

УДК 539.375

ДОСЛІДЖЕННЯ СТИСКУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ЗІ ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

О. Л. КІПНІС

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Досліджено плоску задачу механіки руйнування про стиск кусково-однорідного напівобмеженого тіла зі закріпленою межею вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Запропоновано в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл аналітико-числовий підхід, який полягає у зведенні вихідної крайової задачі до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Для випадку, коли компоненти матеріалу тіла описано пружним потенціалом Бартенєва–Хазановича, а відношення їх жорсткостей не перевищує певного значення, обчислено критичні параметри навантаження, які відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщини на початковому етапі руйнування.

Ключові слова: *матеріал з покриттям, приповерхнева міжфазна тріщина, стиск вздовж тріщини, критичні навантаження.*

A two-dimensional problem of fracture mechanics about the compression of a piecewise-homogeneous semi-bounded body with a boundary fixed in a special way along an interface near-surface crack is studied. The analytical-numerical approach proposed within the framework of the three-dimensional linearized stability theory of deformable bodies consists in reducing the original boundary value problem to an eigenvalue problem for a system of Fredholm integral equations of the first kind. For the case when the constituent materials of the body are described by the Bartenev–Khazanovich elastic potential, and the ratio of their rigidities does not exceed a certain value, the value of the critical load parameters corresponding to the local loss of stability of the material in the vicinity of the crack at the initial stage of fracture is calculated.

Keywords: *material with coating, near-surface interface crack, compression along the crack, critical loads.*

Вступ. Задачі для тіл, які стискають вздовж площин розташування тріщин, належать до неklasичних задач механіки руйнування [1, 2] через незастосовність класичних критеріїв [3, 4] за такої схеми навантаження. Найефективнішим підходом для їх дослідження є застосування апарата тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [2] із залученням відповідних критеріїв руйнування [5].

Застосувачи співвідношення ТЛТСДТ, вивчили плоскі і просторові осесиметричні задачі про стиск однорідних тіл вздовж тріщин (наприклад, [6, 7]) та деякі задачі про стиск необмежених кусково-однорідних тіл вздовж міжфазних тріщин (наприклад, [8–10]). Докладний огляд результатів дослідження вказаних задач наведено раніше [11, 12].

У праці [13] з використанням подання загальних розв'язків плоских лінеаризованих задач через комплексні потенціали сформульовано задачі про стиск напівобмеженого кусково-однорідного тіла з вільною межею вздовж міжфазної тріщини, при цьому числових результатів дослідження не наведено.

Водночас розв'язків задач, поданих у загальній формі для широкого класу матеріалів, про стиск кусково-однорідних напівобмежених тіл вздовж тріщин, розташованих на межі поділу півплощини та тонкої смуги покриття з різних матеріалів, які є актуальними для вивчення проблем руйнування тіл з покриттям, досі не отримано.

Формулювання задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне напівобмежене тіло, утворене в результаті жорсткого з'єднання півплощини $x_2 \geq 0$ (матеріал "1", основа) та смуги $-h \leq x_2 \leq 0$ (матеріал "2", покриття). Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну тріщину довжини $2a$ (рис. 1), береги якої вільні від напружень. Межа тіла $x_2 = -h$ закріплена так, що точки цієї межі можуть зміщуватися лише в нормальному до неї напрямку.

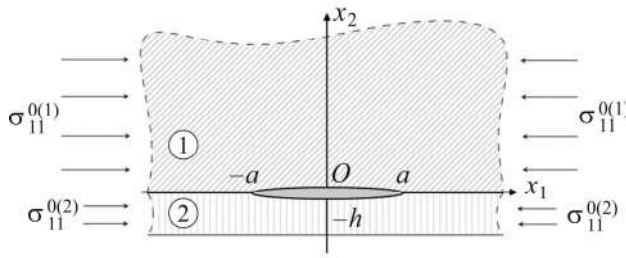


Рис. 1. Кусково-однорідна півплощина з міжфазною тріщиною.

Fig. 1. A piecewise-homogeneous half-plane with an interface crack.

Нехай на нескінченності кожен з матеріалів стискають вздовж осі Ox_1 сталими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = \text{const}, \quad i = 1, 2; \quad \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)} \quad (1)$$

так, щоб забезпечити однакові укорочення вздовж цієї осі для обох матеріалів конструкційного тіла

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_1 < 1, \quad (2)$$

де λ_1^1, λ_1^2 – коефіцієнти укорочення матеріалів "1" і "2", які обумовлені стискальними зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно (тут і далі верхній індекс "1" або "2" позначення для матеріалів півплощини "1" або смуги "2", відповідно; верхній індекс "0" позначення для початкового стану).

У цьому випадку докритичний напружено-деформований стан у кожній з областей є статично визначеним, однорідним і його можна описати виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Крайові умови сформульованої задачі записуємо так:

$$\begin{aligned} t_{22}^{(2)} &= 0, \quad u_1^{(2)} = 0 & (x_2 = -h, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} &= t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} & (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(2)} &= 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 & (x_2 = 0, |x_1| \leq a); \\ u_1^{(1)} &= u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} & (x_2 = 0, |x_1| > a). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$ – збурення компонент несиметричного тензора напружень Піоли-Кірхгофа; $\vec{t}, \vec{u}$ – вектор збурення переміщень.

В описаному формулюванні крайова задача з умовами (4) еквівалентна задачі плоскої деформації для смуги, що жорстко з'єднана з двома півплощинами і стискається вздовж двох паралельних міжфазних тріщин (для антисиметричної (згинної) форми втрати стійкості) (рис. 2). Аналогічну задачу для однорідного тіла дослідили раніше [7], а з використанням методу скінченних різниць для низки конкретних композитних матеріалів, які, згідно з термінологією [2], відповідають випадку нерівних коренів характеристичних рівнянь – у праці [9].

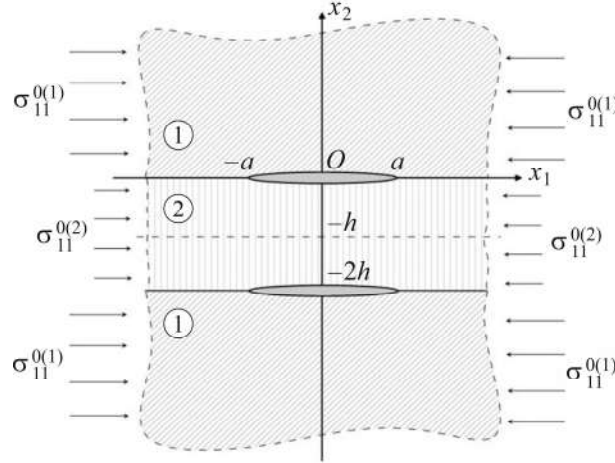


Рис. 2. Смуга, жорстко з'єднана з двома півплощинами, з двома паралельними міжфазними тріщинами.

Fig. 2. A strip rigidly connected to two half-planes with two parallel interface cracks.

Гранична задача для гармонічних потенціальних функцій. Зведемо задачу з крайовими умовами (4) до граничної задачі для гармонічних потенціальних функцій.

Умови однорідності в кожному з матеріалів докритичного стану (1)–(3) є необхідними умовами застосовності співвідношень ТЛТСДГ.

Використавши загальний підхід до лінеаризації нелінійних співвідношень, отримуємо [1] лінеаризовані співвідношення пружності для стисливих матеріалів у разі плоскої задачі:

$$t_{kl}^{(i)} = \omega_{klmn}^i \frac{\partial u_m^{(i)}}{\partial x_n}, \quad i, k, l, m, n = 1, 2,$$

де $\omega_{klmn}^i = \omega_{klmn}^i(\lambda_1, \lambda_2)$ є компонентами тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}^{(i)}$ і характеризують вибрану модель матеріалу. Аналогічні подання отримані і для нестисливих тіл (відповідні компоненти тензорів $\tilde{\omega}^{(i)}$ треба замінити на компоненти тензорів $\tilde{\alpha}^{(i)}$).

Раніше побудовано [2, 6] загальні розв'язки лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції. Вид цих подань залежить від співвідношення коренів характеристичного рівняння для вибраної моделі матеріалу. Тут досліджуємо випадок, коли характеристичне рівняння для кожного з матеріалів "1" і "2" має рівні корені

$$n_{1,2}^i = n = c \pm \sqrt{c^2 - \omega_{2222}^i \omega_{2112}^i (\omega_{1111}^i \omega_{1221}^i)^{-1}}, \quad 2c = \frac{\omega_{2222}^i}{\omega_{1221}^i} + \frac{\omega_{2112}^i}{\omega_{1111}^i} - \frac{(\omega_{1122}^i + \omega_{1212}^i)^2}{\omega_{1111}^i \omega_{1221}^i},$$

а самі матеріали є різними вискоеластичними матеріалами, проте їх можна описати однаковими пружними потенціалами.

Введемо до розгляду для кожного з матеріалів гармонічні потенціальні функції $F^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, які пов'язані між собою співвідношеннями

$$\varphi^{(i)} = -(\varphi_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)}), \quad F^{(i)} = -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{\partial z_1}, \quad \Phi^{(i)} = \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial z_1}, \quad z_1 = n^{-1/2} x_2.$$

Тоді є подання збурень напружень і переміщень для кожного з компонент кусково-однорідного тіла:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} &= -\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_1}; \quad u_2^{(i)} = p_1^i F^{(i)} + p_2^i \Phi^{(i)} + p_2^i z_1 \frac{\partial F^{(i)}}{\partial z_1}; \\ t_{21}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[k_1^i F^{(i)} + k_2^i \Phi^{(i)} + k_2^i z_1 \frac{\partial F^{(i)}}{\partial z_1} \right]; \\ t_{22}^{(i)} &= k_4^i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial z_1} + k_5^i \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial z_1} + k_5^i z_1 \frac{\partial^2 F^{(i)}}{\partial z_1^2}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

коефіцієнти в яких є функціями компонентів тензорів $\tilde{\omega}^{(i)}$ (для стисливих тіл) або $\tilde{\alpha}^{(i)}$ (для нестисливих).

Використовуючи подання (5), отримуємо такі співвідношення для крайових умов (4) задачі в термінах потенціальних функцій:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} - h_1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} &= 0, \\ k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_1^2} &= 0, \quad h_1 = n^{-1/2} h \quad (z_1 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} &= k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1}, \\ k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} &= k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} \quad (z_1 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} &= 0, \quad k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} = 0 \quad (z_1 = 0, |x_1| \leq a); \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1}, \quad p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_1 = 0, |x_1| > a). \end{aligned} \quad (6)$$

Система інтегральних рівнянь задачі. Подамо невідомі потенціальні функції у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1 :

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 d\lambda, \quad \Phi^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 d\lambda, \\ F^{(2)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty [C_1(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_1) + C_2(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_1)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1}, \\ \Phi^{(2)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty [D_1(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_1) + D_2(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_1)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1}, \\ \varphi^{(1)}(x_1, z_1) &= -\int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi^{(2)}(x_1, z_1) = \int_0^\infty [D_2(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_1) + D_1(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_1)] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda \sinh \lambda h_1}.$$

Подання (7) враховують симетрію конфігурації відносно осі Ox_2 , забезпечують “загасання” збурень напружень на нескінченності, а також відповідають парності функцій $u_2^{(i)}(x_1, z_1)$ і непарності функцій $u_1^{(i)}(x_1, z_1)$ по координаті x_1 (тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \geq 0$).

Використавши перші чотири умови у виразі (6), приходимо до такої системи рівнянь стосовно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ ($\mu = \lambda h_1$):

$$\begin{aligned} k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0; \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0; \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0; \\ \mu C_1 - D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Визначаючи $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ і $D_2(\lambda)$ через $C_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, знаходимо

$$\begin{aligned} A &= \Delta^{-1} [(s_1 + \mu s_2 + \coth \mu \cdot s_3 + \mu \coth \mu \cdot s_4) C_1 + (s_4 + \coth \mu \cdot s_2) D_1], \\ B &= \Delta^{-1} [(r_1 + \mu r_2 + \coth \mu \cdot r_3 + \mu \coth \mu \cdot r_4) C_1 + (r_4 + \coth \mu \cdot r_2) D_1], \\ C_2 &= 0, \quad D_2 = \mu C_1, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1, \quad s_1 = -k_2^1 k_4^2, \quad s_2 = -k_2^2 k_5^1, \quad s_3 = -k_1^2 k_5^1, \quad s_4 = -k_2^1 k_5^2, \\ r_1 &= k_1^1 k_4^2, \quad r_2 = k_2^2 k_4^1, \quad r_3 = k_1^2 k_4^1, \quad r_4 = k_1^1 k_5^2. \end{aligned}$$

Формули (9) справедливі лише тоді, коли не виконується умова

$$\Delta \equiv k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1 = 0. \quad (10)$$

Значення λ_1^{cr} , яке отримуємо з розв’язання трансцендентного рівняння (10), є критичним, що відповідає приповерхневій нестійкості однорідної півплощини з вільною межею (з матеріалу “1” або “2”) без тріщини [1]. Значення λ_1^{cr} залежить тільки від виду пружного потенціалу, а тому є однаковим для обох матеріалів тіла. В задачі про стискання кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною верхня оцінка для критичного значення параметра λ_1 також дорівнює λ_1^{cr} – максимальному зі значень, що відповідає приповерхневій нестійкості матеріалу однієї з півплощин [1, 6].

З фізичних міркувань очевидно, що критичні значення параметра λ_1 задачі лежать в області $\lambda_1^{\text{cr}} < \lambda_1 < 1$, в якій рівність (10) не виконується.

Останні чотири умови (7) приводять до системи парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda \left[(k_4^2 + k_5^2 \mu \coth \mu) C_1 + k_5^2 D_1 \right] \cos \lambda x_1 d\lambda &= 0 \quad (|x_1| \leq a), \\ \int_0^\infty \left[(k_1^2 \coth \mu + \mu k_2^2) C_1 + k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 \right] \cos \lambda x_1 d\lambda &= \text{const} \quad (|x_1| \leq a); \\ \int_0^\infty [\alpha_1(\mu) C_1 + \alpha_2(\mu) D_1] \cos \lambda x_1 d\lambda &= 0 \quad (|x_1| > a), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \lambda [\beta_1(\mu)C_1 + \beta_2(\mu)D_1] \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 \coth x + a_3 x \coth x; & \alpha_2(x) &= a_3 + a_1 \coth x; \\ \beta_1(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 \coth x + c_3 x \coth x; & \beta_2(x) &= c_3 + c_1 \coth x; \\ a_0 &= \frac{r_1 p_2^1 + s_1 p_1^1}{\Delta}, & a_1 &= -p_2^2 + \frac{r_2 p_2^1 + s_2 p_1^1}{\Delta}, & a_2 &= -p_1^2 + \frac{r_3 p_2^1 + s_3 p_1^1}{\Delta}, \\ a_3 &= \frac{r_4 p_2^1 + s_4 p_1^1}{\Delta}, \\ c_0 &= \frac{r_1}{\Delta}, & c_1 &= \frac{r_2}{\Delta}, & c_2 &= \frac{r_3}{\Delta}, & c_3 &= 1 + \frac{r_4}{\Delta}, \end{aligned}$$

та додаткової умови

$$\int_0^\infty [\beta_1(\mu)C_1 + \beta_2(\mu)D_1] \sin \lambda a d\lambda = 0. \quad (13)$$

Зведемо систему парних інтегральних рівнянь (11), (12) до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповнених додатковою умовою.

Для зручності запишемо інтегральні рівняння (11) так:

$$\int_0^\infty Y_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a); \quad \int_0^\infty \lambda Y_2(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a),$$

де

$$Y_1(\lambda) = \alpha_1(\mu)C_1(\lambda) + \alpha_2(\mu)D_1(\lambda); \quad Y_2(\lambda) = \beta_1(\mu)C_1(\lambda) + \beta_2(\mu)D_1(\lambda). \quad (14)$$

Вибір функцій $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$ у вигляді

$$Y_1(\lambda) = \lambda^{-2} \int_0^a \varphi(t)(\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt; \quad Y_2(\lambda) = -h_1 \lambda^{-1} \int_0^a \psi(t)(\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt \quad (15)$$

дає змогу автоматично задовольнити умови (12). Тут $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – нові невідомі функції, неперервні зі своїми похідними на відрізок $[0, a]$.

Виразивши з умови (13) $C_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ через $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$ та підставивши отримані вирази в (11), для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1}x_1$, $\eta \equiv a^{-1}t$ приходимо до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{aligned} \int_0^1 K_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \int_0^1 K_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\ \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \text{const} &= 0, \quad \beta = h/a, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (16)$$

стосовно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi) \equiv a \varphi(a\xi)$, $g(\xi) \equiv a \psi(a\xi)$ і невідомої константи const , яка пов'язана з додатковою умовою (13). Останню ж подаємо так:

$$\int_0^1 g(\eta) d\eta = 0. \quad (17)$$

Ядра $K_1(\xi, \eta)$, $K_2(\xi, \eta)$, $M_1(\xi, \eta)$, $M_2(\xi, \eta)$ інтегральних рівнянь (16) мають вигляд

$$\begin{aligned} K_1(\xi, \eta) &= \int_0^\infty P_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda, \\ K_2(\xi, \eta) &= \int_0^\infty P_2(n^{-1/2}\beta\lambda) (\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1(\xi, \eta) &= \int_0^\infty Q_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda, \\
M_2(\xi, \eta) &= \int_0^\infty Q_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda, \\
P_1(x) &= \frac{(k_4^2 + k_5^2 x \coth x) \beta_2(x) - k_5^2 \beta_1(x)}{\delta(x)}, \quad P_2(x) = \frac{-(k_4^2 + k_5^2 x \coth x) \alpha_2(x) + k_5^2 \alpha_1(x)}{\delta(x)}, \\
Q_1(x) &= \frac{(k_2^2 x + k_1^2 \coth x) \beta_2(x) - k_2^2 \coth x \beta_1(x)}{\delta(x)}; \\
Q_2(x) &= \frac{-(k_2^2 x + k_1^2 \coth x) \beta_2(x) + k_2^2 \coth x \beta_1(x)}{\delta(x)}; \\
\delta(x) &= \alpha_1(x) \beta_2(x) - \alpha_2(x) \beta_1(x).
\end{aligned}$$

Таким чином, проблему зводять до задачі (16), (17) на власні значення стосовно параметра укорочення $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1$, $\lambda_1^{\text{cr}} < \lambda_1 < 1$ (значення $\lambda_1 = 1$ відповідає незбуреному стану), який характеризує докритичний стан та нелінійно входить до ядер інтегральних рівнянь. Задача (16), (17) отримана в загальній формі для широкого класу комбінацій двох стисливих або нестисливих високоеластичних матеріалів з рівними коренями характеристичних рівнянь. Перевагою запропонованого аналітико-числового підходу є те, що на відміну від підходів, які базуються на використанні числових методів скінченних різниць (наприклад, [9, 10]), моделі матеріалів конкретизують лише на фінальному етапі числового дослідження.

Аналіз числових результатів. Наведемо числові результати з дослідження задачі на власні значення (16), (17) для конкретної моделі матеріалу та порівняємо їх з результатами аналогічної задачі для однорідного тіла [7].

Розглянемо випадок, коли матеріали основи і покриття є нестисливими матеріалами з потенціалом Бартенєва–Хазановича [14], який характеризується однією сталою μ_i (визначає жорсткість матеріалу) для кожного матеріалу “1”, “2”. Тоді у разі плоскої задачі маємо [2]:

$$\begin{aligned}
n_1^i &= n_2^i = (\lambda_1)^2, \quad \lambda_2^i = (\lambda_1)^{-1}, \quad \sigma_{11}^{0(i)} = 2\mu_i(\lambda_1 - \lambda_2^i)(\lambda_1)^{-2}, \quad \lambda_1^{\text{cr}} = 0,577, \\
\varepsilon_1^{\text{cr}} &= 1 - \lambda_1^{\text{cr}} = 0,423, \quad i = 1, 2; \quad \varepsilon_1^i = 1 - \lambda_1^i - \text{відносне укорочення відповідного матеріалу вздовж осі } O x_1.
\end{aligned}$$

Тоді функції, які входять до складу інтегральних рівнянь (16), не залежать окремо від жорсткостей матеріалів, а тільки від їх відношення $g = \mu_2/\mu_1$.

Числове дослідження показує, що умова неперервності функцій $P_{1,2}$, $Q_{1,2}$ має вигляд

$$\delta(x) \equiv \alpha_1(x) \beta_2(x) - \alpha_2(x) \beta_1(x) \neq 0 \quad (x > 0)$$

і виконується для всіх параметрів навантаження $\lambda_1^{\text{cr}} < \lambda_1 < 1$ і значень

$$g < 2,357. \quad (18)$$

Числове дослідження задачі на власні значення (16), (17) реалізовано з використанням методу Бубнова–Гальоркіна [15].

На графіку рис. 3 наведено залежності критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ від відносної (нормованої на половину довжини тріщини) ширини смуги $\beta = h/a$: суцільна крива побудована за результатами дослідження задачі (16), (17) на власні значення для $\mu_1 = \mu_2$ (тобто, коли матеріали покриття “2” і

основи “1” однакові); штрихова – за результатами [7], отриманими під час дослідження аналогічної задачі для однорідного тіла.

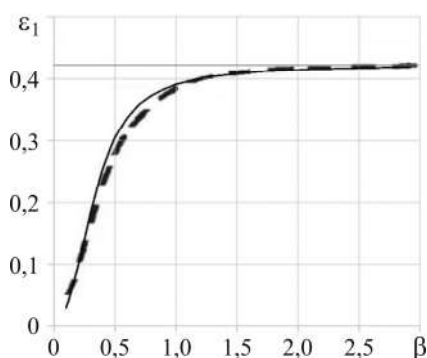


Рис. 3. Залежності критичного відносного укорочення від відносної ширини покриття в задачах про кусково-однорідну півплощину з міжфазною тріщиною за однакової жорсткості матеріалів основи і покриття (суцільна крива) та про однорідну півплощину з приповерхневою тріщиною (штрихова).

Fig. 3. Dependences of the critical relative contraction on the relative width of the coating in the problem of a piecewise-homogeneous half-plane with an interface crack at the same rigidities of the base and coating materials (solid curve) and the problem of a homogeneous half-plane with a near-surface crack (dashed curve).

Подано залежності критичного відносного укорочення ϵ_1 (рис. 4a) та критичного безрозмірного напруження стиску $\sigma = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1 = -\sigma_{11}^{0(2)} / 2\mu_2$ (рис. 4b) від відносної ширини смуги β для низки значень параметра g за умови (18).

Горизонтальні прямі $\epsilon_1 = \epsilon_1^{\text{cr}} = 0,423$ на рис. 3, 4a і $\sigma = \sigma^{\text{cr}} = 3,473$ на рис. 4b відповідають критичним значенням цих параметрів для приповерхневої нестійкості однорідної півплощини, виготовленої з нестисливого матеріалу з потенціалом Баргенсва–Хазановича [2, 6].

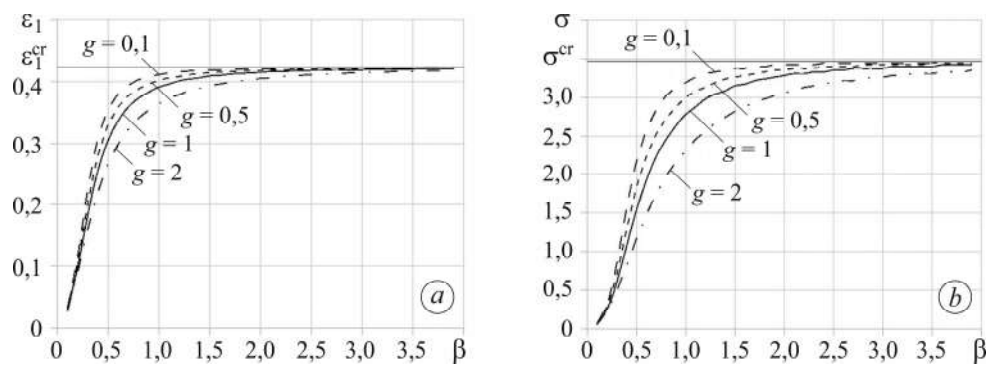


Рис. 4. Залежності критичного відносного укорочення (a) та критичного безрозмірного напруження стиску (b) від відносної ширини смуги для деяких значень параметра g .

Fig. 4. Dependence of the relative critical contraction (a) and the dimensionless critical compression stress (b) on the relative width of the strip for some values of parameter g .

Аналіз графіків показує, що за певного відношення жорсткостей матеріалів тіла (умова (18)) характер залежності параметрів навантаження є аналогічним до того, що і для однорідного тіла і при $\beta \rightarrow \infty$ критичні значення ϵ_1 асимптотично наближаються до верхніх значень цих величин, які відповідають одній міжфазній тріщині в нескінченному кусково-однорідному матеріалі [8] і є рівними значенням для приповерхневої нестійкості однорідної півплощини з вільною межею, виготовленої з відповідного матеріалу.

ВИСНОВКИ

Досліджено плоску неklasичну задачу механіки руйнування про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла зі закріпленою межею вздовж тріщини, розташованої на прямолінійній межі поділу двох однорідних середовищ. Запропонований аналітико-числовий підхід дає змогу звести вихідну крайову задачу до дослідження на власні значення системи однорідних лінійних рівнянь, яка отримана в загальній формі для широкого класу вискоеластичних матеріалів. Показано, що за певних відношень жорсткостей матеріалів тіла, механізм втрати стійкості, який реалізується за стискання кусково-однорідного напівобмеженого тіла зі закріпленою межею, є аналогічним випадку, коли напівобмежене тіло є однорідним, і пов'язаний з локальною втратою стійкості матеріалу біля тріщини та непов'язаний з внутрішньою чи приповерхневою втратою стійкості конструкційного матеріалу.

1. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х т. – К.: “ЛИТЕРА”, 2008.
2. Guz A. N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1999. – 555 p.
3. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1920. – **221**. – P. 163–198. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
4. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – **24**. – P. 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
5. Гузь А. Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315–1318.
6. Guz A. N., Bogdanov V. L., and Nazarenko V. M. Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks // Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 149–248.
7. Guz A. N., Nazarenko V. M., and Starodubtsev I. P. Planar problem of failure of structural materials in compression along two parallel cracks // Sov. Appl. Mech. – 1991. – **27**, № 4. – P. 352–360. <https://doi.org/10.1007/BF00896513>
8. Guz A. N. and Guz I. A. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 2. Exact solution for the case of equal roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, № 5. – P. 615–622. <https://doi.org/10.1007/BF02682075>
9. Guz I. A. Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, № 11. – P. 841–847. <https://doi.org/10.1007/BF00847037>
10. Guz I. A. and Kokhanenko Yu. V. Stability of laminated composite material in compression along microcrack // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, № 9. – P. 702–708. <https://doi.org/10.1007/BF00847367>
11. Guz A. N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, № 1. – P. 1–57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
12. Guz A. N. Nonclassical problems of fracture mechanics: to fiftieth anniversary of studies (review). III // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, № 4. – P. 343–415. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>
13. Bogdanov V. L. and Kipnis A. L. Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack // J. Math. Sciences. – 2021. – **253**, № 1. – P. 99–107. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05214-8>
14. Бартнев Г. М., Хазанович Т. Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 21–28.
15. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 383 с.

Одержано 29.05.2024