

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ ТА ГРАНИЧНИЙ СТАНИ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ТІЛА ІЗ ЗАЛІКОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ

В. П. СИЛОВАНЮК, Н. А. ІВАНТИШИН, А. І. ДІДУХ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

У межах механіки крихкого руйнування матеріалів з початковими напруженнями розглянуто проблему заліковування плоскої тріщини за допомогою ін'єкційних технологій. За використання інтегральних перетворень Фур'є отримано сингулярні інтегральні рівняння щодо функцій стрибка переміщень на поверхнях заповненої тріщини. Одержано точний розв'язок відповідного рівняння за еліптичної тріщини в площині нормального відриву. Залишкову міцність тіла із залікованою тріщиною розраховували за критерієм Ірвіна. Встановлено параметри, від яких залежить ефективність відновлення міцності попередньо напруженого тіла з тріщиною.

Ключові слова: *ізотропне тіло, попередньо напружене тіло, заліковування тріщин, міцність матеріалу.*

The problem of healing a plane crack using injection technology is considered within the framework of brittle fracture mechanics of materials with initial stresses. With the use of integral Fourier transforms, singular integral equations are obtained with respect to the functions of displacements jump on the surfaces of the filled crack. The exact solution of the corresponding equation in the case of an elliptical crack in the normal opening displacement plane is obtained. The residual strength of the body with a healed crack is calculated according to the Irwin criterion. The parameters on which the effectiveness of restoring the strength of a prestressed body with a crack depends, were established.

Keywords: *isotropic body, prestressed body, crack healing, material strength.*

Вступ. Ідея заліковування тріщин у твердих тілах знайшла практичне втілення під час відновлення пошкоджених бетонних і залізобетонних споруд тривалої експлуатації [1, 2], виробів із полімерів та композитів на їх основі. Її суть полягає у нагнітанні у зони пошкоджень об'єктів рідинних матеріалів, здатних тверднути після полімеризації чи кристалізації. В результаті заповнення дефектів елемент конструкції зміцнюється і внаслідок цього відновлюється його здатність нести експлуатаційні навантаження.

Для надійної експлуатації відновлених об'єктів, встановлення їх залишкового ресурсу на основі концепцій механіки руйнування будують розрахункові моделі заліковування [2, 3]. Такі дослідження виконані для ізотропних [2] та анізотропних [3] матеріалів.

Нижче в межах лінеаризованої теорії пружності тіл із початковими напруженнями [4–6] розглянемо особливості заліковування тріщин за дії додаткових зусиль розтягу-стиску високої інтенсивності вздовж дефектів.

Основні співвідношення лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями [4]. За відсутності об'ємних сил загальний розв'язок рівнянь рівноваги лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями виражаємо через дві функції Ψ і χ , які задовольняють рівняння

$$\left(\Delta + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi = 0; \quad \left(\Delta + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi = 0. \quad (1)$$

Величини $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2$ є коренями відповідного характеристичного рівняння і залежать від модулів пружності та параметрів попередньої деформації тіла. Використовуватимемо позначення, введені у праці [4]. Для рівних $(\xi_2^2 = \xi_3^2)$ і нерівних коренів $(\xi_2^2 \neq \xi_3^2)$ можливі подання загального розв'язку через три гармонічні функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Для нерівних коренів вводимо заміну

$$\begin{aligned} \Psi &= -\varphi_3, \quad -\frac{\partial}{\partial y_3} \chi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \xi_1^2 = n_3, \\ \xi_2^2 &= n_1, \quad \xi_3^2 = n_2, \quad z_j = \frac{y_3}{\sqrt{n_j}}, \quad j=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Компоненти векторів переміщень u_j і напружень $\tilde{Q}_{3j}$ через функції φ_j виражаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1} (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\partial}{\partial y_2} \varphi_3; \quad u_2 = \frac{\partial}{\partial y_2} (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\partial}{\partial y_1} \varphi_3; \\ u_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1 + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_2; \\ \tilde{Q}_{33} &= C_{44} \left[(1+m_1) l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_1 + (1+m_2) l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \varphi_2 \right]; \\ \tilde{Q}_{31} &= C_{44} \left[\frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1 \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_1 \partial z_2} - \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_2 \partial z_3} \right]; \\ \tilde{Q}_{32} &= C_{44} \left[\frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_2 \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_2 \partial z_2} - \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_1 \partial z_3} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, як бачимо зі співвідношень (1), (2), гармонічні в різних системах координат, тобто

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) \varphi_j = 0, \quad j=1, 2, 3. \quad (4)$$

Коефіцієнти m_j, C_{44}, l_j визначають окремо для стисливих і нестисливих тіл. Вони залежать від модулів пружності і параметрів початкового напружено-деформованого стану і наведені раніше [4].

Для рівних коренів $(\xi_2 = \xi_3)$ вводять заміни

$$\begin{aligned} \Psi &= -\varphi_3; \quad -\frac{\partial \chi_{(2)}}{\partial y_3} = \varphi_1; \quad -\chi_{(3)} = \varphi_2; \\ \xi_1^2 &= n_3; \quad \xi_2^2 = \xi_3^2 = n_1; \quad z_j = y_3 / \sqrt{n_j}, \end{aligned} \quad (5)$$

що дає змогу отримати компоненти векторів переміщень і напружень у вигляді

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial z_1} \varphi_2 - \frac{\partial}{\partial y_2} \varphi_3; \\
u_2 &= \frac{\partial}{\partial y_2}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial z_1} \varphi_2 - \frac{\partial}{\partial y_1} \varphi_3; \\
u_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1 + z_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_2 \right) + \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_2; \\
Q_{33} &= C_{44} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} [(1 + m_1) l_1 \varphi_1 + (1 + m_2) l_2 \varphi_2] + (1 + m_1) l_1 z_1 \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} \varphi_2 \right\}; \\
Q_{31} &= C_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial z_1} [(1 + m_1) \varphi_1 + (1 + m_2) \varphi_2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + m_1)}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial z_1^2} \varphi_2 - \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial z_3} \varphi_3 \right\}; \\
Q_{32} &= C_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial z_1} [(1 + m_1) \varphi_1 + (1 + m_2) \varphi_2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3}{\partial y_2 \partial z_1^2} \varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial z_3} \varphi_3 \right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Наведені подання загального розв'язку рівнянь рівноваги у вигляді (3), (6) служать основою для розв'язку крайових задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями.

Формулювання задачі. Розглянемо необмежене пружне ізотропне тіло з пружним потенціалом довільної форми. Початковий напружений стан у тілі вважаємо однорідним і таким, що виражається компонентами симетричного тензора напружень $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$, $S_0^{33} = 0$ або коефіцієнтами видовження $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ вздовж осей Oy_j ($j = 1, 2, 3$) декартової системи координат, введеної в початковому напруженому стані. Припускати-мемо, що в площині $y_3 = 0$ пружного середовища є тріщина, яка займає плоску область Ω . Для відновлення ресурсу міцності тріщину заповнено рідким ін'єкційним матеріалом, який через певний час полімеризується чи кристалізується, склеюючи її береги. Внаслідок незначного розкриття тріщини важко на практиці заповнити весь її об'єм, тому приймаємо, що частина тріщини ($\Omega - \Omega_i$) залишається незаповненою (рис. 1). До тіла прикладені додаткові зовнішні зусилля, які за відсутності тріщини викликали б в однорідному тілі в площині $y_3 = 0$ компоненти напружень $\tilde{Q}_{3j}$.

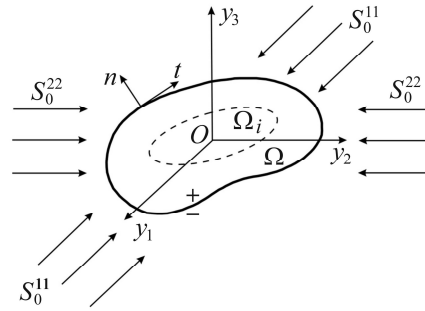


Рис. 1. Плоска тріщина у попередньо напруженому тілі.

Fig. 1. A plane crack in a prestressed body.

Взаємодію поверхонь тріщини з ін'єкційним матеріалом у зоні склеювання подамо відповідно до гіпотези про пружну основу типу Вінклера

$$\sigma_{31}^* = \frac{[u_1]}{2h} \mu, \quad \sigma_{32}^* = \frac{[u_2]}{2h} \mu, \quad \sigma_{33}^* = \frac{[u_3]}{2h} E. \quad (7)$$

Тут μ , E – модулі зсуву і Юнга матеріалу наповнювача після тверднення; $[u_j]$ – стрибки компонент вектора переміщень на поверхнях тріщини; $2h$ – початкове розкриття тріщини до прикладання навантаження.

Інтегральні рівняння задачі. За принципом суперпозиції напружений стан у тілі подамо як суму напружених станів тіла без тріщини (вважаємо його відомим) і з тріщиною, до поверхонь якої прикладені зусилля

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{3j}^\pm &= \sigma_{3j}^* - \tilde{Q}_{3j}^0, \quad \forall (y_1, y_2) \in \Omega_i, \\ \tilde{Q}_{3j}^\pm &= -\tilde{Q}_{3j}^0, \quad \forall (y_1, y_2) \in \Omega - \Omega_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Знаки (+) і (–) вказують на верхню ($y_3 > 0$) і нижню ($y_3 < 0$) поверхні тріщини, відповідно.

Оскільки функції ϕ_j гармонічні в різних системах координат, тобто задовольняють рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) \phi_j = 0, \quad (9)$$

то, застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (9), виразимо функції ϕ_j у вигляді інтегрального подання Фур'є

$$\phi_j(y_1, y_2, z_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_j(x_1, x_2) \exp\left(-|z_j| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + i(y_1 x_1 + y_2 x_2)\right) \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (10)$$

де $A_j(x_1, x_2)$ – невідомі функції.

Для їх встановлення використаємо умови неперервності переміщень $\vec{u}$ поза тріщиною у площині $y_3 = 0$ та їх стрибок $[\vec{u}]$ в області Ω . На основі оберненого перетворення Фур'є отримуємо залежності для знаходження A_j через стрибки переміщень $[\vec{u}]$:

за нерівних коренів ($n_1 \neq n_2$)

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1+m_k}{2} \left\{ \frac{(-1)^j i (x_1 F([u_1]) + x_2 F([u_2]))}{(1+m_2)l_2 - (1+m_1)l_1} + \frac{(-1)^j \sqrt{n_j(x_1^2 + x_2^2)} F([u_3])}{m_2 - m_1} \right\}, \\ A_3 &= \frac{1}{2} \left\{ ix_2 F([u_1]) - ix_1 F([u_2]) \right\} \quad j=1, 2; \quad k=1; \quad j=2; \quad k=2; \quad j=1; \end{aligned} \quad (11)$$

за рівних коренів ($n_1 = n_2$)

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{(-1)^j (1+m_k)}{2} \left\{ \frac{l_k i (x_1 F([u_1]) + x_2 F([u_2]))}{(1+m_2)l_2 - (1-m_1)l_1} + \frac{\sqrt{n_1(x_1^2 + x_2^2)} F([u_3])}{m_2 - m_1 - 1} \right\}, \\ A_3 &= \frac{1}{2} \left\{ ix_2 F([u_1]) - ix_1 F([u_2]) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$F([u_j]) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} [u_j] \exp(-i(y_1 x_1 + y_2 x_2)) dy_1 dy_2.$$

На основі крайових умов (8) та співвідношень (3), (6), (10)–(12) одержуємо інтегральні рівняння для визначення стрибків функції переміщень $[u_j]$:

$$\begin{aligned} & B_1 \frac{\partial}{\partial y_j} \iint_{\Omega} \frac{[u_1](y_1 - y'_1) + [u_2](y_2 - y'_2)}{R^3} dy'_1 dy'_2 + \\ & + (-1)^j B_2 \frac{\partial}{\partial y_{3-j}} \iint_{\Omega} \frac{[u_1](y_2 - y'_2) + [u_2](y_1 - y'_1)}{R^3} dy'_1 dy'_2 = \\ & = 2\pi \begin{cases} \frac{[u_j] \mu}{2h} - \hat{Q}_{3j}^0, & \forall (y_1, y_2) \in \Omega_i, \\ -\hat{Q}_{3j}^0, & \forall (y_1, y_2) \in \Omega - \Omega_i, \end{cases} \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

$$B_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \iint_{\Omega} \frac{[u_3] dy'_1 dy'_2}{R} = 2\pi \begin{cases} \frac{[u_3] E}{2h} - \hat{Q}_{33}^0, & \forall (y_1, y_2) \in \Omega_i, \\ -\hat{Q}_{33}^0, & \forall (y_1, y_2) \in \Omega - \Omega_i. \end{cases}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(y_1 - y'_1)^2 + (y_2 - y'_2)^2}, \\ B_1 &= \begin{cases} \frac{C_{44}(1+m_1)(1+m_2)}{l_2(1+m_2) - l_1(1+m_1)} \left(\frac{l_2}{\sqrt{n_1}} - \frac{l_1}{\sqrt{n_2}} \right), & n_1 \neq n_2, \\ \frac{C_{44}(1+m_1)(1+m_2)(l_2 - l_1)}{(l_2(1+m_2) - l_1(1+m_1))\sqrt{n_1}}, & n_1 = n_2, \end{cases} \\ B_2 &= C_{44} / \sqrt{n_3}, \\ B_3 &= \begin{cases} \frac{C_{44}(1+m_1)(1+m_2)(l_2\sqrt{n_2} - l_1\sqrt{n_1})}{m_2 - m_1}, & n_1 \neq n_2, \\ \frac{C_{44}(1+m_1)(1+m_2)(l_2 - l_1)\sqrt{n_1}}{m_2 - m_1 - 1}, & n_1 = n_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, задачу про пружну рівновагу попередньо напруженого тіла із залікованою тріщиною звели до знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь (13). Гранично-рівноважний стан тіла можна встановити, наприклад, за силовим критерієм Ірвіна, розрахувавши коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Ці коефіцієнти можна обчислити безпосередньо через стрибки переміщень берегів тріщини

$$\begin{aligned} K_I &= B_3 \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{-\frac{\pi}{8n}} [u_3], & K_{II} &= B_1 \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{-\frac{\pi}{8n}} [u_n], \\ K_{III} &= B_2 \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{-\frac{\pi}{8n}} [u_t], \end{aligned} \quad (15)$$

де n, t – зовнішня нормаль і дотична до контуру тріщини, відповідно (див. рис. 1).

Еліпсоїдальний тріщиноподібний дефект. Нехай еліптична в плані тріщина міститься в площині $y_3 = 0$ поперечно напруженого тіла. За одновісного розтягу зусиллями інтенсивності σ^∞ перпендикулярно до площини тріщини, коефіцієнт інтенсивності напружень, як зазначено у праці [4], збігається з КІН для тіла без початкових напружень [7]

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi b} \sigma^\infty}{\sqrt{a} E(k)} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}. \quad (16)$$

Тут a, b – півосі еліпса $y_1^2/a^2 + y_2^2/b^2 = 1$; $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду; $k = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$; φ – кут, що визначає параметричні координати точки на контурі тріщини (рис. 2).

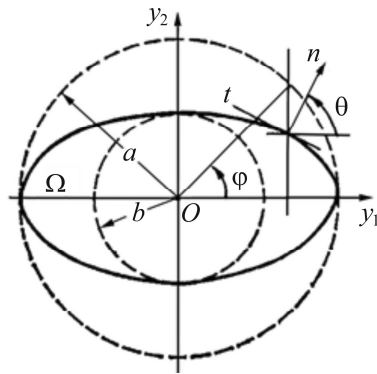


Рис. 2. Системи координат контуру еліптичної тріщини.

Fig. 2. Elliptical crack contour coordinate systems.

Згідно зі силовим критерієм Ірвіна, міцність такого тіла

$$\sigma_c = \frac{K_{IC} E(k)}{\sqrt{\pi b}}. \quad (17)$$

Зазначимо, що параметр тріщиностійкості матеріалу K_{IC} може відрізнятися від випадку, коли початкові напруження відсутні.

Для тріщини, заповненої у всьому об'ємі, систему інтегральних рівнянь (13) зводимо до одного рівняння

$$B_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \iint_{\Omega} \frac{[u_3] dy'_1 dy'_2}{R} = 4\pi \left(-\sigma^\infty + \frac{[u_3] E}{2h} \right). \quad (18)$$

Його розв'язок має вигляд

$$[u_3(y_1, y_2)] = \frac{b \sigma^\infty}{\beta E + B_3 E(k)} \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2}}, \quad \beta = a/c. \quad (19)$$

Тут c – мала піввісь еліпсоїда $y_1^2/a^2 + y_2^2/b^2 + y_3^2/c^2 = 1$, $c \ll a, b$.

Звідси на основі першого зі співвідношень (15) отримуємо формулу для обчислення КІН на контурі залікованої тріщини

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi b} \sigma^\infty B_4}{\sqrt{a} (\beta E + B_4 E(k))} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}. \quad (20)$$

За критерієм Ірвіна міцність поперечно напруженого тіла із залікованою еліптичною тріщиною

$$\sigma_c^i = \frac{K_{IC}E(k)}{\sqrt{\pi b}} \left(1 + \frac{\beta E}{B_3 E(k)} \right). \quad (21)$$

З отриманої залежності та формули (17) видно, що початкові напруження можуть суттєво впливати на ефективність заліковування тріщини, що відображено параметром B_3 . Розтяг у площині тріщини сприятиме зміцненню тіла, і навпаки, стиск послаблюватиме. Краще заліковуються дефекти з меншим розкриттям (більшим параметром β). Ін'єкційний матеріал з більшою жорсткістю після тверднення сприяє ліпшому заліковуванню тіла.

ВИСНОВКИ

У межах механіки крихкого руйнування матеріалів з початковими напруженнями розглянуто проблему заліковування плоскої тріщини за технологією ін'єктування. За використання інтегральних перетворень Фур'є отримано сингулярні інтегральні рівняння щодо функцій стрибків переміщень на поверхнях заповненої тріщини. За еліптичної в плані тріщини нормального відриву одержано точний розв'язок відповідного рівняння. За критерієм Ірвіна розрахована залишкова міцність тіла із залікованою тріщиною. Встановлені параметри, від яких залежить ефективність відновлення міцності попередньо напруженого тіла з тріщиною.

1. *Czarnecki L. and Emmons P. H.* Naprawa i ochrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 s.
2. *Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P.* Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Dordrecht–Heidelberg–New York–London: Springer, 2014. – 230 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-7908-2>
3. *Sylovanyuk V. P. and Ivantyshyn N. A.* Healing of Cracks in Anisotropic Bodies // *Mater. Sci.* – 2020. – 55, № 6. – P. 804–811. <https://doi.org/10.1007/s11003-020-00373-6>
4. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
5. *Гузь А. Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с.
6. *Гузь А. Н., Ключников Ю. В.* Пространственная статическая задача для эллиптической трещины в упругом теле с начальными напряжениями // *Прикл. механика.* – 1984. – 20, № 10. – С. 22–31. <https://doi.org/10.1007/BF00890412>
7. *Kassir M. K. and Sih G. C.* Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings // *Trans. ASME E.* – 1966. – 33, № 3. – P. 601–611.

Одержано 20.12.2023