

УДК 539.3

## ПОБУДОВА ТРИВИМІРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

В. П. РЕВЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Розглянуто лінійну модель теорії термопружності для ізотропного тіла в циліндричній системі координат. Стационарна температура задовольняє тривимірне рівняння Лапласа. Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь Нав'є, яка описує термопружний напружений стан тіла, подано як суму однорідного і часткового розв'язків. Частковий, який не містить пружних переміщень, названо температурним розв'язком. Записано теорему про те, що сума нормальних температурних напружень дорівнює нулю. Для розв'язку рівнянь Нав'є температуру подано у вигляді ряду за функціями Бесселя, за властивостями яких побудовано температурний розв'язок рівнянь Нав'є. Наведено аналітичні формули для опису температурних переміщень і напружень в явному вигляді. Наведено загальний розв'язок рівнянь теорії термопружності в циліндричній системі координат через чотири гармонічні функції.

**Ключові слова:** *термопружність, циліндрична система координат, температурні переміщення, часткові розв'язки рівнянь Нав'є, напруження.*

A linear model of the theory of thermoelasticity for an isotropic body in the cylindrical coordinate system is considered. The stationary temperature satisfies a three-dimensional Laplace equation. The general solution of the system of Navier's differential equations, which describes the thermoelastic stress state of the body, is presented as a sum of homogeneous and partial solutions. The partial solution, which does not contain the elastic displacements, is called the temperature solution. The theory is written that the sum of normal temperature stresses is zero. To solve the Navier's equations the temperature is presented in the form of Bessel series, according to which properties the temperature solution of the Navier's equations is constructed. Analytical formulas for the description of temperature displacements and stresses in explicit form are given. The general solution of the equations of the theory of thermoelasticity in terms of four harmonic functions is presented.

**Keywords:** *thermoelasticity, cylindrical coordinate system, temperature displacements, partial solutions of Navier's equations, stresses.*

**Вступ.** Термопружні матеріали, які перебувають під дією різноманітних температурних полів, застосовують у багатьох галузях техніки [1–3]. Під час досліджень тривимірних стаціонарних задач теорії термопружності [4, 5] використовують відомі розв'язки рівнянь теорії пружності, до яких додають температурний розподіл переміщень, залежний від термопружного потенціалу [2, 4]. Переважна більшість часткових розв'язків рівнянь теорії термопружності побудовані за допомогою термопружного потенціалу [3–6]. Розроблено [7] методику аналітико-числової оцінки осесиметричних температурних напружень у порожньому циліндрі скінченної довжини. У праці [8] знайдено нові фізично обґрунтовані часткові розв'язки рівнянь теорії термопружності без використання термопружного потенціалу, які точніше враховують вплив температурного поля на напружений стан таких тіл. У праці [9], застосовуючи результати статті [8], знайшли як частковий, так і загальний розв'язки системи рівнянь теорії термопружності в циліндричній системі координат, коли температура не залежить від осевої змінної.

*Контактна особа:* В. П. РЕВЕНКО, e-mail: victorrev@ukr.net

**Формулювання задачі.** Початкову температуру за відсутності температурних напружень вважатимемо рівною нулю. Температура  $T$  у тілі змінюється в таких межах, що пружні і теплопровідні коефіцієнти матеріалу можна моделювати сталими.

Запишемо співвідношення Дюамеля–Неймана [1, 3] для твердого тіла:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G \left[ \varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right], & \sigma_\varphi &= 2G \left[ \varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right], \\ \sigma_z &= 2G \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right],\end{aligned}\quad (1)$$

де  $e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi$  – об’ємне розширення;  $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$ ,  $\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  – деформації відносного видовження;  $u_r$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_z$  – пружні переміщення.

Підставимо співвідношення (1) і відомі дотичні напруження у рівняння рівноваги термопружного тіла у циліндричній системі координат та запишемо систему диференціальних рівнянь Нав’є з частинними похідними [1, 2]:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} &= 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \nabla^2 u_\varphi + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{r \partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} &= 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial z},\end{aligned}\quad (2)$$

де  $\nabla^2 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$  – оператор Лапласа [10]. У тілі задане відоме стаціонарне температурне поле  $T(r, \varphi, z)$  без внутрішнього виділення тепла:

$$\nabla^2 T = 0. \quad (3)$$

Рівняння Нав’є (2) розглядатимемо як систему тривимірних диференціальних рівнянь з ненульовими правими частинами. Її загальний розв’язок подамо [8] як суму однорідного і часткового розв’язків. Частковий, як правило, визначають з точністю до деякого однорідного розв’язку. Під час розв’язання багатьох практичних і теоретичних задач теорії термопружності необхідно знайти напружено-деформований стан тіла, який залежить тільки від температури і не містить пружних переміщень. Тому розділимо переміщення

$$u_r = u_r^e + u_r^\tau, \quad u_\varphi = u_\varphi^e + u_\varphi^\tau, \quad u_z = u_z^e + u_z^\tau, \quad (4)$$

де  $u_r^e$ ,  $u_\varphi^e$ ,  $u_z^e$  – компоненти вектора пружних переміщень, а  $u_r^\tau, \dots$  – температурних, які однозначно залежать від температури (3) і не містять пружних переміщень. Тут не досліджуємо вплив температури на напружений стан конкретного тіла за врахування крайових умов на його зовнішній поверхні [6]. Використаємо такі результати праць [8, 9].

**Означення.** Частковий розв’язок  $u_r^\tau, u_\varphi^\tau, u_z^\tau$  системи рівнянь термопружності (2) називатимемо температурним, якщо він не містить пружних переміщень.

**Теорема 1** [8, 9]. Для температурних розв’язків системи рівнянь (2), (3) виконуються залежності

$$e^\tau = 3\alpha T, \quad \Theta^\tau = 0, \quad (5)$$

де  $e^\tau = \varepsilon_r^\tau + \varepsilon_\varphi^\tau + \varepsilon_z^\tau$ ,  $\Theta^\tau = \sigma_r^\tau + \sigma_\varphi^\tau + \sigma_z^\tau$  – сума нормальних напружень.

**Побудова температурного розв'язку рівнянь теорії термопружності.** Підставимо в систему (2) об'ємне розширення (5) і одержимо для шуканого часткового розв'язку  $u_r^\tau, u_\varphi^\tau, u_z^\tau$  систему трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r^\tau - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^\tau}{\partial \varphi} - \frac{u_r^\tau}{r^2} &= -\alpha \frac{\partial T}{\partial r}, & \nabla^2 u_z^\tau &= -\alpha \frac{\partial T}{\partial z}, \\ \nabla^2 u_\varphi^\tau + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^\tau}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^\tau}{r^2} &= -\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Враховуючи відомі результати [8, 9], частковий температурний розв'язок системи рівнянь (6) шукатимемо у вигляді

$$u_r^\tau = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \chi_1 \Omega_r, \quad u_\varphi^\tau = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \chi_1 \Omega_\varphi, \quad u_z^\tau = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \chi_1 \Omega_z, \quad (7)$$

де  $\vartheta(r, \varphi, z) = \chi(r\Omega_r + z\Omega_z)$  – бігармонічна основна функція;  $\Omega_z = \int T dz$  – гармонічна функція;  $\Omega_r, \Omega_\varphi$  – невідомі тривимірні функції;  $\chi = -\alpha/6$ ;  $\chi_1 = 4\alpha/3$ . Функції  $\Omega_r, \Omega_\varphi$  і  $\Omega_z$  залежать від температури і дорівнюють нулю, якщо температура рівна нулю. Із цих означень і другого рівняння (6) маємо:

$$\nabla^2 \vartheta(r, \varphi, z) = -\alpha T(r, \varphi, z), \quad \nabla^2 r\Omega_r = 4T. \quad (8)$$

Отже, функція  $r\Omega_r$  – бігармонічна, а друге рівняння (6) задоволене. Зі співвідношень (7) визначимо температурні деформації:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^\tau &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \chi_1 \Omega_r \right), & \varepsilon_z^\tau &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \chi_1 \Omega_z \right), \\ \varepsilon_\varphi^\tau &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \chi_1 r \Omega_\varphi \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \chi_1 \Omega_r \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Підставимо вираз (9) у перше рівняння (5) і одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\Omega_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Omega_\varphi = 2rT. \quad (10)$$

Для розв'язання системи рівнянь (6) використаємо залежності [10, 11]

$$\nabla^2 rU = r\nabla^2 U + 2\frac{\partial}{\partial r} U + \frac{1}{r} U, \quad \nabla^2 \frac{\partial}{\partial r} U = \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 U + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} U + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (11)$$

Підставимо переміщення (7) в перше і третє рівняння рівноваги (6) і, застосовуючи залежності (8), (11), спростимо їх:

$$\nabla^2 \Omega_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Omega_\varphi - \frac{1}{r^2} \Omega_r = 0, \quad \nabla^2 \Omega_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Omega_r - \frac{1}{r^2} \Omega_\varphi = 0. \quad (12)$$

Враховуючи першу формулу (11), перепишемо друге рівняння (8):

$$\nabla^2 \Omega_r + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Omega_r + \frac{1}{r^2} \Omega_r = \frac{4}{r} T. \quad (13)$$

Отже, система рівнянь (12) буде задоволена, якщо вжити співвідношення (10), (13). Також встановили, що для побудови температурного розв'язку достатньо розв'язати тільки два рівняння: друге рівняння (8) і рівняння (10). Перепишемо їх разом:

$$\nabla^2 r \Omega_r = 4T, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \Omega_\varphi = 2rT - \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega_r). \quad (14)$$

Таким чином, достатньо розв'язати тільки перше рівняння (14), оскільки невідому функцію  $\Omega_\varphi$  визначаємо із другого рівняння (14).

Для розв'язку першого рівняння (14) подамо температуру (3) у вигляді ряду:

$$T(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} e^{-\beta_k z} J_n(\beta_k r) \cos n\varphi, \quad (15)$$

де  $a_{n,k}$  – невідомі коефіцієнти;  $J_n(\beta r)$  – функції Бесселя [10, 11], які задовольняють рівняння

$$\nabla_n J_n(\beta r) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] J_n(\beta r) = 0. \quad (16)$$

Підставимо температуру (15) в інтеграл  $\Omega_z = \int T dz$  і визначимо його:

$$\Omega_z = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} a_{n,k} e^{-\beta_k z} J_n(\beta_k r) \cos n\varphi. \quad (17)$$

Ситуацію, коли температура не залежить від змінної  $z$ , вивчали раніше [9], а випадок, коли параметр  $n = 0$ , потрібно досліджувати окремо. Зауважимо, що розв'язок (7) побудований за припущення, що температура залежить від трьох змінних.

Розкладемо функцію  $\Omega_r(r, \varphi, z)$  у ряд і помножимо його на  $r$ :

$$r \Omega_r(r, \varphi, z) = r \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{r,n}(\beta_k r) e^{-\beta_k z} \cos n\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\beta_k r) e^{-\beta_k z} \cos n\varphi, \quad (18)$$

де  $\Psi_n(\beta_k r) = r \Omega_{r,n}(\beta_k r)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  – невідомі функції. Врахуємо розклад (18) і знайдемо вирази коефіцієнтів ряду (18) для шуканої функції  $\Omega_r$ :

$$\Omega_{r,n}(\beta_k r) = \Psi_n(\beta_k r)/r, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Підставимо ряди (15), (18), (19) в перше рівняння (14) і одержимо вираз для визначення невідомих функцій  $\Psi_n(\beta_k r)$ :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \Psi_n(\beta r) = 4a_n J_n(\beta r), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Для побудови часткового розв'язку рівнянь (20) використаємо залежності (11) і властивості функцій Бесселя [11]. Після математичних перетворень знаходимо часткові розв'язки:

$$\Psi_n(\beta r) = 2a_n r J_{n+1}(\beta r)/\beta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Підставимо в залежності (19) вираз (21) і одержимо:

$$\Omega_{r,n}(\beta_k r) = 2a_{n,k} J_{n+1}(\beta_k r)/\beta_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Врахуємо вирази (18), (22) і запишемо шукану функцію  $\Omega_r$  у вигляді ряду

$$\Omega_r(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_k} a_{n,k} J_{n+1}(\beta_k r) e^{-\beta_k z} \cos n\varphi. \quad (23)$$

Із другого рівняння (14) після застосування формул додавання функцій Бесселя [11] і інтегрування матимемо:

$$\Omega_\varphi(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_k} a_{n,k} J_{n+1}(\beta_k r) e^{-\beta_k z} \sin n\varphi. \quad (24)$$

Використовуючи співвідношення (7), (15), (17), (23), (24), знайдемо основну функцію у вигляді ряду:

$$\vartheta(r, \varphi, z) = -\frac{\alpha}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} a_{n,k} [2rJ_{n+1}(\beta_k r) - zJ_n(\beta_k r)] e^{-\beta_k z} \cos n\varphi. \quad (25)$$

Отже, функція  $r\Omega_r(r, \varphi, z)$  є бігармонічною, а функція  $\vartheta(r, \varphi, z)$  задовольняє перше рівняння (8).

**Визначення температурних переміщень, деформацій і напружень.** За формулами додавання функцій Бесселя [11] і співвідношеннями (7), (16), (17), (23)–(25) знаходимо вирази для температурних переміщень:

$$\begin{aligned} u_r^\tau &= \frac{\alpha}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{\beta_k} \left\{ \left[ (n+8) - \frac{z}{2} \beta_k \right] J_{n+1} + \left[ \frac{z}{2} \frac{n}{r} - \beta r \right] J_n(\beta r) \right\} e^{-\beta_k z} \cos n\varphi, \\ u_\varphi^\tau &= \frac{\alpha}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} a_{n,k} \left[ (8+n)J_{n+1} - z \frac{n}{2r} J_n \right] e^{-\beta_k z} \sin n\varphi, \\ u_z^\tau &= \frac{\alpha}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \left\{ rJ_{n+1}(\beta_k r) - \frac{1}{2} \left( \frac{7}{\beta_k} + z \right) J_n(\beta_k r) \right\} e^{-\beta_k z} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Перевірили, що переміщення (26) визначають частковий розв'язок рівнянь (2) і є температурними.

З допомогою виразів (9), (26) і розраховуємо деформації відносного видовження. За співвідношеннями (1), (5) обчислюємо нормальні напруження

$$\{\sigma_r^\tau, \sigma_\varphi^\tau, \sigma_z^\tau\} = 2G \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \{F_{n,k}^1(\beta_k r), F_{n,k}^2(\beta_k r), F_{n,k}^3(\beta_k r)\} e^{-\beta_k z} \cos n\varphi, \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} F_{n,k}^1 &= \frac{\alpha}{3} \left\{ \left[ 4 + \frac{1}{2} z \left( \frac{n^2 - n}{\beta_k r^2} - \beta_k \right) \right] J_n + \left[ r\beta_k - \frac{(n+9)n+8}{\beta_k r} + \frac{1}{2} \frac{z}{r} \right] J_{n+1} \right\}, \\ F_{n,k}^2 &= \frac{\alpha}{3} \left\{ \left[ \frac{(n+9)n+8}{\beta_k r} - \frac{1}{2} \frac{z}{r} \right] J_{n+1} - \left[ 4 + \frac{1}{2} z \frac{n^2 - n}{\beta_k r^2} \right] J_n \right\}, \\ F_{n,k}^3 &= \frac{\alpha}{3} \left[ \frac{1}{2} \beta_k z J_n - \beta_k r J_{n+1} \right], \quad J_n = J_n(\beta_k r). \end{aligned}$$

Підставимо у відомий вираз дотичних напружень [3] переміщення (26) і після математичних перетворень знайдемо дотичні температурні напруження:

$$\{\tau_{r\varphi}^\tau, \tau_{rz}^\tau, \tau_{\varphi z}^\tau\} = \frac{\alpha G}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \{P_{n,k}^1 \sin n\varphi, P_{n,k}^2 \cos n\varphi, P_{n,k}^3 \sin n\varphi\} e^{-\beta_k z}, \quad (28)$$

де

$$P_{n,k}^1(r, z) = \left[ 2(4+n) - (n-1)n \frac{z}{\beta_k r^2} \right] J_n + \left[ n \frac{z}{r} - 2(8+n)(n+1) \frac{1}{\beta_k r} \right] J_{n+1},$$

$$P_{n,k}^2(r) = 4 \left( 3J_{n+1} - \frac{n}{\beta_k r} J_n \right), \quad P_{n,k}^3 = \frac{7}{2\beta_k} \frac{1}{r} J_n + 2(4+n)J_{n+1}, \quad J_n = J_n(\beta_k r).$$

Подамо загальний розв'язок рівнянь (2) як суму однорідного [12] і температурного (7), (27), (28) розв'язків.

**Теорема 2.** *Загальний розв'язок системи рівнянь теорії термопружності (2) для температури (3), (15) можна подати у вигляді*

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + u_r^\tau, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi + u_z^\tau, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q}{\partial r} + u_\varphi^\tau, \quad (29)$$

де  $P = z\Phi + \Psi$ ;  $\Phi(r, \varphi, z)$ ,  $\Psi(r, \varphi, z)$ ,  $Q(r, \varphi, z)$  – гармонічні функції переміщень [12].

**Доведення.** Загальний напружений стан пружного тіла у циліндричній системі координат описано раніше [12], додамо тільки температурні переміщення (26) і одержимо формули (29). Кінець доведення.

### ВИСНОВКИ

Встановлено, що у циліндричній системі координат сума нормальних температурних напружень дорівнює нулю, а об'ємне розширення  $e = 3\alpha T$ . Частковий розв'язок рівнянь термопружності (2) для тривимірної температури, яка задовольняє стаціонарне рівняння (3), подаємо не єдиною формулою, а у вигляді ряду. Вперше аналітично побудовані в явному вигляді температурні переміщення і напруження, які не містять пружних напружень.

1. Noda N., Hetnarski R. B., and Tanigawa Y. Thermal stresses. – New York: Taylor&Francis, 2003. – 508 p.
2. Nowacki W. Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
3. Sadd M. H. Elasticity: Theory, applications, and numeric. – Burlington: Acad. Press., 2009. – 474 p.
4. Melan E. and Parkus H. Wärmespannungen: Infolge Stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 s.
5. Kovalenko A. D. Thermoelasticity: Basic Theory and Applications. – Groningen, the Netherlands: WoltersNoordhoff, 1969. – 302 p.
6. Timoshenko S. P. and Goodier J. N. Theory of Elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1977. – 568 p.
7. Yuzvyak M., Tokovyy Y., and Yasinsky A. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // J. Thermal Stresses. – 2021. – **44**, № 3. – P. 359–376. <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1826376>
8. Revenko V. Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory // Scientific J. of TNTU. – 2022. – **108**, № 4. – P. 64–73.
9. Revenko V. Finding physically justified partial solutions of the equations of the thermoelasticity theory in the cylindrical coordinate system // Scientific J. of TNTU. – 2023. – **112**, № 4. – P. 58–66.
10. Korn G. A. and Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. – New York: Dover Publications, 2000. – 1152 p.
11. Watson T. G. A treatise on the theory of Bessel functions. – Cambridge: Cambridge University Press., 1980. – 818 p.
12. Revenko V. P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 7. – P. 730–741. <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4>

Одержано 25.04.2024