

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ГЛАДКИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ТА ТРІЩИНАМИ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

М. П. САВРУК, В. С. КРАВЕЦЬ, Л. Й. ОНИШКО, О. І. КВАСНЮК

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано антиплоску задачу теорії пружності для анізотропного тіла з гладкими криволінійними анізотропними включеннями та тріщинами. Для одного еліптичного включення та довільно орієнтованої прямолінійної тріщини в ортотропній площині систему інтегральних рівнянь першого та другого родів розв'язано числово методом квадратур. Подано залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини від геометричних параметрів задачі та пружних сталих ортотропних матеріалів площини та включення.

**Ключові слова:** *анізотропія, антиплоска деформація, включення, тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

The antiplane problem of the theory of elasticity for an anisotropic body with smooth curvilinear anisotropic inclusions and cracks was solved using the method of singular integral equations. For one elliptic inclusion and an arbitrarily oriented rectilinear crack in the orthotropic plane, the obtained system of the integral first and second order equations is numerically solved by the quadrature method. The dependences of the stress intensity factors at the crack tips on the geometric parameters of the problem and the elastic constants of orthotropic materials of the matrix and inclusion are constructed.

**Keywords:** *anisotropy, antiplane deformation, inclusions, cracks, stress intensity factors, singular integral equation method.*

**Вступ.** У сучасних елементах конструкцій машинобудування широко використовують композитні матеріали, які моделюють однорідними або кусково-однорідними анізотропним тілами. Розрахунок на міцність таких конструкцій передбачає дослідження їх напружено-деформованого стану за наявності у них різного роду отворів, вирізів та тріщин. Багато досліджень присвячено відповідним однорідним тілам з концентраторами напружень, зокрема праці [1–10]. Значно менше уваги приділено кусково-однорідним анізотропним тілам [11–13] та відповідним тілам з тріщинами [14–16].

Нижче розглянуто антиплоску задачу теорії пружності для нескінченного пружного анізотропного тіла (матриці) зі скінченними гладкими анізотропними включеннями та криволінійними тріщинами. Задачу зведено до розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) першого та другого родів. Для одного включення та однієї тріщини в ортотропній матриці обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщини залежно від геометричних параметрів задачі (форми включення та розміщення тріщини), пружних сталих ортотропних матеріалів матриці та включення, за різних орієнтацій їх осей ортотропії.

**Деякі співвідношення антиплоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла.** Напружено-деформований стан анізотропного тіла за поздовжнього зсуву

описуємо комплексними потенціалами (КП)  $\varphi_3(z_3)$ ,  $\Phi_3(z_3) = \varphi_3'(z_3)$  – аналітичними функціями комплексного аргументу  $z_3 = x + \mu_3 y$ , де  $\mu_3 = \alpha_3 + i\gamma_3$  – корінь характеристичного рівняння антиплоскої задачі, компоненти якого виражають через пружні сталі анізотропного матеріалу тіла  $a_{55}$ ,  $a_{45}$ ,  $a_{44}$  [1]

$$\alpha_3 = a_{45}/a_{55}, \quad \gamma_3 = a_0/a_{55}, \quad a_0 = \sqrt{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} > 0.$$

Компоненти вектора пружних переміщень  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = w(x, y)$  та тензора напружень  $\tau_{yz}(x, y)$ ,  $\tau_{xz}(x, y)$  подано у вигляді [1]

$$w(x, y) = a_0 \operatorname{Im}[\varphi_3(z_3)], \quad \tau_{yz}(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_3(z_3)], \quad \tau_{xz}(x, y) = -\operatorname{Re}[\mu_3 \Phi_3(z_3)], \quad (1)$$

а контактні  $\tau_{nz}(t)$  та контурні  $\tau_{sz}(t)$  зсувні напруження на деякому заданому гладкому криволінійному контурі  $L$  визначатимемо за формулами [9]

$$\tau_{nz}(t) = -\operatorname{Re}[\Phi_3(t_3) dt_3 / ds] = -\operatorname{Re}[\varphi_3'(t_3) dt_3 / ds], \quad t \in L, \quad t_3 \in L_3, \quad (2)$$

$$\tau_{sz}(t) = \operatorname{Re}[\Phi_3(t_3) \{((1 - i\mu_3) dt / ds - (1 + i\mu_3) d\bar{t} / ds) / 2i\}], \quad (3)$$

де  $s$  – дугова абсциса точки  $t \in L$ , а контур  $L_3$  у допоміжній математичній площині  $z_3$  відповідає контуру  $L$  у фізичній площині  $z = x + iy$ .

**Формулювання задачі.** Нехай у нескінченній анізотропній матриці  $S_0$ , яка належить до декартової системи координат  $Oxyz$ , містяться тунельні вздовж осі  $Oz$  анізотропні включення  $S_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ), обмежені в площині  $xOy$  гладкими контурами  $L_j$  та криволінійні тріщини на розіркнених контурах  $L_j$  ( $j = \overline{J+1, J+N}$ ). Кусково-однорідне анізотропне тіло  $S = \bigcup S_j$  ( $j = \overline{0, J}$ ) навантажене на нескінченності однорідними напруженнями поздовжнього зсуву

$$\tau_{xz}^\infty = \tau \cos \gamma, \quad \tau_{yz}^\infty = \tau \sin \gamma, \quad (4)$$

де  $\gamma$  – кут нахилу площини зсуву до осі  $Ox$  (рис. 1а).

Вважатимемо, що за переходу через контури включень компонента зсувного напруження  $\tau_{nz}(t)$  неперервна:

$$\tau_{nz}^+(t) - \tau_{nz}^-(t) = 0, \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J}; \quad (5)$$

а переміщення  $w(x, y)$  зазнають розривів

$$w^+(t) - w^-(t) = g_j^*(t), \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J}. \quad (6)$$

На берегах тріщин задані самозрівноважені напруження

$$\tau_{nz}^\pm(t) = \tau_j^*(t), \quad t \in L_j, \quad j = \overline{J+1, J+N}. \quad (7)$$

Тут верхні індекси “+” (“–”) вказують на граничні значення відповідних величин за підходу до замкнених та розіркнених контурів  $L_j$  зліва (справа) для вибраних напрямків їх обходу (рис. 1а).

**Інтегральні рівняння задачі.** Задачу з крайовими умовами (5)–(7) розв’язуємо методом СІР [9, 10, 13]. Напружений стан нескінченного кусково-однорідного анізотропного тіла  $S$  описують співвідношення (1)–(3), записані у комплексних математичних площинах  $z_3^j = x + \mu_3^j y$  ( $j = \overline{0, J}$ ). Тут і надалі величини з

верхнім індексом  $j = \overline{1, J}$  належать до  $j$ -го включення  $S_j$ , а з індексом 0 – до матриці  $S_0$ , зокрема,

$$\mu_3^j = \alpha_3^j + i\gamma_3^j, \quad \alpha_3^j = a_{45}^j / a_{55}^j, \quad \gamma_3^j = a_j / a_{55}^j, \quad a_j = \sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - a_{45}^j a_{45}^j}, \quad j = \overline{0, J}. \quad (8)$$

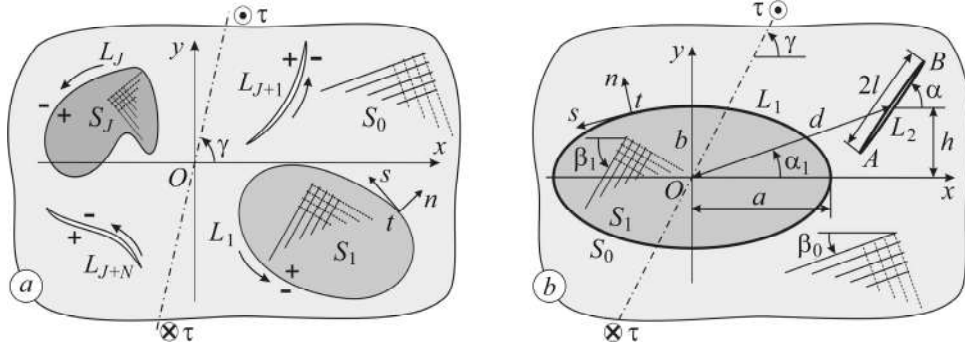


Рис. 1. Поздовжній зсув анізотропної матриці із гладкими анізотропними включеннями та криволінійними тріщинами (а) і з одним еліптичним включенням та довільно розташованою прямолінійною тріщиною (б).

Fig. 1. Longitudinal shear of an anisotropic matrix with smooth anisotropic inclusions and curvilinear cracks (a) and with one elliptical inclusion and an arbitrarily located rectilinear crack (b).

КП напружень для матриці  $S_0$  подамо у вигляді аналітичної функції

$$\Phi_3(z_3^0) = \Gamma_3^0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_{3k}} \frac{\phi'_{3k}(t_{3k})}{t_{3k} - z_3^0} dt_{3k} = \Gamma_3^0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_k} \frac{\phi'_{3k}(t_{3k})}{t_{3k} - z_3^0} dt_k, \quad (9)$$

де  $z_3^0 = x + \mu_3^0 y$ ,  $z = x + iy \in S_0$ ,  $t_{3k} = \text{Re}(t_k) + \mu_3^0 \text{Im}(t_k) \in L_{3k}$ ,  $t_k \in L_k$ ; контурам  $L_{3k}$  у математичній площині  $z_3^0$  відповідають контури  $L_k$  ( $k = \overline{1, J+N}$ ) у фізичній площині  $z$ . Відповідні подання КП для включень  $S_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ):

$$\Phi_3^j(z_3^j) = \Gamma_3^j + \frac{1}{\pi} \int_{L_3^j} \frac{\phi'_{3j}(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt_3^j = \Gamma_3^j + \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{\phi'_{3j}(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt_j; \quad t_j \in L_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad (10)$$

де  $z \in S_j$ ,  $t_3^j = \text{Re}(t_j) + \mu_3^j \text{Im}(t_j) \in L_3^j$ , а контурам  $L_3^j$  у математичних площинах  $z_3^j = x + \mu_3^j y$  відповідають контури  $L_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ) у фізичній площині  $z$ . Тут функції  $\phi'_{3k}(t_{3k}) = d\phi_{3k}(t_{3k}) / dt_{3k}$  ( $k = \overline{1, J+N}$ ) і  $\phi'_{3j}(t_3^j) = d\phi_{3j}(t_3^j) / dt_3^j$  ( $j = \overline{1, J}$ ) – шукані густини КП напружень (9), (10), а сталі  $\Gamma_3^j$  для заданого навантаження (4)

$$\Gamma_3^j = \tau \left[ (\gamma_3^j + i\alpha_3^j) \sin \gamma + i \cos \gamma \right] / \gamma_3^j, \quad j = \overline{0, J} \quad (11)$$

визначають однорідний напружений стан матриці та включень.

Використовуючи формули Сохотського–Племеля для інтегралів типу Коші, отримали граничні значення КП (9), (10) на замкнених контурах  $L_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ) з боку матриці  $S_0$  та включень  $S_j$  ( $j = \overline{1, J}$ )

$$(\Phi_3)^-(t_{3j}) = \Gamma_3^0 - i\phi'_{3j}(t_{3j}) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_{3k}} \phi'_{3k}(t'_{3k}) / (t'_{3k} - t_{3j}) dt'_{3k}, \quad t_{3j} \in L_{3j}, \quad j = \overline{1, J}; \quad (12)$$

$$\left(\Phi_3^j\right)^+(t_3^j) = \Gamma_3^j + i\phi_3^{j'}(t_3^j) + \frac{1}{\pi} \int_{L_3^j} \phi_3^{j'}(t_3^{j'}) / (t_3^{j'} - t_3^j) dt_3^{j'}, \quad t_3^j \in L_3^j, \quad j = \overline{1, J}. \quad (13)$$

На розімкнених контурах тріщин  $L_j$  ( $j = \overline{J+1, J+N}$ ) у матриці  $S_0$  матимемо:

$$\left(\Phi_3\right)^\pm(t_{3j}) = \Gamma_3^0 \pm i\phi_{3j}'(t_{3j}) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_{3k}} \frac{\phi_{3k}'(t_{3k}')}{t_{3k}' - t_{3j}} dt_{3k}', \quad t_{3j} \in L_{3j}, \quad j = \overline{J+1, J+N}. \quad (14)$$

За допомогою формул (1)–(3), (12)–(14) з крайових умов задачі (5), (7) та продиференційованих за дуговими абсцисами  $s_j$  контурів включень умов (6)

$$d\{w^+(t) - dw^-(t)\} / ds_j = g_j^*(t) dt / ds_j, \quad s_j = s(t), \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J},$$

отримаємо систему дійсних СІР:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_j} \operatorname{Re}[D_1(s'_j, s_j)] \phi_3^{j'}(s'_j) ds'_j - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_k} \operatorname{Re}[D_2(s'_k, s_j)] \phi_{3k}'(s'_k) ds'_k = 0, \\ s_j = s(t_j), \quad s'_j = s(t'_j); \quad t_j, t'_j \in L_j, \quad j = \overline{1, J}; \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} & \phi_3^{j'}(s_j) + \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \operatorname{Im}[D_1(s'_j, s_j)] \phi_3^{j'}(s'_j) ds'_j + a_{0j} \left\{ \phi_{3j}'(s_j) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_k} \operatorname{Im}[D_2(s'_k, s_j)] \phi_{3k}'(s'_k) ds'_k \right\} = f_2(s_j), \quad s_j = s(t_j), \quad t_j \in L_j, \quad j = \overline{1, J}; \quad (16) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{J+N} \int_{L_k} \operatorname{Re}[D_2(s'_k, s_j)] \phi_{3k}'(s'_k) ds'_k = f_3(s_j), \quad t_j \in L_j, \quad j = \overline{J+1, J+N}. \quad (17)$$

Система СІР (15)–(17) має єдиний розв'язок за умови однозначності перемішень за обходу кожного з контурів тріщин [9]:

$$\int_{L_k} \phi_{3k}'(s'_k) ds'_k = 0, \quad s'_k = s(t'_k), \quad t'_k \in L_k, \quad k = \overline{J+1, J+N}. \quad (18)$$

Ядра і праві частини СІР (15)–(17) визначено виразами

$$D_1(s'_j, s_j) = (dt_3^j / ds_j) / (t_3^{j'} - t_3^j), \quad s'_j = s(t'_j), \quad t'_j \in L_j, \quad j = \overline{1, J}, \\ D_2(s'_k, s_j) = (dt_{3j} / ds_j) / (t_{3k}' - t_{3j}), \quad s'_k = s(t'_k), \quad t'_k \in L_k, \quad k = \overline{1, J+N}, \\ f_2(s_j) = g_j^*(t_j) dt_j / ds_j + \operatorname{Im} \left[ a_{0j} \Gamma_3^0 dt_{3j} - \Gamma_3^j dt_3^j \right] / ds_j, \quad j = \overline{1, J}, \\ f_3(s_j) = \tau_j^*(t_j) - \operatorname{Re} \left[ \Gamma_3^0 dt_{3j} / ds_j \right], \quad j = \overline{J+1, J+N},$$

де  $a_{0j} = a_0 / a_j$ ;  $s'_j, s'_k, s_j$  – дугові абсциси точок інтегрування  $t'_j, t'_k$  та зовнішніх точок крайових умов  $t_j$  на відповідних контурах. Тобто маємо систему  $2J + N$  дійсних СІР (15)–(18) для визначення  $2J + N$  дійсних невідомих функцій

$$\phi_3^{j'}(s_j) = \phi_3^{j'}(t_3^j) dt_3^j / ds_j \quad (j = \overline{1, J}), \quad \phi_{3k}'(s_k) = \phi_{3k}'(t_{3k}') dt_{3k}' / ds_k \quad (k = \overline{1, J+N}).$$

У часткових випадках для  $N = 0$  з рівнянь (15)–(18) отримано відомі системи СІР для кусково-однорідного анізотропного тіла без тріщин [13], а для  $\alpha_3^j = 0$ ,  $\gamma_3^j = 1$ ,  $j = \overline{0, J}$  – кусково-однорідного ізотропного тіла з тріщинами [17].

**Числові результати.** Розглянемо нескінченне тіло, складене з ортотропної матриці  $S_0$  і пружного ортотропного еліптичного включення  $S_1$  з півосями  $a, b$  вздовж осей  $Ox, Oy$  (рис. 1b). Осі пружної ортотропії матриці та включення повернуті відносно осі координат  $Ox$  на кути  $\beta_0$  та  $\beta_1$ , відповідно. В осях пружної ортотропії матеріали матриці та включення ортотропні і їх пружні властивості можна записати через технічні характеристики (модулі зсуву)  $G_{13}^j, G_{23}^j$  для матриці ( $j = 0$ ) та включення ( $j = 1$ ):  $a_{44}^j = 1/G_{23}^j, a_{45}^j = 0, a_{55}^j = 1/G_{13}^j$ . У системі координат  $xOy$  кусково-однорідне тіло описуємо загальними рівняннями теорії пружності анізотропного тіла [1], а пружні сталі його компонент (матриці та включення) – співвідношеннями (8), де, згідно з працями [1, 7, 13],

$$\alpha_3^j = \frac{((\gamma_{30}^j)^2 - 1) \sin \beta_j \cos \beta_j}{(\gamma_{30}^j)^2 \sin^2 \beta_j + \cos^2 \beta_j}, \quad \gamma_3^j = \frac{\gamma_{30}^j}{(\gamma_{30}^j)^2 \sin^2 \beta_j + \cos^2 \beta_j}, \quad \gamma_{30}^j = \sqrt{G_{13}^j / G_{23}^j},$$

$$a_j = 1 / \sqrt{G_{13}^j G_{23}^j}, \quad j = 0; 1.$$

Для одного включення ( $J = 1$ ) з контуром  $L_1$  та однієї прямолінійної тріщини  $L_2$  ( $N = 1$ ) задачу зведемо до розв'язування системи трьох дійсних СІР, яку обчислимо методом механічних квадратур [9, 10, 13]. Розглянемо матрицю кусково-однорідного тіла, послаблену прямолінійною тріщиною довжини  $2l$  ( $AB$ ), нахиленою під кутом  $\alpha$  до осі  $Ox$  і віддаленою від центра еліптичного включення на відстань  $d > \max\{a; b\}$  під кутом  $\alpha_1$  до осі  $Ox$ , коли вона знаходиться поза включенням (рис. 1b). Задамо у фізичній площині  $z = x + iy$  параметричні рівняння контурів еліптичного включення та прямолінійної тріщини

$$t_1 = \omega_1(\eta) = a \cos(\eta) + ib \sin(\eta); \quad t'_1 = \omega_1(\xi); \quad \eta, \xi \in [0; 2\pi], \quad (19)$$

$$t_2 = \omega_2(\eta) = de^{i\alpha_1} + l\eta e^{i\alpha}; \quad t'_2 = \omega_2(\xi); \quad \eta, \xi \in [-1; 1]. \quad (20)$$

Тоді  $t_3^1 = \omega_3^1(\eta), t_{31} = \omega_{31}(\eta), \eta \in [0; 2\pi]; t_{32} = \omega_{32}(\eta), \eta \in [-1; 1]$  і пов'язані з точками на фізичних контурах  $L_1, L_2$  (19), (20) формулами  $t_3^1 = \text{Re}(t_1) + \mu_3^1 \text{Im}(t_1) \in L_3^1, t_1 \in L_1; t_{3k} = \text{Re}(t_k) + \mu_3^0 \text{Im}(t_k) \in L_{3k}, t_k \in L_k, k = 1; 2$ .

На основі граничних значень КП (12)–(14) визначено КІН у вершинах тріщини на  $K_{\text{III}}^\pm$  (нижній знак відповідає ближній ( $A$ ), а верхній – віддаленій ( $B$ ) від включення вершинам тріщини), контактні  $\tau_{nz}(t) = \tau_{nz}^+(t) = \tau_{nz}^-(t)$  (2) та контурні (3) зсувні напруження зі сторони включення  $\tau_{sz}^+(t)$  та матриці  $\tau_{sz}^-(t)$ :

$$K_{\text{III}}^\pm = \mp \tau \sqrt{\pi l} u_{32}(\pm 1) / \sqrt{|\omega_2'(\pm 1)|}; \quad (21)$$

$$\tau_{nz}(\eta) = \tau_{nz}^\pm(\eta) = -\text{Re} \left[ \left( \Gamma_3^0 + \frac{\tau}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_{31}(\xi) |\omega_1'(\xi)| d\xi}{\omega_{31}(\xi) - \omega_{31}(\eta)} \right) \frac{\omega_{31}'(\eta)}{|\omega_1'(\eta)|} \right], \quad \eta \in [0; 2\pi], \quad (22)$$

$$\tau_{sz}^+(\eta) = \text{Im} \left[ \left( \Gamma_3^1 + i\tau u_3^1(\eta) \frac{|\omega_1'(\eta)|}{\omega_3^1(\eta)} + \frac{\tau}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_3^1(\xi) |\omega_1'(\xi)| d\xi}{\omega_3^1(\xi) - \omega_3^1(\eta)} \right) f_s(\eta, \mu_3^1) \right], \quad \eta \in [0; 2\pi], \quad (23)$$

$$\tau_{sz}^-(\eta) = \text{Im} \left[ \left( \begin{aligned} & \Gamma_3^0 + i\tau u_{31}(\eta) \frac{|\omega_1'(\eta)|}{\omega_{31}'(\eta)} + \\ & + \frac{\tau}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_{31}(\xi) |\omega_1'(\xi)| d\xi}{\omega_{31}(\xi) - \omega_{31}(\eta)} + \frac{\tau l}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_{32}(\xi) d\xi}{\omega_{32}(\xi) - \omega_{31}(\eta)} \end{aligned} \right) f_s(\eta, \mu_3^0) \right], \quad (24)$$

де  $f_s(\eta, \mu_3^j) = \left\{ (1 - i\mu_3^j) \omega_1'(\eta) - (1 + i\mu_3^j) \bar{\omega}_1'(\eta) \right\} / 2 |\omega_1'(\eta)|$ ,  $j = 0; 1$ , а дійсні функції  $u_3^1(\xi)$ ,  $u_{31}(\xi)$ ,  $u_{32}(\xi)$  виражені через розв'язки системи СІР (15)–(18) для  $J = N = 1$ :

$$u_3^1(\xi) = \phi_3^1(s_1) / \tau, \quad u_{31}(\xi) = \phi_{31}'(s_1) / \tau, \quad u_{32}(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \phi_{32}'(s_2) / \tau.$$

Розраховано відносні КІН (21)  $F_{III}^{\pm} = K_{III}^{\pm} / \tau \sqrt{\pi l}$  (за навантаження (4),  $\gamma = \pi/2$ ) для прямолінійної тріщини (20) ( $l/a = 0,5$ ,  $\alpha = \alpha_1 = 0$ ) та параметрів  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ ,  $\gamma_3^1 = 2$ ,  $d/a = 2$  (рис. 2), де криві 1–3 відповідають різним параметрам відносної жорсткості на зсув вздовж осі  $Oz$  матеріалу включення стосовно матеріалу матриці:  $a_{01} \equiv a_0 / a_1 = \sqrt{G_{13}^1 G_{23}^1} / \sqrt{G_{13}^0 G_{23}^0} = \{0; 8; 25\}$ . КІН зі збільшенням геометричного параметра  $b/a$  для відносно податливого включення та  $\gamma_3^0 > 1$  (рис. 2a, криві 1) дещо зростають, а для жорсткіших включень (рис. 2a, криві 2, 3) монотонно знижуються (зростає ефект підкріплення включенням). Натомість, коли  $\gamma_3^0 < 1$  (рис. 2b), поведінка кривих набуває асимптотичного характеру зі зростанням параметра  $b/a$  з аналогічним ефектом підкріплення жорсткішим включенням (криві 2, 3).

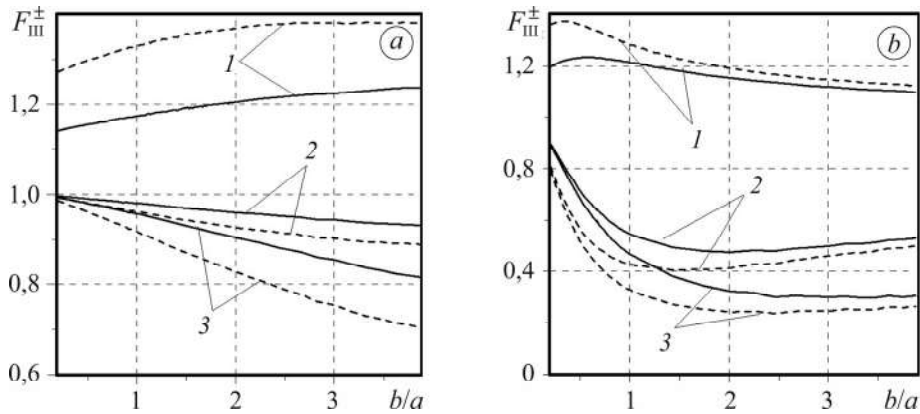


Рис. 2. Залежності відносних КІН у вершинах тріщини B ( $F_{III}^+$  – суцільні лінії)

та A ( $F_{III}^-$  – штрихові) від відношення осей еліпса  $b/a$  для параметра

$$a_{01} = \{0; 8; 25\} \text{ (криві 1–3, відповідно) та } \gamma_3^0 = 1/3 \text{ (a), } \gamma_3^0 = 3 \text{ (b)}.$$

Fig. 2. Dependences of the relative SIF at the crack tips B ( $F_{III}^+$  – solid lines)

and A ( $F_{III}^-$  – dashed) on the ratio of the axes of the ellipse  $b/a$  for the parameter

$$a_{01} = \{0; 8; 25\} \text{ (curve 1–3, respectively) and } \gamma_3^0 = 1/3 \text{ (a), } \gamma_3^0 = 3 \text{ (b)}.$$

Для відносно податливого включення ( $a_{01} = 0,2$ ) максимальне значення КІН для  $\gamma_{30}^1 = 4$ ,  $b/a = 0,3$ ,  $d/a = 2$  спостерігаємо у ближній до включення вершині тріщини (рис. 3a, штрихові лінії), а для відносно жорсткого ( $a_{01} = 5$ ) максимуми є здебільшого у віддаленій вершині (рис. 3b, суцільні). Важливий вплив на КІН мають також пружні характеристики матеріалу матриці за зміни анізотропії включення, яка характеризується кутом  $\beta_1$  (рис. 3a, b). Досліджено вплив кута нахилу прямолінійної тріщини  $\alpha$  на зміну КІН для різних кутів орієнтації осей

ортотропії включення  $\beta_1$  за параметрів  $\alpha_1 = \beta_0 = 0$ ,  $\gamma_3^0 = 0,5$ ,  $\gamma_{30}^1 = 3$ ,  $b/a = 2$ ,  $d/a = 1,6$  (рис. 3с, d). Для відносно податливих анізотропних включень ( $a_{01} = 0,1$ ) максимальні КІН є у ближній вершині тріщини, яка розташована вздовж осі  $Ox$  (рис. 3с,  $\alpha = 0$ ). Коли включення відносно жорстке ( $a_{01} = 10$ ), то максимальні КІН є у дальній вершині тріщини для  $\alpha = 0$ , а у ближній максимуми спостерігаємо для  $\alpha = \pm\pi/6$  (рис. 3d).

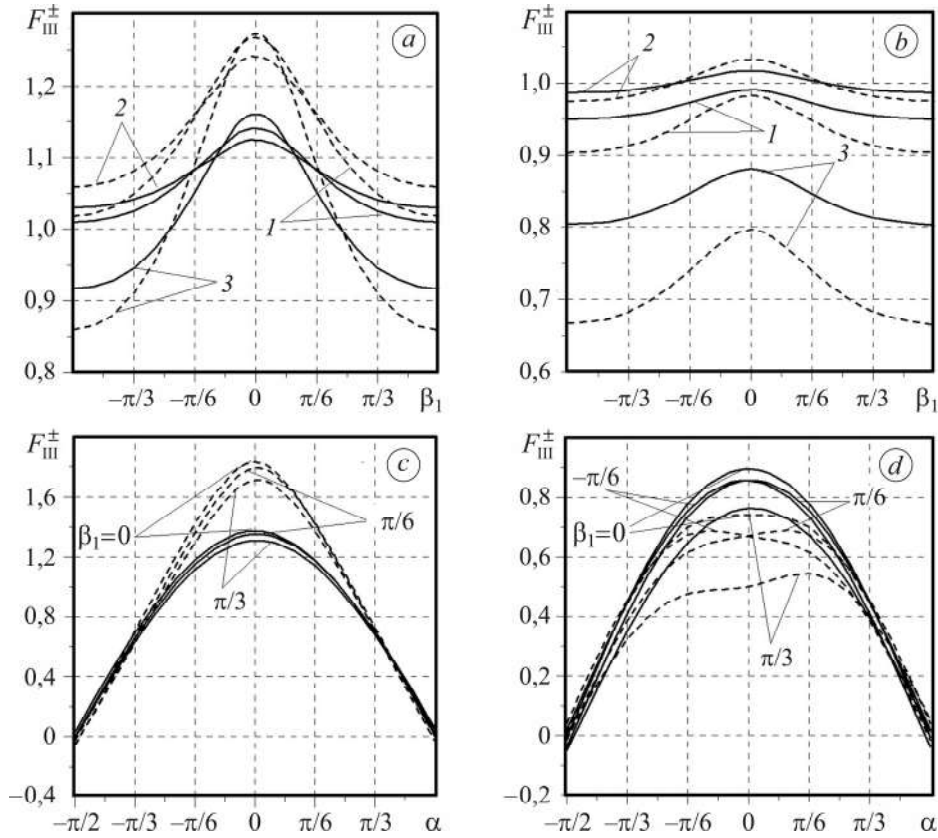


Рис. 3. Залежності відносних КІН  $F_{III}^{\pm}$  у вершинах тріщини  $B$  (суцільні лінії) та  $A$  (штрихові) від кута орієнтації осей ортотропії включення  $\beta_1$  для параметрів  $\beta_0 = 0$ ,  $\gamma_3^0 = \{1; 1/3; 3\}$  (криві 1–3, відповідно),  $a_{01} = 0,2$  (a) і  $a_{01} = 5$  (b); від кута нахилу  $\alpha$  тріщини для низки кутів  $\beta_1$  та  $a_{01} = 0,1$  (c),  $a_{01} = 10$  (d).

Fig. 3. Dependences of the relative SIF  $F_{III}^{\pm}$  at the crack tips  $B$  (solid lines) and  $A$  (dashed) on the orientation angle of the inclusion orthotropy axes  $\beta_1$  for the parameters  $\beta_0 = 0$ ,  $\gamma_3^0 = \{1; 1/3; 3\}$  (curve 1–3, respectively),  $a_{01} = 0.2$  (a) and  $a_{01} = 5$  (b); on the crack inclination angle  $\alpha$  for a number of angles  $\beta_1$  and  $a_{01} = 0.1$  (c),  $a_{01} = 10$  (d).

Обчислено відносні КІН  $F_{III}^{\pm}$  (за навантаження (4),  $\gamma = 0$ ) у віддаленій (суцільні лінії) та ближній (штрихові) до еліптичного ортотропного включення ( $b/a = 0,5$ ;  $\gamma_3^1 = 0,5$ ;  $\beta_1 = 0$ ) вершинах нахиленої під кутом  $\alpha$  тріщини ( $l/a = 0,5$ ;  $\alpha_1 = \pi/6$ ) у ортотропній матриці ( $\gamma_{30}^0 = 2$ ) за різних кутів повороту осей її ортотропії  $\beta_0$  (рис. 4a, b). Поведінку відносних КІН у ближній вершині тріщини  $A$  (див. рис. 1b,  $l/a = 0,1$ ) в кусково-однорідному ортотропному тілі

( $\gamma_{30}^0 = \gamma_3^1 = 1/\sqrt{3}$ ) за вертикального зміщення тріщини ( $h/l \in \{1; 60\}$ ) подано на рис. 4с, d для низки кутів нахилу  $\alpha$  тріщини до осі  $Ox$ . Суттєвий вплив на КІН має орієнтація тріщини стосовно включення, а зміна анізотропії матриці є менш відчутною для заданого розхилу пружних характеристик матриці. Усі криві мають асимптотичний характер і суттєво відрізняються для відносно податливого ( $a_{01} = 0,1$ ) (рис. 4с) та відносно жорсткого ( $a_{01} = 10$ ) (рис. 4d) включень.

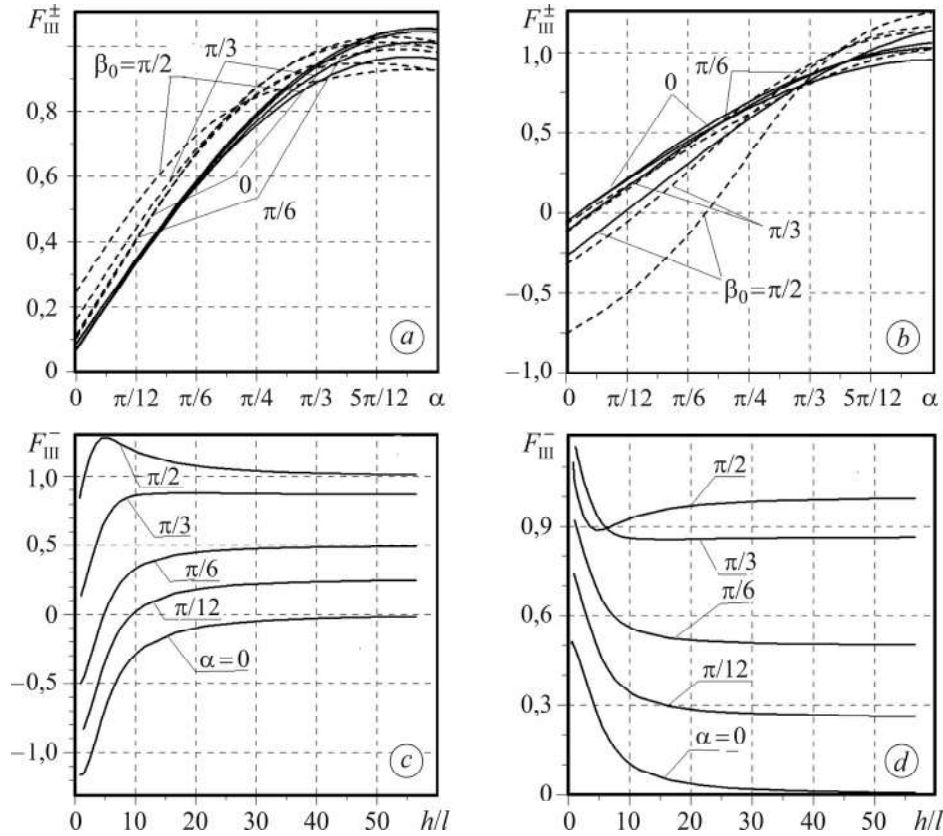


Рис. 4. Залежності відносних КІН у вершинах тріщини B ( $F_{III}^+$  – суцільні лінії) та A ( $F_{III}^-$  – штрихові) від кута нахилу тріщини  $\alpha$  для низки кутів  $\beta_0$  та  $a_{01} = 1/15$  (a),  $a_{01} = 15$  (b); у вершині A від співвідношення  $h/l$  для різних кутів  $\alpha$  та  $a_{01} = 0,1$  (c),  $a_{01} = 10$  (d).

Fig. 4. Dependences of the relative SIF at the crack tips B ( $F_{III}^+$  – solid lines) and A ( $F_{III}^-$  – dashed) on the crack inclination angle  $\alpha$  for a number of angles  $\beta_0$  and  $a_{01} = 1/15$  (a),  $a_{01} = 15$  (b); at the tip A on the ratio  $h/l$  for different angles  $\alpha$  and  $a_{01} = 0.1$  (c),  $a_{01} = 10$  (d).

Числові розрахунки (рис. 3с, d) виконані також для пружних та геометричних параметрів задачі [16]. Отримані криві відносних КІН для ортотропного тіла з еліптичним включенням та прямолінійною тріщиною (див. рис. 1b) в окремому випадку ( $\alpha_1 = \alpha$ ) збігаються з результатами праці [16], де задачу розв'язано іншим методом. За прямолінійної тріщини у матриці також розраховували розподіли контактних (22) і контурних зсувних напружень зі сторони включення (23) та матриці (24). Для віддаленої від включення тріщини ( $d/a > 25$ ) отримані розподіли напружень добре узгоджуються з результатами, одержаними раніше [13] для еліптичного включення в ортотропному тілі.

## ВИСНОВКИ

За допомогою методу СІР розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для анізотропного тіла зі скінченними пружними анізотропними криволінійними включеннями та тріщинами зведено до систем СІР першого та другого родів. Методом механічних квадратур розв'язано числово задачу для одного анізотропного включення та прямолінійної тріщини в ортотропній матриці. Проаналізовано поведінку КІН в околах вершин тріщини за різних геометричних та пружних параметрів задачі та оцінено вплив включення на зміну КІН. Результати можна використати для підбору оптимальних параметрів кусково-однорідного анізотропного тіла, щоб максимально зменшити КІН у вершинах тріщини та концентрації напружень поздовжнього зсуву на межі розділу матеріалів.

1. *Lekhnitskii S. G.* Anisotropic Plates. – New York: Gordon and Breach, 1968. – 534 p.
2. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. *Sih G. C., Paris P. C., and Irwin G. R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // *Int. J. Fract. Mech.* – 1965. – **1**, № 3. – P. 189–203. <https://doi.org/10.1007/BF00186854>
4. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // *Int. J. Solids Struct.* – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90012-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90012-9)
5. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1976. – № 5. – С. 91–97.
6. *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 588 p.
7. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
8. *Божидарнік В. В., Андрейків О. С., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. У 2-х т. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – **2**. – 424 с.
9. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44555-7>
10. *Stress state of an orthotropic plate at the holes with sharp and rounded tips / M. P. Savruk, A. Kazberuk, V. S. Kravets, and A. B. Chornenkyi // Materials Science.* – 2023. – **58**, № 6. – P. 709–716. <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00720-3>
11. *Maksymovych O. and Podhorecki A.* Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2019. – **104**. – P. 364–372. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039>
12. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Теория линейно-армированного композиционного материала с анизотропными компонентами структуры // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1978. – № 6. – С. 53–63.
13. *Determination of the stress state of an anisotropic body with smooth curvilinear inclusions under longitudinal shear / M. P. Savruk, V. S. Kravets, L. Yo. Onyshko, and O. I. Kvasniuk // Materials Science.* – 2024. – **59**, № 5. – P. 591–600. <https://doi.org/10.1007/s11003-024-00815-5>
14. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1980. – № 4. – С. 103–110.
15. *Архипенко К. М., Кривий О. Ф.* Тріщина та включення за умов повного зчеплення в кусково-однорідній анізотропній площині // *Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика. Механіка.* – 2013. – **18**, № 2. – С. 97–104.
16. *Chao C. K. and Chiang T. F.* Antiplane interaction of an anisotropic elliptic inclusion with an arbitrarily oriented crack // *Int. J. of Fracture.* – 1996. – **75**. – P. 229–245. <https://doi.org/10.1007/BF00037084>
17. *Саврук М. П., Зеленьак В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.

Одержано 21.08.2024