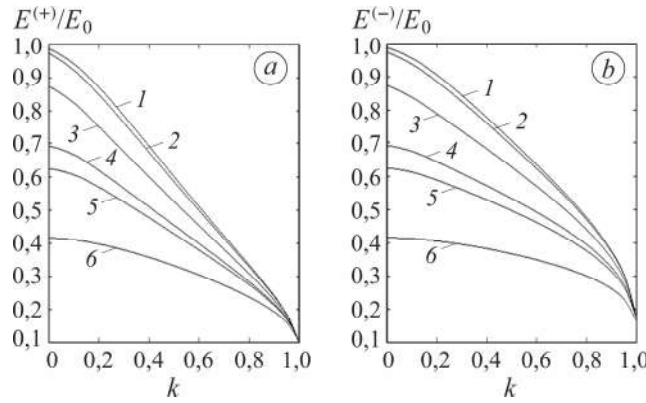
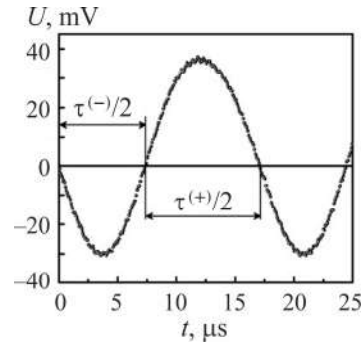


Рис. 5. Залежності відносного модуля Юнга на розтяг  $E^{(+)} / E_0$  (a) і стиск  $E^{(-)} / E_0$  (b) від показника площинних дефектів  $k$  для матеріалів пористістю  $\theta$ :  
1 – 0,005; 2 – 0,01; 3 – 0,05; 4 – 0,15; 5 – 0,2; 6 – 0,4.

Fig. 5. Dependences of relative Young's modulus under tension  $E^{(+)} / E_0$  (a) and compression  $E^{(-)} / E_0$  (b) on the planar defective factor  $k$  for materials with porosity  $\theta$ :  
1 – 0.005; 2 – 0.01; 3 – 0.05; 4 – 0.15; 5 – 0.2; 6 – 0.4.

Рис. 6. Форма функції переміщень кінця зразка оксиду алюмінію пористістю  $\theta = 0,3$ , спеченого за температури  $T_s = 1623$  K, виміряна в умовах першої моди поздовжніх резонансних коливань стрижня.

Fig. 6. Shape of the displacement function of the end of the aluminum oxide sample with a porosity  $\theta = 0.3$ , sintered at a temperature of  $T_s = 1623$  K, measured under the conditions of the first mode of longitudinal resonance oscillations of the rod.



Відповідно можна ввести ефективний акустичний модуль Юнга

$$E_{\text{ac}} = \left( \sqrt{E^{(+)}} + \sqrt{E^{(-)}} \right)^2 / \left( 4E^{(+)}E^{(-)} \right); \quad f_{\text{eff}} / f_{\Theta} = \sqrt{E_{\text{ac}}} / \sqrt{E_{\Theta}}.$$

Як бачимо (рис. 7), умовний “акустичний” модуль Юнга виявився майже таким же чутливим до вмісту дефектів, як і модуль Юнга на розтяг, тому акустичну дефектоскопію можна використати для оцінки пошкодженості матеріалу.

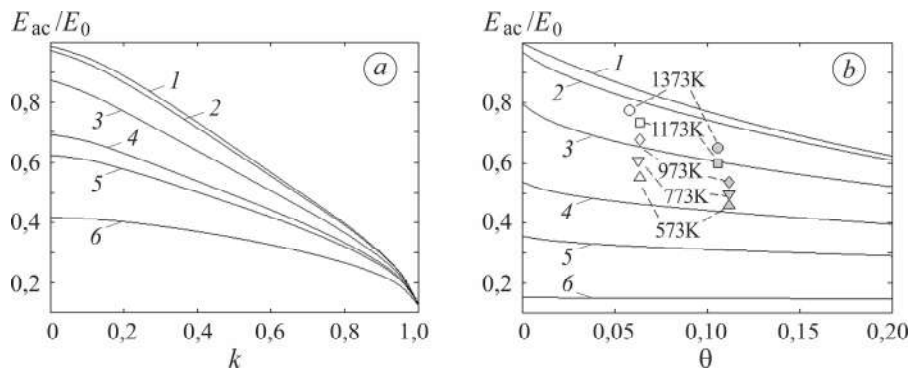


Рис. 7. Розрахункові залежності акустичного нормованого модуля Юнга  $E_{ac} / E_0$  від показника площинних дефектів  $k$  для матеріалів пористістю  $\theta$  (а: 1 – 0,005; 2 – 0,01; 3 – 0,05; 4 – 0,15; 5 – 0,2; 6 – 0,4) та від пористості  $\theta$  для матеріалів з показником площинних дефектів  $k$  (б: 1 – 0,01; 2 – 0,1; 3 – 0,35; 4 – 0,65; 5 – 0,85; 6 – 0,99).

Символами позначені експериментально визначені значення модуля Юнга порошкового заліза, попередньо спресованого під тиском 0,67 GPa (пусті) і 1 GPa (заповнені) та спеченого в середовищі водню за вказаних температур.

Fig. 7. Calculated dependences of the normalized acoustic Young's modulus  $E_{ac} / E_0$  on the planar defective factor  $k$  for materials with porosity  $\theta$  (a: 1 – 0.005; 2 – 0.01; 3 – 0.05; 4 – 0.15; 5 – 0.2; 6 – 0.4) and on porosity  $\theta$  for materials with a planar defective factor  $k$  (b: 1 – 0.01; 2 – 0.1; 3 – 0.35; 4 – 0.65; 5 – 0.85; 6 – 0.99).

The symbols indicate the experimentally determined values of the Young's modulus of powder iron preliminary pressed under a pressure of 0.67 GPa (vacant) and 1 GPa (filled) and sintered in a hydrogen environment at the indicated temperatures.

Порівняння з результатами експериментально визначеного за резонансною частотою коливань модуля Юнга порошкового заліза, спеченого в середовищі водню за різних температур [21], показує, що кількісно модель адекватно описує зміну пружності, викликану двовимірними дефектами (недосконалими контактами між частинками порошку).

### ВИСНОВКИ

Запропоновані припущення про форму функції питомої пружної енергії дали змогу описати пружну поведінку порошкових матеріалів з порами та недосконалими контактами. Водночас використання комп'ютерного моделювання, яке базується на засадах механіки мікронеоднорідних матеріалів, дозволило врахувати структуру пористих пошкоджених матеріалів порошкового походження та пов'язати ступінь недосконалості контактів між частинками з нелінійною пружною поведінкою матеріалів, яка виявляє себе різницею значень характеристик пружності за розтягу і стиску. Діапазон умовного акустичного модуля Юнга, який прогнозують результатами моделювання, корелює з даними резонансної ультразвукової спектроскопії порошкових виробів різного ступеня консолідації. Результати моделювання можна використати для інтерпретації експериментальних даних та розроблення нових методів неруйнівного контролю порошкових матеріалів.

1. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Nazarchuk Z. T. Current aspects of nondestructive materials testing // Materials Science. – 1993. – 29, № 1. – P. 87–92. <https://doi.org/10.1007/BF00558670>

3. Nykyforchyn H. M. and Terlets'ka Z. O. Computation model of corrosion-fatigue crack growth in thin metallic plates // *Materials Science*. – 1995. – **30**, № 1. – P. 25–30. <https://doi.org/10.1007/BF00559012>
4. Nazarchuk Z. T., Skal's'kyi V. R., and Stankevych O. M. A method for the identification of the types of macrofracture of structural materials by the parameters of the wavelet transform of acoustic-emission signals // *Materials Science*. – 2014. – **49**, № 6. – P. 841–848. <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9682-y>
5. Estimation of the modulus of the vector of displacements in the process of simultaneous formation of cracks in the composites / Z. T. Nazarchuk, V. R. Skal's'kyi, O. M. Serhienko, Yu. Ya. Matviiv, L. I. Hrechukhin, and E. D. Podlozny // *Materials Science*. – 2011. – **47**, № 3. – P. 375–385. <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9406-5>
6. Bezymanniy Y. G. Use of acoustic methods to control the quality of layered materials // *Powder Metall. Met. Ceram.* – 1999. – **38**. – P. 236–239. <https://doi.org/10.1007/BF02675768>
7. *Механіка руйнування і міцність матеріалів: Довідн. пос.* / Під заг. ред. В. В. Панасюка. Т. 5: Неруйнівний контроль і технічна діагностика / Під ред. З. Т. Назарчука. – Львів: ФМІ ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2001. – 1134 с.
8. Assessment of the degree of damage to materials by acoustic methods (A survey). Part 1 / V. R. Skalskyi, I. M. Romanyshyn, O. M. Mokryi, and P. M. Semak // *Materials Science*. – 2022. – **57**, № 5. – P. 603–611. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00586-x>
9. Феденко В. И. Деформация трубчатых образцов из спеченного порошка никеля при простом нагружении // *Вісн. Дніпропетр. ун-ту: Механіка* – 1998. – С. 145–154.
10. Flexural and compressive mechanical behaviors of the porous titanium materials with entangled wire structure at different sintering conditions for load-bearing biomedical applications / G. He, P. Liu, Q. Tan, and G. Jiang // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* – 2013. – **28**. – P. 309–319.
11. Application of optical methods to investigate the non-linear asymmetric behavior of ceramics exhibiting large strain to rupture by four-points bending test / Y. Belrhiti, A. Gallet-Doncieux, A. Germaneau, P. Doumalin, J. C. Dupré, A. Alzina, Ph. Michaud, O. Pop, M. Huger, and T. Chotard // *J. Eur. Ceram. Soc.* – 2012. – **32**. – P. 4073–4081.
12. Вдовиченко О. В. Експериментальні дослідження нелінійної поведінки пористого оксиду алюмінію в процесі пружних коливань // *Наук. нотатки: міжвуз. зб. наук. праць*. – Луцьк: ЛНТУ, 2013. – Вип. 43. – С. 41–45.
13. Вдовиченко О. В. Ідентифікація мезоструктури та визначення властивостей порошкових і композиційних матеріалів методами акустичної спектроскопії: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Київ, 2020. – 36 с.
14. Shtern M. B. Elastic model of isotropic powder materials with different tensile and compressive properties // *Powder Metall. Met. Ceram.* – 2009. – **48**. – P. 257–266. <https://doi.org/10.1007/s11106-009-9137-4>
15. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
16. Borja R. I. and Lee S. R. Cam-clay plasticity, part 1: implicit integration of elasto-plastic constitutive relations // *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.* – 1990. – **78**, № 1. – P. 49–72. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90152-C](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90152-C)
17. Mase G. E. Theory and Problems of Continuum Mechanics, Schaum's Outline Series. – McGraw-Hill, 1970. – 222 p.
18. Modeling of multimodulus elastic behavior of damaged powder materials using computational micromechanics / A. V. Kuzmov, O. V. Vdovychenko, M. B. Shtern, and O. G. Kirkova // *Powder Metall. Met. Ceram.* – 2021. – **59**. – P. 491–498. <https://doi.org/10.1007/s11106-021-00192-7>
19. Christensen R. M. Mechanics of Composite Materials. – New York: Wiley-Interscience, 1979. – 348 p. <https://doi.org/10.1002/pol.1980.130181009>
20. Jones R. M. Mechanics of Composite Materials. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – 538 p. <https://doi.org/10.1201/9781498711067>
21. Вдовиченко А. В., Подрезов Ю. Н. Эволюция динамического модуля Юнга и демпфирующей способности пористого железа // *Металлофизика и новейшие технологии*. – 2005. – **27**, № 11. – С. 1429–1440.

Одержано 24.10.2023