

УДК 539.3

ВПЛИВ ФОРМИ ТА РОЗТАШУВАННЯ ОРТОТРОПНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

В. С. КРАВЕЦЬ, М. П. САВРУК, Л. Й. ОНИШКО, О. І. КВАСНЮК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Досліджено напружений стан нескінченного анізотропного тіла (матриці) з гладким криволінійним ортотропним включенням за поздовжнього зсуву. Двовимірну задачу теорії пружності для кусково-однорідного анізотропного тіла зведено до системи двох дійсних сингулярних інтегральних рівнянь другого роду, числові розв'язки отримано методом квадратур. Показано вплив форми та розташування ортотропного включення на напружений стан кусково-однорідного тіла для низки значень пружних сталей ортотропних матеріалів матриці та включення. Проаналізовано знайдені розподіли напружень поздовжнього зсуву на межі розділу матеріалів для різних геометричних та механічних параметрів задачі.

Ключові слова: *антиплоска деформація, анізотропія, ортотропне включення, концентрація напружень, сингулярні інтегральні рівняння.*

The stress state of an infinite anisotropic body (matrix) with a smooth curvilinear orthotropic inclusion under longitudinal shear was studied. The two-dimensional problem of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous anisotropic body is reduced to a system of two real singular integral equations of the second kind, the numerical solutions of which are obtained by the quadrature method. The influence of the shape and location of the orthotropic inclusion on the stress state of a piecewise homogeneous body for a some series of values of elastic constant orthotropic materials of the matrix and inclusion is defined. The found distributions of longitudinal shear stresses at the interface of materials for various geometric and mechanical parameters of the problem were analyzed.

Keywords: *antiplane deformation, anisotropy, orthotropic inclusions, stress concentration, singular integral equations.*

Вступ. Багатоваріантність композитних матеріалів, які здебільшого моделюють кусково-однорідними анізотропними тілами [1–4], не дає змоги однозначно оцінити напружені стани таких тіл через велику кількість різноманітних впливів механічних та геометричних параметрів відповідних задач теорії пружності. Деякі результати розподілів напружень по контурах розмежування анізотропних матеріалів у кусково-однорідних тілах отримано для окремих параметрів таких задач за плоскої [1, 3, 5, 6] та антиплоскої [3, 4, 7] деформацій.

Нижче одержано та проаналізовано низку розв'язків антиплоскої задачі теорії пружності для нескінченного анізотропного тіла (матриці) з тунельним вздовж осі деформації гладким криволінійним ортотропним включенням. Отримані результати є продовженням досліджень попередньої праці [7], де побудовано сингулярні інтегральні рівняння (СІР) відповідної задачі для скінченної кількості таких включень і на основі методу квадратур розроблено методику числового розв'язування систем СІР другого роду. Досліджено вплив на напружений стан кусково-однорідного анізотропного тіла форм контурів включень, пружних

сталих ортотропних матеріалів, а також орієнтацій їх осей ортотропії відносно заданої площини поздовжнього зсуву матриці на нескінченності.

Формулювання задачі. Розглянемо двовимірну задачу теорії пружності за антиплоскої деформації кусково-однорідного анізотропного тіла – нескінченної анізотропної матриці S_0 з криволінійним у площині (x, y) та тунельним вздовж осі деформації Oz у введений декартовій системі координат (x, y, z) анізотропним включенням S_1 . Уважатимемо, що механічний контакт між матрицею та включенням на його гладкому замкненому контурі L є ідеальним, тобто виконуються крайові умови для нормальної компоненти зсувного напруження τ_{nz} та переміщення w :

$$\tau_{nz}^+(t) = \tau_{nz}^-(t); \quad w^+(t) = w^-(t); \quad t \in L. \quad (1)$$

Тут верхні індекси вказують на граничні значення відповідних величин за підходу до контуру L зліва (+) або справа (–) за його обходу проти годинникової стрілки. Матриця S_0 на нескінченності знаходиться під дією поздовжнього зсуву напруженнями

$$\tau_{yz}^\infty(x, y) = \tau, \quad \tau_{xz}^\infty(x, y) = 0. \quad (2)$$

Задачу з крайовими умовами (1) розв'язано методом СІР [7, 8]. Напружено-деформований стан кусково-однорідного анізотропного тіла $S = S_0 \cup S_1$ описують комплексні потенціали (КП) $\varphi_3^j(z_3^j)$ та $\Phi_3^j(z_3^j) = d\varphi_3^j(z_3^j) / dz_3^j$, $j = 0; 1$ [1, 7]:

$$w(x, y) = a_j \operatorname{Im}[\varphi_3^j(z_3^j)], \quad z = x + iy \in S_j, \quad (3)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_3^j(z_3^j)], \quad \tau_{xz}(x, y) = -\operatorname{Re}[\mu_3^j \Phi_3^j(z_3^j)],$$

$$\tau_{nz}(t) = -\operatorname{Re}\left[\Phi_3^j(t_3^j) dt_3^j / ds\right], \quad t \in L, \quad t_3^j = \operatorname{Re}(t) + \mu_3^j \operatorname{Im}(t) \in L_3^j, \quad (4)$$

$$\tau_{sz}(t) = \operatorname{Re}\left[\Phi_3^j(t_3^j)\{(1 - i\mu_3^j)dt / ds - (1 + i\mu_3^j)d\bar{t} / ds\} / 2i\right]. \quad (5)$$

Подані тут співвідношення записані у комплексних математичних площинах $z_3^j = x + \mu_3^j y$ для областей матриці ($j = 0$; $z \in S_0$) та включення ($j = 1$; $z \in S_1$);

$$\mu_3^j = \alpha_3^j + i\gamma_3^j, \quad \alpha_3^j = a_{45}^j / a_{55}^j, \quad \gamma_3^j = a_j / a_{55}^j, \quad (6)$$

$a_j = \sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - a_{45}^j a_{45}^j} > 0$, $\{a_{55}^j, -a_{45}^j, a_{44}^j\} = a_j^2 \{A_{44}^j, A_{45}^j, A_{55}^j\}$ – пружні сталі анізотропних матеріалів [1] матриці та включення; s – дугова абсциса точки t на заданому гладкому контурі L в площині (x, y) . Контурам L_3^0, L_3^1 у математичних площинах z_3^0, z_3^1 відповідає контур включення L у фізичній площині $z = x + iy$. Тут і надалі величини з верхнім індексом “0” стосуються матриці S_0 , а з індексом “1” – включення S_1 . КП для областей матриці та включення шукали у вигляді [7]:

$$\begin{aligned} \varphi_3^j(z_3^j) &= \Gamma_3^j z_3^j + \frac{1}{\pi} \int_{L_3^j} \frac{\phi_3^j(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt_3^j, \quad z \in S_j, \\ \Phi_3^j(z_3^j) &= \Gamma_3^j + \frac{1}{\pi} \int_{L_3^j} \frac{\phi_3^j(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt_3^j = \Gamma_3^j + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\phi_3^j(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt, \quad z \in S_j, \quad j = 0; 1, \end{aligned} \quad (7)$$

де густини потенціалів $\phi_3^j(t_3^j) = d\phi_3^j(t_3^j) / dt_3^j$, $j=0; 1$ – невідомі комплексні функції; сталі $\Gamma_3^j = (1 + i\alpha_3^j / \gamma_3^j)\tau$ визначають однорідні напружені стани матриці ($j=0$) та включення ($j=1$) за заданого навантаження (2).

СІР задачі. Користуючись формулами Сохоцького–Племеля для інтегралів типу Коші, знайшли граничні ($z \rightarrow t \in L$) значення КП напружень (7) на контурі L зі сторони включення та матриці і за їх допомогою задовольнили першу крайову умову (1) та продиференційовану (за дуговою абсцисою s точки $t \in L$) другу умову (1). У підсумку отримано систему двох дійсних СІР 2-го роду [7]

$$A_3 \operatorname{Im}\{\phi(s)\} + \frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{Re}\{D_{11}(s, s')\phi(s') + D_{12}(s, s')\overline{\phi(s')}\} ds' = 0, \quad s = s(t), \quad t \in L;$$

$$A_3 \operatorname{Re}\{\phi(s)\} + \frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{Im}\{D_{21}(s, s')\phi(s') + D_{22}(s, s')\overline{\phi(s')}\} ds' = f_2(s), \quad t \in L, \quad (8)$$

де $\phi(s) = \phi_3^0(t_3^0)dt_3^0 / ds$ – шукана комплексна функція; s, s' – дугові абсциси точок $t, t' \in L$; $D_{11}(s, s') = D_{30}(s, s') - A_3 D_{31}(s, s')$; $D_{12}(s, s') = -B_3 D_{31}(s, s')$; $D_{21}(s, s') = A_3 D_{31}(s, s') - (A_3 - B_3)D_{30}(s, s')$; $D_{22}(s, s') = -D_{12}(s, s')$;

$$D_{30}(s, s') = \frac{dt_3^0 / ds}{t_3^0 - t_3^0}; \quad D_{31}(s, s') = \frac{dt_3^1 / ds}{t_3^1 - t_3^1}; \quad f_2(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left\{a_{01}\Gamma_3^0 \frac{dt_3^0}{ds} - \Gamma_3^1 \frac{dt_3^1}{ds}\right\}, \quad (9)$$

$A_3 = (1 + a_{01}) / 2$, $B_3 = (1 - a_{01}) / 2$, $a_{01} = a_0 / a_1$. Тут також враховано залежність

$$\phi_3^1(t_3^1)dt_3^1 = A_3 \phi_3^0(t_3^0)dt_3^0 + B_3 \overline{\phi_3^0(t_3^0)dt_3^0}$$

між невідомими функціями – густинами КП (7) [6, 7].

Систему двох дійсних рівнянь (8) можна подати одним комплексним СІР

$$\phi(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \{[D_{31}(s, s') - D_{30}(s, s')]\phi(s') + \frac{a_1 - a_0}{a_1 + a_0} [D_{31}(s, s') - \overline{D_{30}(s, s')}] \overline{\phi(s')}\} ds' = f(s), \quad s = s(t), \quad t \in L, \quad (10)$$

де $f(s) = \frac{1}{a_1 + a_0} \left\{ a_0 \frac{dt_3^0}{ds} \Gamma_3^0 - a_1 \frac{dt_3^1}{ds} \Gamma_3^1 \right\}$ і враховано рівність $\operatorname{Re}\{\Gamma_3^0 dt_3^0 - \Gamma_3^1 dt_3^1\} = 0$.

Розв'язували систему СІР (8) числово методом квадратур [7, 8]. Задавши у площині xOy гладкий контур включення L у параметричному вигляді

$$t = \omega(\eta), \quad t' = \omega(\xi); \quad \eta, \xi \in [0; 2\pi], \quad (11)$$

з рівнянь (8) отримали два дійсних безрозмірних СІР 2-го роду для визначення невідомих функцій $u_1(\xi) = \operatorname{Re}[\phi(s')] / \tau$, $u_2(\xi) = \operatorname{Im}[\phi(s')] / \tau$, $\xi \in [0; 2\pi]$. На основі обчислених граничних значень КП напружень (7) визначено відносні контактні $\tau_{nz}(\eta) / \tau = \tau_{nz}^\pm(\eta) / \tau$, $\eta \in [0; 2\pi]$ (4) та контурні (5) напруження зі сторони включення $\tau_{sz}^+(\eta) / \tau$ та матриці $\tau_{sz}^-(\eta) / \tau$ [7]. Відповідні коефіцієнти концентрації напружень (ККН) знаходимо за виразами

$$k_n = \max |\tau_{nz}(\eta)| / \tau, \quad k_s^+ = \max |\tau_{sz}^+(\eta)| / \tau, \quad k_s^- = \max |\tau_{sz}^-(\eta)| / \tau, \quad \eta \in [0; 2\pi]. \quad (12)$$

Досліджено напружені стани матриці S_0 та включення S_1 для ортотропних матеріалів з головними осями їх ортотропії під кутами β_0 та β_1 до осі Ox . У системі координат xOy такі тіла описують загальними рівняннями теорії пружності

анізотропного тіла [1], коли механічні параметри матриці та включення мають вигляд (6), де

$$\alpha_3^j = \frac{((\gamma_{30}^j)^2 - 1) \sin \beta_j \cos \beta_j}{(\gamma_{30}^j)^2 \sin^2 \beta_j + \cos^2 \beta_j}, \quad \gamma_3^j = \frac{\gamma_{30}^j}{(\gamma_{30}^j)^2 \sin^2 \beta_j + \cos^2 \beta_j}, \quad \gamma_{30}^j = \sqrt{G_{13}^j / G_{23}^j}, \quad (13)$$

$a_j = 1 / \sqrt{G_{13}^j G_{23}^j}$; G_{13}^j, G_{23}^j – модулі зсуву по осях ортотропії матеріалів матриці ($j = 0$) та включення ($j = 1$).

Аналіз результатів. Для кругового ($\omega(\eta) = a \exp(i\eta)$) ортотропного включення, податливішого ($a_{01} \equiv a_0 / a_1 = 0,25$), ніж ізотропна матриця ($\gamma_3^0 = 1$), зростання рівня ортотропії матеріалу ($\gamma_3^1 = \sqrt{G_{13}^1 / G_{23}^1} \in [0,25; 4]$, $\beta_1 = 0$) призводить до зменшення ККН зі сторони включення ($k_n, k_s^+ \in [1; 0,12]$) та його зростання для контурних напружень зі сторони матриці ($k_s^- \in [1; 1,88]$). Тому, щоб зменшити концентрацію контактних напружень τ_{nz} за податливішого включення, слід вибирати значення $\gamma_3^1 \gg 1$, але враховувати при цьому деяке зростання ККН k_s^- . Для відносно жорсткішого включення ($a_{01} = 4$) аналогічне зростання параметра $\gamma_3^1 \in [0,25; 4]$ також призводить до зниження ККН – $k_n, k_s^+ \in [1,88; 1]$ і до малих значень ККН $k_s^- \in [0,12; 1]$.

Для відносно податливих ортотропних еліптичних включень

$$t = \omega(\eta) = a \cos(\eta) + ib \sin(\eta), \quad \eta \in [0; 2\pi] \quad (14)$$

($a_{01} = 0,25$; $\gamma_3^1 = 0,5$; $\beta_1 = 0$; $b/a \in [0,25; 1,5]$) в ортотропній матриці ($\gamma_3^0 = 2$; $\beta_0 = 0$) отримано малі контактні ($|\tau_{nz}(\eta)| / \tau \in [0; 0,37]$) напруження (рис. 1a), а концентрація контурних напружень з боку матриці $\tau_{sz}^-(0; \pi) / \tau$ (рис. 1e) суттєво перевищує (для $b/a = 0,25$ – у 20 разів) відповідну концентрацію напружень $\tau_{sz}^+(0; \pi) / \tau$ з боку включення (рис. 1c). Для відносно податливої матриці ($a_{01} = 4$) контактні напруження зростають (рис. 1b) $k_n \in [1,4; 3,5]$, а контурні напруження з боку матриці суттєво нижчі (рис. 1f) відповідних за податливого включення (рис. 1e). Розраховані максимальні контактні напруження на контурі ізотропного включення в ортотропній площині узгоджуються (за відповідних параметрів) з відомими [3].

Для відносно жорсткішого ортотропного включення ($a_{01} > 10$) спостерігали незначний вплив кута нахилу його осей ортотропії (β_1) на контактні та контурні напруження зі сторони матриці [7]. Водночас встановлено суттєвий вплив кута нахилу осей ортотропії матеріалу матриці (β_0) на розподіли напружень як для податливішого ($a_{01} = 0,0237$; $\gamma_{30}^0 = 0,25$; $\gamma_3^1 = \sqrt{10}$ – рис. 2a, c, e), так і для жорсткішого ($a_{01} = 4,899$; $\gamma_{30}^0 = \sqrt{2}$; $\gamma_3^1 = 1/\sqrt{3}$ – рис. 2b, d, f) ортотропного еліптичного включення ($\beta_1 = 0$, $b/a = 0,25$). Для податливішого включення напруження τ_{nz} / τ , τ_{sz}^+ / τ є малими для усіх кутів β_0 (рис. 2a, c), однак, для малих кутів β_0 отримано значні ККН k_s^- (рис. 2e), зокрема, для $\beta_0 = 0$ – $k_s^- = 16,5$. Для жорсткішого включення зміна кута β_0 суттєвіше впливає на контурні напруження τ_{sz}^+ / τ (рис. 2d, f).

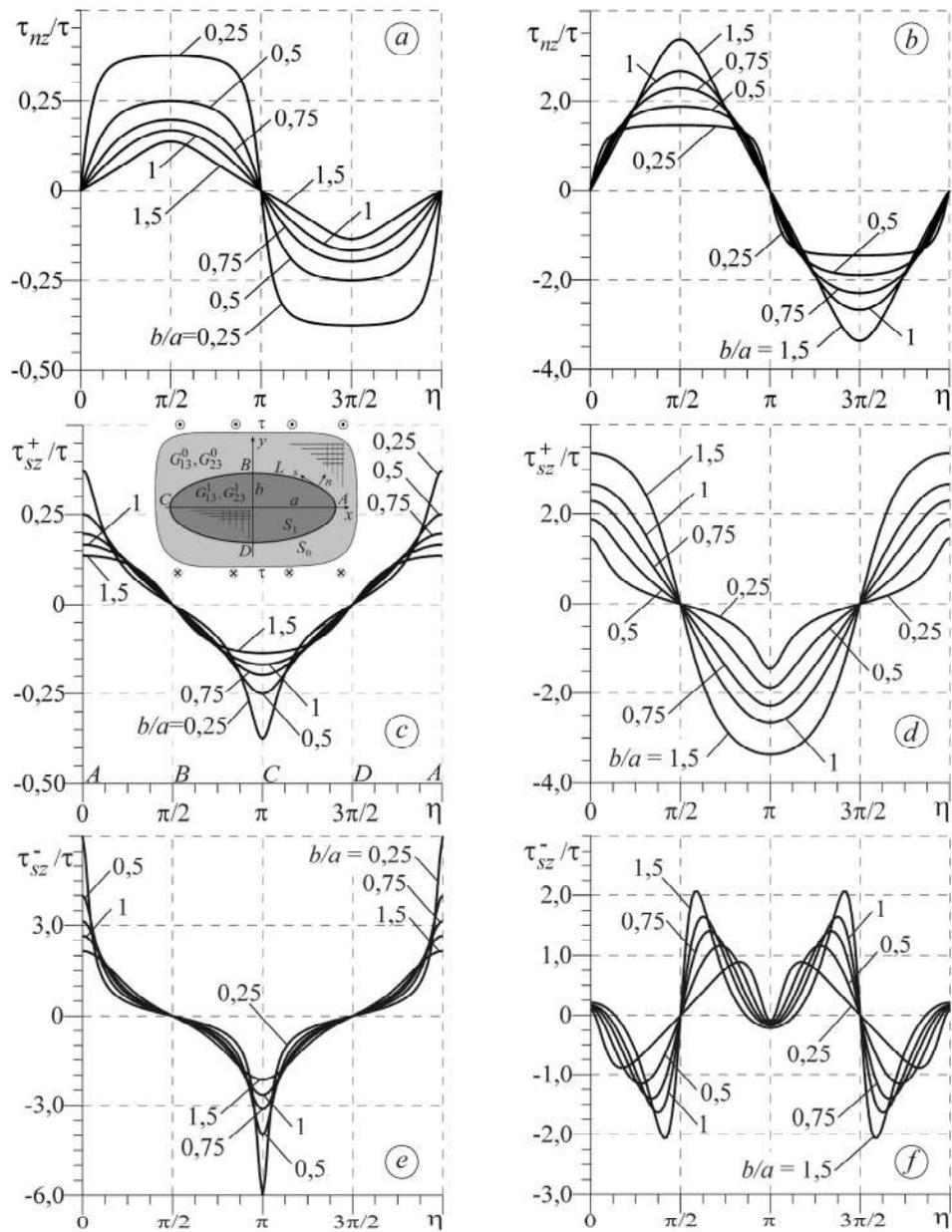


Рис. 1. Вплив параметра b/a еліптичного ортотропного ($\gamma_3^1 = 0,5$) включення на розподіли напружень $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a, b), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (c, d), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (e, f) для відносно податливого ($a_{01} = 0,25$) (a, c, e) та жорсткішого ($a_{01} = 4$) (b, d, f) включення в ортотропній матриці ($\gamma_3^0 = 2$).

Fig. 1. Influence of the b/a parameter of the elliptical orthotropic ($\gamma_3^1 = 0,5$) inclusion on the relative stress distributions $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a, b), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (c, d), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (e, f) for relatively flexible ($a_{01} = 0,25$) (a, c, e) and rigid ($a_{01} = 4$) (b, d, f) inclusion in the orthotropic matrix ($\gamma_3^0 = 2$).

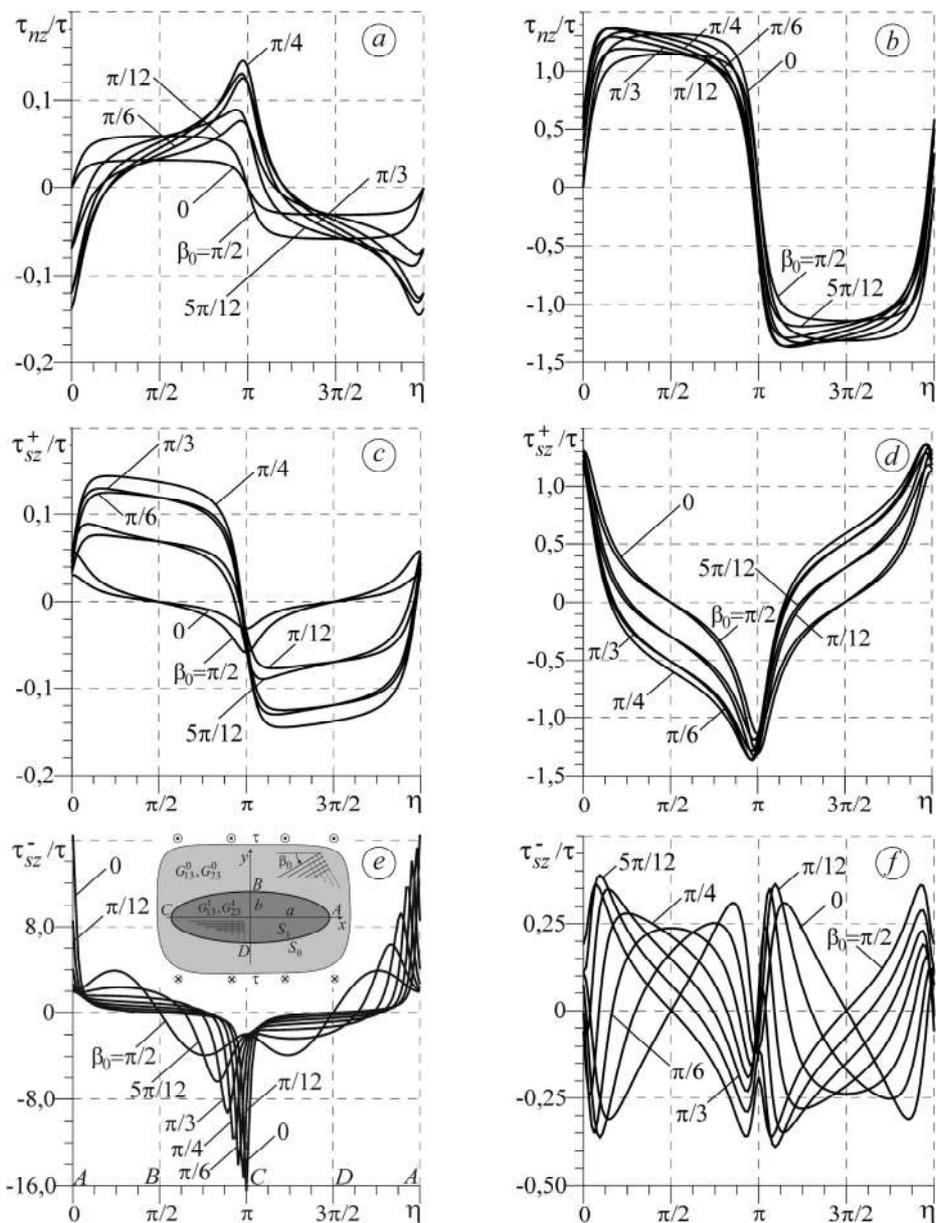


Рис. 2. Вплив кута нахилу осей ортотропії β_0 матеріалу матриці на розподіли напружень $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a, b), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (c, d), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (e, f) для відносно податливого ($a_{01} = 0,237$) (a, c, e) та жорсткішого ($a_{01} = 4,899$) (b, d, f) ортотропного включення.

Fig. 2. Influence of the inclination angle of the orthotropy axes β_0 of the matrix material on the stress distributions $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a, b), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (c, d), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (e, f) for relatively flexible ($a_{01} = 0,237$) (a, c, e) and rigid ($a_{01} = 4,899$) (b, d, f) orthotropic inclusion.

Зміни розподілів напружень по контуру ортотропного еліптичного ($b/a = 0,5$; $\omega(\eta) = e^{i\alpha}\{a \cos(\eta) + ib \sin(\eta)\}$) включення за його повороту на кут α стосовно осі Ox подано на рис. 3. Розглянуто відносно жорсткіше ортотропне включення ($a_{01} = 8\sqrt{2}$; $\gamma_{30}^1 = \sqrt{2}$) в ортотропній матриці ($\gamma_3^0 = 2$; $\beta_0 = 0$) для низки кутів $\alpha = \beta_1$. Зі збільшенням кута повороту ($\alpha \in [0; \pi/2]$) усі ККН (12) зростають.

Завдяки виявленій однорідності напруженого стану в довільному еліптичному анізотропному включенні [9] маємо рівні ККН зі сторони включення ($k_n = k_s^+$), хоч досягаються вони у різних точках контуру (рис. 3а, б) і є в числових межах [1,88; 4,44]. Для контурних напружень зі сторони матриці маємо $k_s^- \in [1,16; 2,87]$ (рис. 3с). На зростання ККН тут також головно впливає геометричний параметр видовження еліптичного включення по осі Oy (див. рис. 1). Для розглянутих параметрів задачі мінімальні ККН ($k_n = k_s^+ < 1,9$; $k_s^- < 1,2$) отримано для кута $\alpha = 0$.

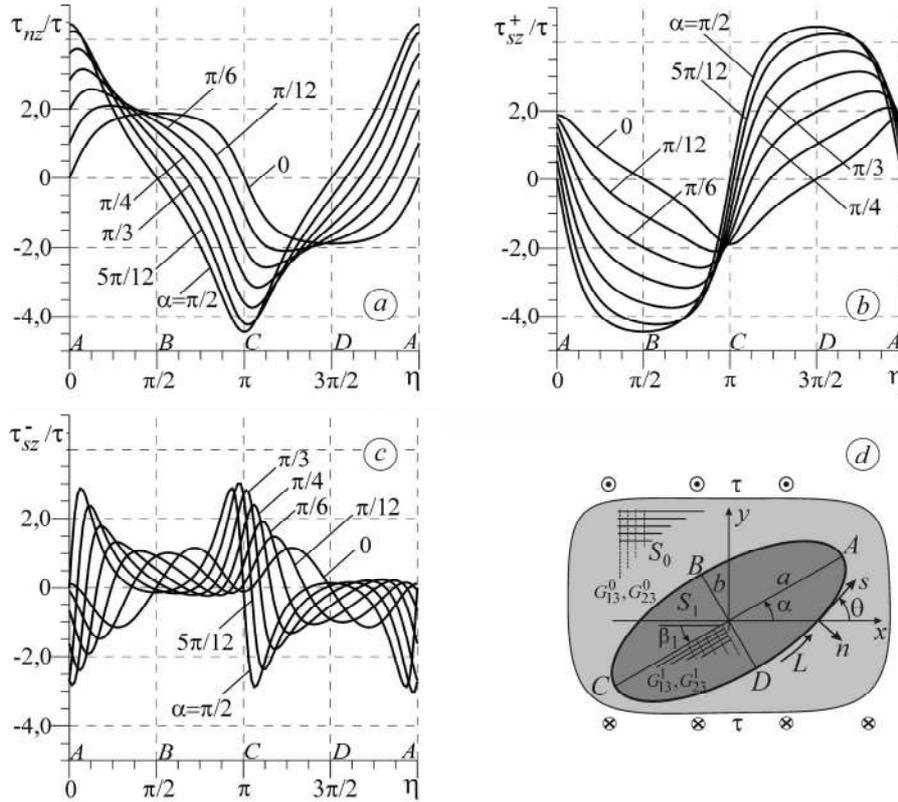


Рис. 3. Вплив кута нахилу α осі еліптичного ортотропного включення ($b/a = 0,5$; $\gamma_3^1 = \sqrt{2}$;

$\beta_1 = \alpha$) на розподіли напружень $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (а), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (б), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (с)

для параметрів $\gamma_3^0 = 2$; $\beta_0 = 0$; $a_{01} = 8\sqrt{2} \approx 11,3$; d – схема задачі.

Fig. 3. Influence of the inclination angle α of the axis of the elliptical orthotropic inclusion

($b/a = 0.5$; $\gamma_3^1 = \sqrt{2}$; $\beta_1 = \alpha$) on stress distributions $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (b),

$\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (c) for parameters $\gamma_3^0 = 2$; $\beta_0 = 0$; $a_{01} = 8\sqrt{2} \approx 11.3$; d – scheme of the problem.

Вплив форми включення у вигляді квадратів із закругленими ($\rho/a = 0,12$) вершинами [2] на епюри напружень поздовжнього зсуву по їх контурах показано на рис. 4. Розглянуто криволінійні квадрати зі сторонами, паралельними до осей Ox , Oy : $\omega(\eta) = 1,2\{\exp(i\eta) - \exp(-3i\eta)/6\}$ (рис. 4а, с, е) та із закругленими вершинами на осях: $\omega(\eta) = 0,857\{\exp(i\eta) + \exp(-3i\eta)/6\}$ (рис. 4б, д, ф). Тут матриця ортотропна і податливіша ($a_{01} = 2\sqrt{6} \approx 4,9$; $\beta_0 = 0$; $\gamma_3^0 = \sqrt{2}$) за включення з ортотропного матеріалу ($\gamma_{30}^1 = 1/\sqrt{3}$) з осями ортотропії під кутами $\beta_1 = \{0; \pi/4; \pi/2\}$ до осі Ox . Розглянуті тут відносно жорсткіші включення дають зміцнювальний ефект

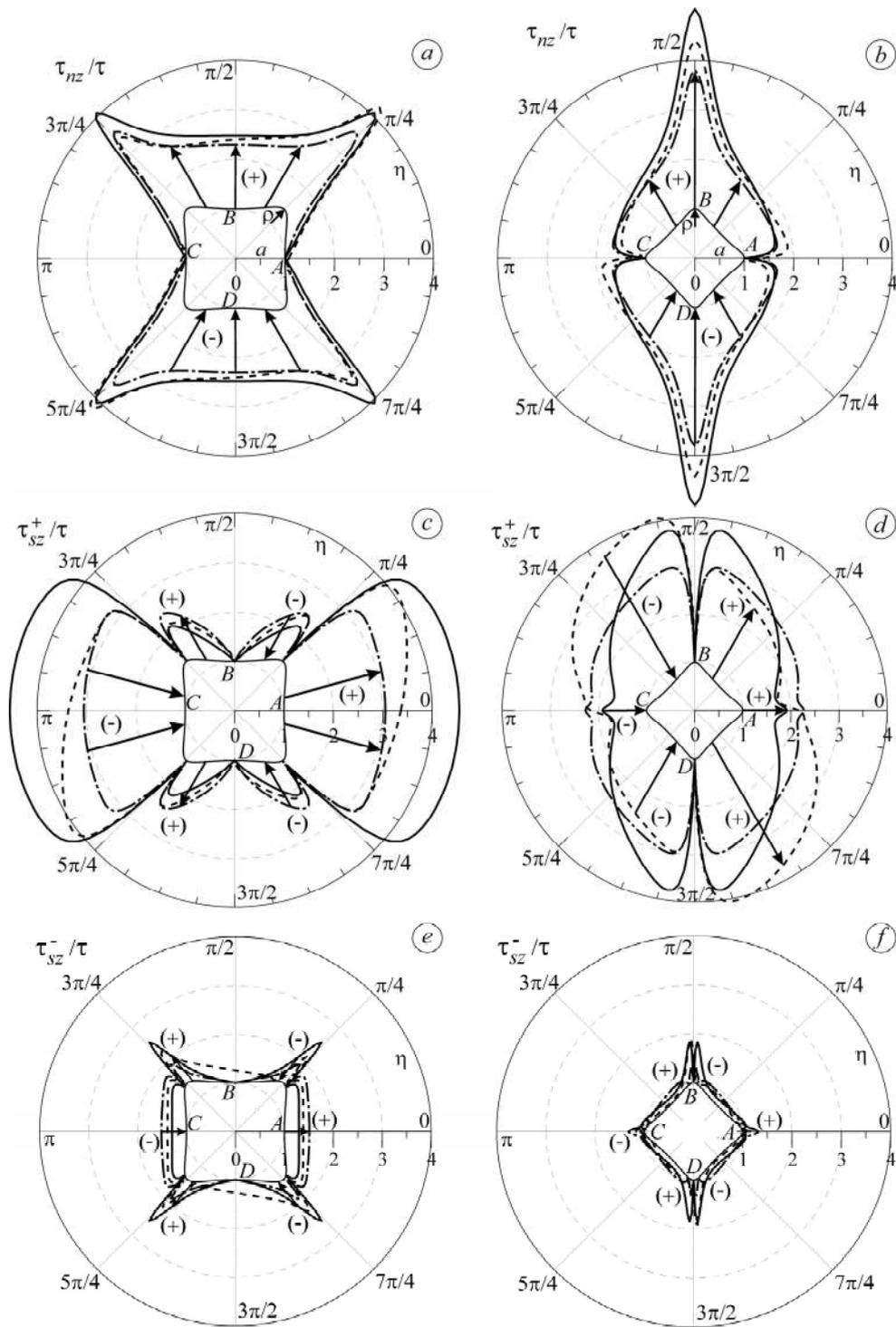


Рис. 4. Епюри відносних напружень $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a, b), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (c, d), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (e, f) по контурах закруглених квадратних включень для кутів $\beta_1 = 0$ (суцільні лінії), $\beta_1 = \pi/4$ (штрихові), $\beta_1 = \pi/2$ (штрихпунктирні).

Fig. 4. Plots of relative stresses $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (a, b), $\tau_{sz}^+(\eta)/\tau$ (c, d), $\tau_{sz}^-(\eta)/\tau$ (e, f) at the contours of rounded square inclusions for angles $\beta_1 = 0$ (solid lines), $\beta_1 = \pi/4$ (dashed), $\beta_1 = \pi/2$ (dash-dotted).

для ортотропної матриці – контурні напруження з боку матриці (рис. 4e, f) менші за однорідні та суттєво менші за відповідні зі сторони включень (рис. 4c, d). Також очікувано, що екстремальні контактні напруження $\tau_{nz}(\eta)$ досягаються біля відповідних закруглених вершин криволінійних квадратів (рис. 4a, b).

Для еліптичних форм включень (14) (рис. 1–3) підтверджено однорідність його напруженого стану [9] ($\tau_{xz}(z) = c_1$, $\tau_{yz}(z) = c_2$, $z \in S_1$) за заданого поздовжнього зсуву (2) та довільних геометричних і механічних параметрів задачі (b/a , a_{01} , α , β_0 , β_1 , μ_3^0 , μ_3^1). Самі сталі c_1 , c_2 суттєво залежать від заданих вище параметрів й наперед невідомі, однак їх легко визначають за знайденими напруженнями на контурі L зі сторони включення: $\tau_{xz}(z) + i\tau_{yz}(z) = \{\tau_{sz}^+(t) - i\tau_{nz}(t)\}e^{i\theta}$, де $e^{i\theta} = dt/ds = \omega'(\eta)/|\omega'(\eta)|$, $z \in S_1$, $t \in L$, θ – кут додатної дотичної до контуру L у точці t (див. рис. 3d). Для довільних нееліптичних форм включень (зокрема, для параметрів задачі на рис. 4) отримуємо неоднорідний напружений стан всередині включення: $\tau_{xz}(z)$, $\tau_{yz}(z) \neq \text{const}(z \in S_1)$.

ВИСНОВКИ

На основі аналітико-числового розв'язку антиплоскої задачі теорії пружності для нескінченної анізотропної матриці з гладким анізотропним включенням (за їх ідеального механічного з'єднання) досліджено напружений стан такого кусково-однорідного тіла за різних форм та розташування ортотропних включень, пружних сталих матеріалів, а також орієнтацій осей ортотропії матеріалів стосовно заданої площини поздовжнього зсуву матриці на нескінченності. Визначено розподіли контактних та контурних напружень поздовжнього зсуву на межі поділу матеріалів як зі сторони матриці, так і з боку включення. На основі обчислених відповідних коефіцієнтів концентрації напружень виявлено геометричні та механічні параметри задачі, які суттєво впливають на напружений стан розглядуваного кусково-однорідного анізотропного тіла. Отримані результати можна використати для проектування різного роду кусково-однорідних ортотропних елементів конструкцій з мінімальною концентрацією напружень за антиплоскої деформації.

1. *Lekhnitskii S. G.* Anisotropic Plates. – New York: Gordon and Breach, 1968. – 534 p.
2. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Теория линейно-армированного композиционного материала с анизотропными компонентами структуры // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 6. – С. 53–63.
4. *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 588 p.
5. *Dong C. Y., Lo S. H., and Cheung Y. K.* Stress analysis of inclusion problems of various shapes in an infinite anisotropic elastic medium // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2003. – **192**. – P. 683–696. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00579-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00579-0)
6. *Maksymovych O. and Podhorecki A.* Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2019. – **104**. – P. 364–372. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039>
7. *Determination of the stress state of an anisotropic body with smooth curvilinear inclusions under longitudinal shear / M. P. Savruk, V. S. Kravets, L. I. Onyshko, and O. I. Kvasniuk // Materials Science. – 2024. – 59, № 5. – P. 591–600. <https://doi.org/10.1007/s11003-024-00815-5>*
8. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44555-7>
9. *Ting T. C. T. and Schiavone P.* Uniform antiplane shear stress inside an anisotropic elastic inclusion of arbitrary shape with perfect or imperfect interface bonding // Int. J. Eng. Sci. – 2010. – **48**. – P. 67–77.

Одержано 28.06.2024