

УДК 539.3

ТРИЩИНА ЗАКРУТУ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ТІЛІ З ТОНКИМ ПРОШАРКОМ НА ІНТЕРФЕЙСІ

*І. С. ЗВІЗЛО, Н. В. СТАНКЕВИЧ**Львівський національний університет імені Івана Франка*

Методом граничних інтегральних рівнянь досліджено вплив тонкого прошарку у кусково-однорідному тілі з двох півпросторів на інтенсивність напружень в околі кругової тріщини закруту. Розглянуто два підходи моделювання тонкого прошарку: точне з урахуванням його геометричних розмірів та наближене з використанням ефективних крайових умов у вигляді пружинного контакту на інтерфейсі. Встановлено межі придатності пружинних умов контакту для моделювання інтерфейсного прошарку.

Ключові слова: кусково-однорідне тіло, кругова тріщина закруту, тонкий прошарок, пружинні умови контакту, метод граничних інтегральних рівнянь.

The influence of a thin layer in a piecewise homogeneous body consisting of half-spaces on the stress intensity in the vicinity of a circular torsion crack is studied by the method of the boundary-integral equations. Two approaches to modeling a thin layer are considered – accurate considering its geometric dimensions and approximate using effective boundary conditions in the form of a spring contact at the interface. The limits of applicability of spring contact conditions for modeling the interlayer have been established.

Keywords: piecewise-homogeneous body, penny-shaped torsion crack, thin interlayer, spring boundary conditions, boundary integral equations method

Вступ. Широке застосування композитів у високотехнологічних галузях обумовлене їх поліпшеними функціональними властивостями, надійністю та тривалим життєвим циклом. Окремим їх класом є кусково-однорідні тіла, зокрема тришарової структури, із різною фізичною контрастністю матеріалів та плоско-паралельними інтерфейсними поверхнями. Міцність таких тіл за наявності в них внутрішніх тріщиноподібних дефектів обумовлена видом навантаження, контрастністю жорсткості матеріалів, розташуванням дефекту щодо поверхні інтерфейсу тощо [1–4]. Однак у цих дослідженнях розглядали лише умови ідеального контакту матеріалів на таких поверхнях. Водночас під час виготовлення та експлуатації конструкцій із таких матеріалів часто виникають тонкі структурні мікроріди на інтерфейсах з подальшим множинним руйнуванням когезійних зв'язків на них [5–9]. На певному етапі життєвого циклу ідеальний механічний контакт між компонентами композиту порушується внаслідок формування тонкого міжфазного прошарку іншої контрастності. Моделювати пошкоджений інтерфейс тонким прошарком можна з допомогою математично громіздкого точного підходу, який враховує геометричні його розміри [10], або спрощеного, який заміняє прошарок фізичною площиною зі заданими на ній пружинними умовами контакту [11, 12] у вигляді модифікованої моделі Вінклера [13]. Раніше модель тонкого прошарку застосовували, досліджуючи характеристики дальнього хвильового поля у низькочастотному спектрі коливань [14]. Водночас за наявності в

тілах внутрішніх тонкостінних дефектів типу тріщин актуально вивчити вплив на міцність недосконалостей спряження контактуючих елементів композиту [15].

У цьому дослідженні аналізували статичну взаємодію кругової тріщини закруту в біматеріалі з двох півпросторів, з'єднаних тонким прошарком, який моделювали за двома підходами – точним з урахуванням його геометрії та апроксимаційним зі залученням пружинних умов контакту. Застосовували метод граничних інтегральних рівнянь [16, 17].

Формулювання задачі. Розглянемо пружний ізотропний композит, який складається з двох півпросторів A і B , ідеально з'єднаних тонким податливим прошарком завтовшки h . Матеріали композиту характеризуються модулями зсуву G_D , $D = A, B, C$ ($G_C \ll G_A, G_B$). У нижньому півпросторі B розташована плоска тріщина, яка займає кругову область S радіусом a ($a \gg h$), паралельну до інтерфейсних поверхонь S_{01} , S_{02} , на глибині d від S_{01} (рис. 1). Протилежні поверхні $S^\pm$ тріщини зазнають дії самозрівноважених зусиль закруту:

$$N_j^+(\mathbf{x}) = -N_j^-(\mathbf{x}) = (-1)^{j+1} \frac{x_{3-j}}{a} N_0, \quad j=1, 2, \quad N_0 = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad N_3(\mathbf{x}) = 0.$$

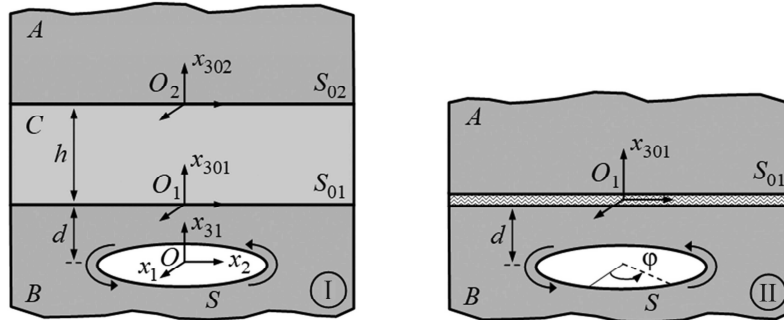


Рис. 1. Схема композиту з круговою тріщиною закруту: I – умови ідеального механічного контакту на поверхнях S_{01} , S_{02} спряження прошарку з півпросторами; II – заміна тонкого прошарку фізичною площиною S_{01} з пружинними умовами контакту півпросторів на ній.

Fig. 1. Scheme of a composite with a circular torsion crack: I – boundary conditions of ideal mechanical contact on the surfaces S_{01} , S_{02} of the interlayer conjugation with half-spaces; II – replacement of a thin layer by a physical plane S_{01} with spring contact conditions of the half-spaces on it.

Змоделюємо вибраний композит так (рис. 1): враховуючи геометричну товщину прошарку та умови ідеального механічного контакту на поверхнях S_{01} , S_{02} його спряження з півпросторами (випадок I) та замінюючи тонкий прошарок фізичною площиною S_{01} , яку характеризують параметри h , G_C та пружинні умови контакту півпросторів на ній (випадок II). На інтерфейсних поверхнях S_{01} , S_{02} вибираємо декартові системи координат $O_k x_1 x_2 x_{30k}$, $k=1, 2$, а у площині розташування тріщини – декартову систему координат $O x_1 x_2 x_{31}$ так, щоб область S дефекту лежала в площині $x_1 O x_2$, а координатні осі x_{31} , x_{301} , x_{302} – на одній прямій.

Задачу про визначення напружено-деформованого стану композиту з тріщиною під дією навантажень закруту зводимо до розв'язання диференціальних рівнянь рівноваги для векторів переміщень

$$\Delta_3 \vec{u}^D = 0, \quad D = A, B, C \quad (1)$$

із двома групами крайових умов. Перша група характеризує тип контакту півпросторів через податливий прошарок. Зокрема, умови ідеального механічного контакту для випадку I мають вигляд

$$u_j^C(\mathbf{x}) = u_j^{\left\{ \begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix} \right\}}(\mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^C(\mathbf{x}) = \sigma_{j3}^{\left\{ \begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix} \right\}}(\mathbf{x}), \quad j=1, 2, \quad \mathbf{x} \in \left\{ \begin{smallmatrix} S_{01} \\ S_{02} \end{smallmatrix} \right\},$$

$$u_3^D(\mathbf{x}) = \sigma_{33}^D(\mathbf{x}) = 0, \quad D = A, B, C. \quad (2)$$

Крайові умови пружинного контакту для випадку II характеризують лінійну пропорційність між напруженнями та різницею переміщень на поверхнях прошарку і мають вигляд [15]

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}) = \frac{G_C}{h} [u_j^B(\mathbf{x}) - u_j^A(\mathbf{x})], \quad j=1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_{01}. \quad (3)$$

Другу групу крайових умов задачі сформулювали в області S розташування тріщини:

$$\sigma_{j3}^B(\mathbf{x}) = (-1)^{j+1} \frac{x_{3-j}}{a} N_0, \quad j=1, 2, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

Зведення задачі до граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Переміщення і напруження у півпросторах спричинені зміщеннями точок інтерфейсних поверхонь та (для півпростору B) протилежних поверхонь тріщини. Переміщення описуємо фундаментальними розв'язками рівнянь (1) за допомогою ньютонівських потенціалів

$$u_j^D(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_{01}} \alpha_{j1}^D(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} + \delta_{DB} \frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|}, \quad j=1, 2, \quad D = A, B, \quad (5)$$

для прошарку

$$u_j^C(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{3j}} \iint_{S_{0i}} \alpha_{ji}^C(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|}, \quad j=1, 2,$$

де $|\mathbf{x}_0 - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{30}^2}$, $|\mathbf{x}_{10} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{310}^2}$ – відстані між фіксованою точками $\mathbf{x}_0(x_1, x_2, x_{30})$, $\mathbf{x}_{10}(x_1, x_2, x_{310} = d - x_{30})$ півпростору D та точкою $\xi(\xi_1, \xi_2, 0)$ області інтегрування $S_{0k} (S)$; δ_{DB} – Кронекерів символ. Невідомі густини α_{ji}^D , $D = A, B, C$ задані на інтерфейсних поверхнях, а Δu_j характеризують стрибки зміщень відповідних точок протилежних поверхонь $S^\pm$ тріщини вздовж координатних осей x_j . Підставивши вирази (5) у співвідношення закону Гука, отримуємо інтегральні подання для дотичних напружень:

$$\sigma_{j3}^D(\mathbf{x}) = -G_D \Delta_2 \iint_{S_{01}} \alpha_{j1}^D(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} - \delta_{DB} G_B \Delta_2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|},$$

$$\sigma_{j3}^C(\mathbf{x}_0) = -G_C \Delta_2 \sum_{i=1}^2 \iint_{S_{0i}} \alpha_{ji}^C(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|}, \quad j=1, 2, \quad D = A, B, \quad (6)$$

де $\Delta_2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ – двовимірний Лапласів оператор.

На першому етапі розв’язування задачі задовольняємо крайові умови на інтерфейсних поверхнях. Використовуючи подання (5), (6) для переміщень і напружень, крайові умови (2), (3) зводимо до системи двовимірних ГР. Після застосування до них двовимірного інтегрального перетворення Фур’є за змінними x_1, x_2 систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) запишемо у матричному вигляді:

$$\left(\mathbf{a}^n \right)_{4 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_j^{nB} \\ \tilde{\alpha}_{j1}^C \\ \tilde{\alpha}_{j2}^C \\ \tilde{\alpha}_j^{nA} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_1^n \\ \frac{1}{\tau} \tilde{\Omega}_2^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = I, II. \quad (7)$$

Тут символ “ $\sim$ ” – Фур’є-трансформанта відповідної функції; параметр $n = I, II$ задає спосіб моделювання тонкого прошарку умовами (2), (3), відповідно; коефіцієнти та вільні члени (7) мають таку структуру:

$$a_{1k}^I = a_{3m}^I = 1, \quad a_{13}^I = a_{32}^I = -H(\tau), \quad a_{22}^I = a_{43}^I = G_C, \quad a_{21}^I = G_B, \quad a_{44}^I = -G_A,$$

$$a_{23}^I = -a_{42}^I = -G_C H(\tau), \quad a_{14}^{II} = a_{21}^{II} = \frac{G_C}{h}, \quad a_{11}^{II} = \tau G_B + \frac{G_C}{h},$$

$$a_{24}^{II} = \tau G_A + \frac{G_C}{h}, \quad H(\tau) = e^{-h\tau},$$

$$a_{k4}^I = a_{m1}^I = a_{ki}^{II} = a_{ml}^{II} = 0, \quad k = 1, 2, \quad i = 2, 3, \quad m = 3, 4, \quad l = \overline{1, 4},$$

$$\Omega_1^I = -\frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|}, \quad \Omega_2^I = G_B \Delta_2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|},$$

$$\Omega_1^{II} = \Omega_2^I + \Omega_2^{II}, \quad \Omega_2^{II} = \frac{G_C}{h} \Omega_1^I.$$

Для півпростору B з тріщиною розв’язки СЛАР (7) такі:

$$\tilde{\alpha}_j^{nB} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\Delta_n} \sum_{k=1}^2 b_k^n \tilde{\Omega}_k^n, \quad n = I, II, \quad (8)$$

де

$$b_1^I = -G_C [(G_A + G_C) - (G_A - G_C) H^2(\tau)], \quad b_2^I = -\frac{b_1^I}{G_C \tau},$$

$$b_1^{II} = -G_A h, \quad b_2^{II} = \frac{1}{\tau} [G_A \tau h + G_C],$$

$$\Delta_I = (G_B + G_C)(G_A + G_C) - (G_B - G_C)(G_A - G_C) H^2(\tau),$$

$$\Delta_{II} = G_B G_A \tau h + G_C (G_B + G_A).$$

Застосувавши до співвідношень (8) обернене двовимірне перетворення Фур’є, одержимо вирази для оригіналів невідомих функцій α_j^{nB} на інтерфейсних поверхнях:

$$\alpha_j^{nB}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^2 \iint_{S_{01}} \int_0^\infty \tau \frac{b_k^n \Omega_k^n}{\Delta_n(\tau)} J_0(\tau|\xi - \eta|) d\tau dS_\eta. \quad (9)$$

Тут $J_0(z)$ – Бесселева функція першого роду нульового порядку дійсного аргументу z . Вирази (9) описують густини α_j^{nB} через невідомі функції стрибків зсуву поверхонь тріщини Δu_j , які містяться в структурі ядер Ω_k^n .

На другому етапі розв'язування задачі задовольняємо крайові умови в області розташування дефекту. З використанням подань (6) крайові умови (4) трансформуємо у систему двох двовимірних ГІР виду

$$-G_B \Delta_2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|} - G_B \Delta_2 \iint_{S_{01}} \alpha_j^{nB}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} = (-1)^{j+1} \frac{x_{3-j}}{a} N_0, \quad j=1, 2, \quad n=I, II, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (10)$$

Підставивши сюди подання (9), взявши до уваги співвідношення $\Delta_2 J_0(\tau|\mathbf{x} - \xi|) = -\tau^2 J_0(\tau|\mathbf{x} - \xi|)$ та скориставшись методикою аналітичного обчислення двовимірних інтегралів по безмежних інтерфейсах [18], остаточно отримаємо:

$$\Delta_2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|} - \iint_S \Delta u_j(\xi) \int_0^\infty \tau^2 \frac{M_n(\tau)}{\Delta_n(\tau)} e^{-2d\tau} J_0(\tau|\mathbf{x} - \xi|) d\tau dS_\xi = \frac{1}{G_B} (-1)^j \frac{x_{3-j}}{a} N_0, \quad j=1, 2, \quad n=I, II, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (11)$$

Підінтегральні ядра рівнянь описують вирази

$$M_I(\tau) = (G_A + G_C)(G_B - G_C) - (G_A - G_C)(G_B + G_C) H^2(\tau),$$

$$M_{II}(\tau) = G_B G_A \tau h + G_C (G_B - G_A).$$

ГІР (11) для невідомих функцій стрибків тангенційних зміщень поверхонь тріщини не містять інтегрування по інтерфейсних поверхнях, що актуально для їх розв'язування числовими методами. Півбезмежний інтеграл характеризує вплив на тріщину всіх складників композиту та інтерфейсів.

Гіперсингулярне ядро ГІР виділяємо диференціюванням першого доданку:

$$\Delta_2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|} = \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|^3}.$$

Далі ГІР регуляризуємо за числово-аналітичним підходом [10] та подаємо невідомі густини Δu_j у вигляді

$$\Delta u_j(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \beta_j(\mathbf{x}),$$

де $\beta_j(\mathbf{x})$ – невідомі, обмежені та двічі неперервно-диференційовні в області S тріщини функції. Для числового розв'язування рівняння (11) кругову область тріщини в полярній системі координат покривали сіткою чотирикутних граничних елементів, у межах кожного з яких значення функцій $\beta_j(\mathbf{x})$ вважали кусково-сталими. Кроки розбиття за радіальною r і кутовою ϕ координатами становили $0,05a$ і $\pi/24$, відповідно. Для обчислення півбезмежного інтеграла задіяли Лагеррові квадратури. Рівняння (11) звели до розв'язування СЛАР для дискретних значень $\beta_j(\mathbf{x})$, за допомогою яких визначали статичний коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) поздовжнього зсуву на контурі тріщини:

$$K_{III}(\varphi) = -2G\pi\sqrt{\pi a} [\beta_1(a, \varphi) \sin \varphi - \beta_2(a, \varphi) \cos \varphi].$$

Аналіз числових результатів. На рис. 2 побудовано залежності нормованих амплітуд КІН $\bar{K}_{III} = K_{III}/K_{III}^*$ ($K_{III}^* = (4/3)\sqrt{a/\pi} N_0$ – статичний КІН поздовжнього зсуву для кругової тріщини закруту у безмежному однорідному тілі [19]) у композиті з ідеально з'єднаних прошарком півпросторів (випадок І) від параметрів контрастності жорсткостей матеріалів композиту та глибини залягання тріщини за фіксованої товщини прошарку $h/a = 0,1$.

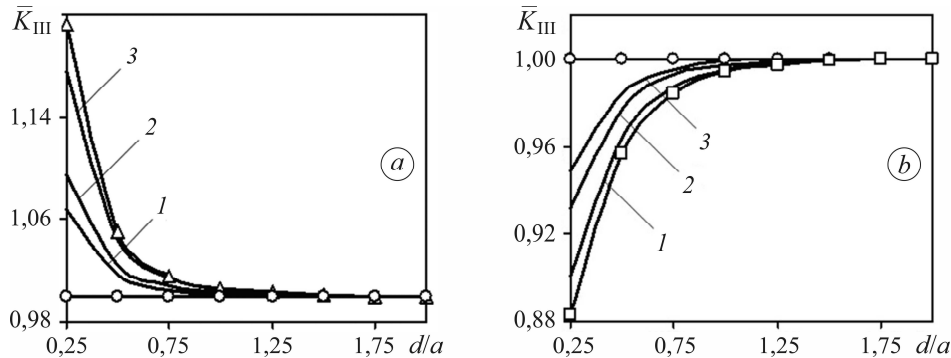


Рис. 2. Залежність нормованих значень КІН $\bar{K}_{III}$ від параметрів контрастності жорсткостей $G_1 = G_C/G_B$, $G_2 = G_B/G_A$ матеріалів композиту та глибини d/a

залягання тріщини за фіксованої товщини прошарку $h/a = 0,1$:

○ – тріщина у безмежному однорідному тілі; △, □ – у півпросторах з вільною та защемленою поверхнями; а – $G_1 = 0,1$; б – 10; 1 – $G_2 = 0,05$; 2 – 1; 3 – 20.

Fig. 2. Dependences of the normalized value SIF $\bar{K}_{III}$ on the values of rigidity $G_1 = G_C/G_B$,

$G_2 = G_B/G_A$ of the materials of composite and normalized depth d/a of the crack

for a fixed thickness of the interlayer $h/a = 0.1$: ○ – crack in an infinite homogeneous body;

△, □ – crack in a halfspace with free and fixed surfaces;

$a - G_1 = 0.1$; $b - 10$; $1 - G_2 = 0.05$; $2 - 1$; $3 - 20$.

Виявили, що для тріщини у жорсткішому (рис. 2а, $G_1 = 0,1$) та податливішому (рис. 2б, $G_1 = 10$) порівняно з прошарком складнику композиту зростання параметра $G_2 = G_B/G_A$ контрастності жорсткостей матеріалів півпросторів супроводжується збільшенням значень КІН $\bar{K}_{III}$. Водночас подані графіки обмежені зверху/знизу своїми аналогами для безмежного однорідного тіла та півпростору. Збільшення глибини залягання дефекту супроводжується зменшенням значень КІН. Якщо $d/a > 1,5$, вплив контрастності матеріалів композиту можна знехтувати. Для однакових матеріалів півпросторів (криві 2 для $G_2 = 1$) вплив тонкого прошарку проявляється як у перевищенні (рис. 2а), так і зменшенні (рис. 2б) значень $\bar{K}_{III}$ проти таких для безмежного однорідного тіла.

Рис. 3 описує залежності КІН $\bar{K}_{III}$ від параметрів контрастності жорсткостей матеріалів композиту та товщини прошарку за фіксованої глибини залягання тріщини у нижньому півпросторі $d/a = 0,25$. Зі збільшенням товщини прошарку h/a графіки для $\bar{K}_{III}$ (суцільні лінії) наближаються до таких для двох ідеально

з'єднаних півпросторів. Якщо $h/a \geq 1$, то вплив верхнього півпростору A на КІН можна знехтувати. Встановили, що після апроксимації тонкого прошарку пружинними умовами контакту (штрихові лінії) похибка результатів не перевищує 5% не лише для податливого до обох півпросторів (криві 1, 2 на рис. 3а), але й для податливого до одного з них прошарку (крива 3 на рис. 3а та крива 1 на рис. 3б). Точність результатів при цьому зростає зі зменшенням товщини прошарку.

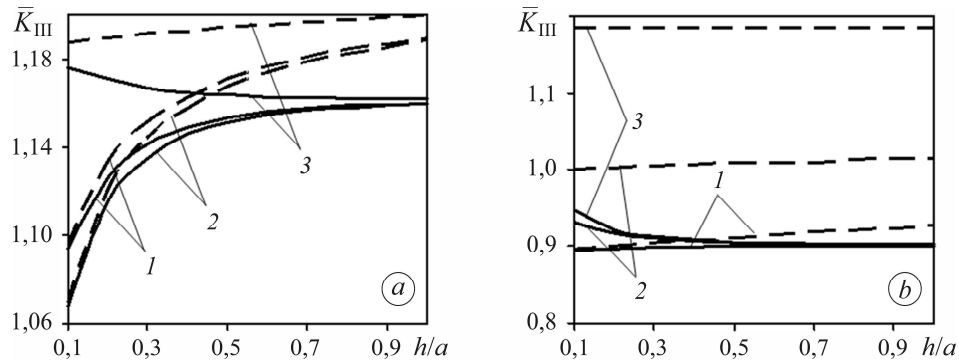


Рис. 3. Залежність нормованих значень КІН $\bar{K}_{III}$ від параметрів контрастності жорсткостей $G_1 = G_C/G_B$, $G_2 = G_B/G_A$ матеріалів композиту та товщини прошарку h/a за фіксованої глибини залягання тріщини $d/a = 0,25$: суцільні лінії – точне моделювання прошарку з урахуванням геометричних розмірів; штрихові – моделювання фізичною площиною з пружинними умовами контакту на ній;
а – $G_1 = 0,1$; б – $G_1 = 0,05$; 1 – $G_2 = 0,05$; 2 – 1; 3 – 20.

Fig. 3. Dependences of the normalized value SIF $\bar{K}_{III}$ on the values of rigidity $G_1 = G_C/G_B$, $G_2 = G_B/G_A$ of the materials of composite and normalized thickness interlayer h/a for a fixed depth $d/a = 0.25$ of the crack: solid lines – accurate modeling of the interlayer taking into account the geometric dimensions; dashed lines – modeling of the interlayer by a physical plane with spring boundary conditions on it;
a – $G_1 = 0.1$; b – $G_1 = 0.05$; 1 – $G_2 = 0.05$; 2 – 1; 3 – 20.

ВИСНОВКИ

Методом граничних інтегральних рівнянь розв'язано задачу про тріщину закруту в композиті з двох півпросторів, спряжених тонким прошарком іншої контрастності. Встановлено, що залежно від контрастності жорсткостей матеріалів прошарок може як підвищувати, так і знижувати коефіцієнти інтенсивності напружень повздовжнього зсуву порівняно з біматеріалом із двох ідеально спряжених півпросторів. Встановлено обставини, за яких з достатньою для числових розрахунків точністю прошарок можна змодельовати фізичною площиною зі заданими на ній пружинними умовами контакту.

1. Karan S., Basu S., and Mandal S. C. Impact of a torsional load on a penny-shaped crack sandwiched between two elastic layers embedded in an elastic medium // Acta Mech. – 2017. – **229**, № 4. – P. 1759–1772.
2. Sih G. C. and Chen E. P. Torsion of laminar composite debonded over a penny-shaped area // J. of the Franklin Institute. – 1972. – **293**, № 4. – P. 251–261.
3. Sih G. C. and Chen E. P. Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-shaped cracks // Int. J. Solids and Struct. – 1980. – **16**, № 12. – P. 1093–1107.

4. Stress intensity factors for penny-shaped cracks perpendicular to graded interfacial zone of bonded bi-materials / H. T. Xiao, Z. Q. Yue, L. G. Tham, and Y. R. Chen // *Eng. Fract. Mech.* – 2005. – **72**. – P. 121–143.
5. Investigation of the initial stage of fracture of a piecewise homogeneous body with interface crack compressed along the interface / A. O. Kamins'kyi, M. V. Dudyk, Yu.V. Reshitnyk, and V. M. Fen'kiv // *J. Math. Sci.* – 2023. – **273**, № 6. – P. 1016–1030.
6. SH-wave diffraction from a thin interface defect of finite width in the joint of an elastic layer with a half-space / D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk, M. V. Voytko, Ya. P. Kulynych // *Materials Science.* – 2023. – **58**, № 6. – P. 701–708.
7. Madani F. and Kebli B. Axisymmetric torsion of an elastic layer sandwiched between two elastic half-spaces with two interfaced cracks // *Studia Geotech. et Mech.* – 2019. – **41**, № 2. – P. 122–135.
8. Men'shikov V. O., Men'shikov O. V., and Kladova O. Yu. Interfacial crack with frictionless and frictional contact of faces in a bimaterial under a shear wave // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**. – P. 102–110.
9. Piskozub Y., Piskozub L., and Sulym H. Effect of the transverse functional gradient of the thin interfacial inclusion material on the stress distribution of the bimaterial under longitudinal shear // *Materials.* – 2022. – **15**, № 23. – Article number 8591. <https://doi.org/10.3390/ma15238591>
10. Mykhas'kiv V. and Stankevych V. Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* – 2019. – **99**, № 5. – Article number e201800193. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800193>
11. Effective spring stiffness for a planar periodic array of collinear cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials / H. Lekesiz, N. Katsube, S. I. Rokhlin, and R. R. Seghi // *Mech. Mater.* – 2011. – **43**. – P. 87–98.
12. Experimental validation of the applicability of effective spring boundary conditions for modelling damaged interfaces in laminate structures / M. V. Golub, O. V. Doroshenko, M. V. Wilde, and A. A. Eremin // *Compos. Struct.* – 2021. – **273**. – Article number 114141. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114141
13. Sylovanyuk V. P., Ivantyshyn N. A., and Kuz' O. N. Conditions for the jump of stresses and displacements on thin anisotropic interlayers and inclusions in continuous media // *Materials Science.* – 2018. – **54**, № 3. – P. 349–353.
14. Golub M. V., Doroshenko O. V., and Gu Y. Effective boundary conditions and stochastic crack distribution for modelling guided waves scattering by a partially closed interfacial delamination in a laminate // *Materials.* – 2023. – **16**, № 6. – Article number 2415. <https://doi.org/10.3390/ma16062415>
15. Stankevych V. Z., Boiko V. M., and Tereshchak Yu. V. Steady vibrations of an elastic bimaterial with a thin compliant layer and a circular crack // *Materials Science.* – 2022. – **58**, № 3. – P. 377–384.
16. Stankevych V. Z. Analysis of 3D problems of dynamic loading of elastic piecewise-homogeneous bodies with internal cracks // *J. Math. Sci.* – 2023. – **274**, № 5. – P. 641–659.
17. Stress intensity factors and T-stresses by boundary integral equations: 3D statics / J. J. Yang, J. Z. Liu, J. Sladek, V. Sladek, and P. H. Wen // *Eng. Fract. Mech.* – 2021. – **256**. – Article number 107917. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107917>
18. Stankevich V. Z. Computation of certain double integrals those are characteristic of dynamic problems of the theory of cracks in a semi-infinite body // *J. Math. Sci.* – 1996. – **81**, № 6. – P. 3048–3052.
19. Kassir M. K. and Sih G. C. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1975. – 506 p.

Одержано 20.12.2023