

УДК 539.3

ТЕРМОДЕФОРМОВАНІЙ СТАН АЛЮМІНІЄВОЇ ПЛАСТИНИ ЗА ІНДУКЦІЙНОЇ ТЕРМООБРОБКИ

Р. С. МУСІЙ, М. І. КЛАПЧУК

Національний університет "Львівська політехніка"

Запропоновано двовимірну фізико-математичну модель для визначення інтенсивності напружень у електропровідній пластині за її індукційного нагріву квазіусталеним електромагнетним полем. Сформульовано двовимірну задачу термомеханіки для електропровідної пластини прямокутного поперечного перерізу. Визначальними функціями є дотична до основ пластини компонента вектора напруженості магнетного поля, температура і компоненти тензора напружень. Запропоновано методику розв'язування сформульованої задачі термомеханіки, яка використовує апроксимацію визначальних функцій кубічними поліномами за товщиною змінною. Числово проаналізовано зміну в часі інтенсивності напружень, а також їх розподіл за поперечним перерізом алюмінієвої пластини залежно від параметрів індукційного нагріву та критерію Біо.

Ключові слова: електропровідна пластина, плоско-деформований стан, інтенсивності напружень, індукційна термообробка, поверхневий та суцільний нагрів.

A two-dimensional physical and mathematical model is proposed for determining the intensity of stresses in an electrically conductive plate during its induction heating by a quasi-steady electromagnetic field. A two-dimensional thermomechanical problem is formulated for an electrically conductive plate of rectangular cross-section. The component of the magnetic field vector tangent to the plate bases, the temperature, and the components of the stress tensor are the determining functions. A method for solving the formulated thermomechanical problem is proposed, which uses the approximation of the determining functions by cubic polynomials in the thickness variable. The change in the intensity of stresses over time, as well as their distribution over the cross-section of the aluminum plate depending on the parameters of induction heating and the Biot criterion, is numerically analyzed.

Keywords: electroconductive plate, plane-strained state, stress intensities, induction heat treatment, near-surface and continuous heating.

Вступ. Алюмінієві пластини часто використовують як конструктивні елементи в електротехнічних пристроях енергетики, в машинобудуванні, автомобільній та аерокосмічній промисловості. Під час технологічної термообробки таких пластин використовують дію зовнішніх електромагнетних полів (ЕМП), які впливають на їх механічні характеристики, довговічність і надійність експлуатації.

Математичні моделі, аналітичні та експериментальні підходи для опису та дослідження електромагнетних, теплових та механічних процесів розглядають у багатьох працях, зокрема [1–5]. У цих дослідженнях переважно використовували одновимірні моделі. Для глибшого вивчення закономірностей індукційного нагріву важливим є розвиток двовимірних фізико-математичних моделей. Мета роботи – побудувати двовимірну математичну модель термомеханіки для електропровідної пластини та дослідити на її основі закономірності термомеханічної

поведінки алюмінієвої пластини за індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП (КЕМП).

Вихідні положення фізико-математичної моделі. У декартовій системі координат $Oxyz$ розглядаємо електропровідну пластину прямокутного поперечного перерізу товщиною $2h$ і шириною $2d_*$. Початок системи координат (точка O) збігається з центром симетрії прямокутника поперечного перерізу пластини. Надалі розглядатимемо безрозмірні декартові координати $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$ і півширину пластини $d = d_*/h$. Пластина безмежно довга по осі Ox_2 . Її ширина відкладена вздовж осі Ox_1 , а товщина – вздовж осі Ox_3 . Матеріал пластини однорідний, ізотропний і неферомагнетний.

Внаслідок індукційного нагріву однорідним КЕМП у пластині виникає тепло Джоуля, яке зумовлює в ній нестационарне температурне поле, що створює відповідний термонапружений стан. Для визначення ЕМП, тепла Джоуля, температури та компонент тензора напружень розглянемо двовимірну фізико-математичну модель. Спочатку зі співвідношень Максвелла визначаємо ЕМП у пластині та питому густину тепла Джоуля. Потім з рівняння теплопровідності, в якому джерелом тепла є тепло Джоуля, знаходимо температурне поле. Далі з рівнянь двовимірної квазістатичної задачі термодружності визначаємо компоненти тензора напружень, які описують плоско-деформований стан пластини.

Визначення електромагнетного поля. Приймаємо, що вектор напруженості магнетного поля у пластині має вигляд $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{0; H_2(x_1, x_3, t); 0\}$. Компонента $H_2(x_1, x_3, t)$ паралельна до основ пластини $x_3 = \pm 1$ та до її торцевих перетинів $x_3 = \pm 1$. Тут t – час. Компоненту $H_2(x_1, x_3, \tau)$ визначаємо з рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут $\tau = t / (\sigma \mu h^2)$ – безрозмірний час, характерний для дифузії магнетного поля через півтовщину h пластини; σ – коефіцієнт електропровідності, μ – магнетна проникність матеріалу пластини. Дію КЕМП задають значеннями компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на всіх зовнішніх поверхнях пластини. Тоді крайові умови для розв'язування рівняння (1) мають вигляд

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau), \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau). \quad (2)$$

Тут $H_2^{\pm(0)*}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ – задані вирази функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на поверхнях пластини $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$. Якщо у момент часу $\tau = 0$ ЕМП у пластині відсутнє, то отримуємо нульову початкову умову на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$. У кутових точках прямокутника поперечного перерізу пластини повинні виконуватись умови узгодження функцій $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$, а саме:

$$\begin{aligned} H_2^{+(0)}(d, \tau) &= H_2^{+(0)*}(1, \tau); & H_2^{-(0)}(d, \tau) &= H_2^{\pm(0)*}(-1, \tau); \\ H_2^{+(0)}(-d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(1, \tau); & H_2^{-(0)}(-d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(-1, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Дві відмінні від нуля компоненти вектора напруженості електричного поля $\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau)\}$ такі: $E_1 = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}$, $E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}$. Відповідно тепло Джоуля записуємо формулою

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Визначення температурного поля. Температурне поле $T(x_1, x_2, x_3, Fo)$, яке зумовлене теплом Джоуля Q , визначаємо з рівняння теплопровідності:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) T - \frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{-h^2}{\lambda} Q. \quad (5)$$

Тут $Fo = at / h^2$ – критерій Фур'є; a і λ – коефіцієнти температуро- і теплопровідності. Нехай на поверхнях $x_3 = \pm 1$ пластини виконуються умови конвективного теплообміну з довкіллям $(\partial T / \partial x_3)^\pm \pm Bi^\pm (T^\pm - T_{en}^\pm) = 0$. Тут $Bi^\pm = H^\pm h$ – критерій Біо; $H^\pm$ – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3 = \pm 1$; $T^\pm$ і $(\partial T / \partial x_3)^\pm$ – значення температури та її похідної на поверхнях $x_3 = \pm 1$; $T_{en}^\pm$ – температури зовнішніх середовищ, які контактують із поверхнями $x_3 = \pm 1$; $T_{en}^{(0)}$ – початкова температура зовнішнього середовища. Нехай на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$ пластини також виконуються умови конвективного теплообміну аналогічні до умов на поверхнях $x_3 = \pm 1$.

Визначення термонапруженого стану. Відомо [2–5], що за індукційного нагріву електропровідного тіла КЕМП його напружений стан здебільшого залежить від тепла Джоуля Q , а впливом пондеромоторних сил $\vec{F}$ можна знехтувати. Тому за плоскої деформації пластини, зумовленої лише температурним полем $T(x_1, x_3, t)$, вихідна система рівнянь двовимірної квазістатичної задачі термopружності у напруженнях має вигляд [6]

$$\Delta_1 \left(\psi^{(s)} + \frac{\alpha ET}{1-\nu} \right) = 0; \quad \Delta_1 \sigma_{13}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \psi^{(s)}}{\partial x_1 \partial x_3}; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s)}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial x_3}; \quad \sigma_{33}^{(s)} = \psi^{(s)} - \sigma_{11}^{(s)}; \quad \sigma_{22}^{(s)} = \nu \psi^{(s)} - \alpha ET. \quad (6)$$

Тут σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{13} – компоненти тензора $\sigma^{(s)}$ квазістатичних напружень; α і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона, відповідно; E – модуль Юнга.

Крайові умови на поверхнях $x_3 = \pm h$ пластини будуть

$$\frac{\partial \psi^{(s)\pm}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s)\pm}}{\partial x_3} = 0, \quad \sigma_{13}^{(s)\pm} = 0, \quad \sigma_{11}^{(s)\pm} = \psi^{(s)\pm}, \quad (7)$$

а на торцевих $x_1 = \pm d$ –

$$\frac{\partial \Psi_*^{(s)\pm}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{*13}^{(s)\pm}}{\partial x_1} = 0, \quad \sigma_{*13}^{(s)\pm} = 0, \quad \sigma_{*33}^{(s)\pm} = \Psi_*^{(s)\pm}. \quad (8)$$

Тут символ * означає, що величини розглядали на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$ пластини. У співвідношеннях (6)–(8) використано розмірні декартові координати.

Методика побудови розв'язків двовимірних задач. Функції $\Phi = \{H_2(x_1, x_3, t); T(x_1, x_3, t); \sigma_{11}(x_1, x_3, t); \sigma_{13}(x_1, x_3, t); \sigma_{22}(x_1, x_3, t); \sigma_{33}(x_1, x_3, t)\}$ апроксимуємо за товщиною змінною x_3 кубічними поліномами

$$\Phi(x_1, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 a_{(j-1)}^\Phi(x_1, t) x_3^{j-1}. \quad (9)$$

Коефіцієнти $a_{(j-1)}^\Phi(x_1, t)$ апроксимаційних поліномів (9) записуємо через інтегральні характеристики $\Phi_s(x_1, t)$ визначальних функцій $\Phi(x_1, x_3, t)$

$$\Phi_s(x_1, t) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x_1, x_3, t) x_3^{s-1} dx_3 \quad (s = 1, 2) \quad (10)$$

і задані граничні значення $\Phi^\pm(x_1, t)$ цих функцій на поверхнях $x_3 = \pm h$. Рівняння для визначення інтегральних характеристик $\Phi_s(x_1, t)$ отримуємо множенням рівнянь (1), (5), (6) на x_3^{s-1} та їх інтегруванням за змінною x_3 з врахуванням формул (9) і (10). Отримані системи вихідних рівнянь для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(x_1, t)$ ($s = 1, 2$) визначальних функцій будуть системами одновимірних рівнянь за просторовою змінною x_1 . Їх розв'язки знаходимо, використовуючи скінченні інтегральні перетворення за змінною x_1 , відповідно до заданих на визначальні функції крайових умов на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$. Інтегральні характеристики H_{2s} компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора $\vec{H}$ і температури T_s визначаємо також зі застосуванням перетворення Лапласа за безрозмірними часовими змінними τ і F_0 . Методику їх визначення, а також загальні розв'язки задач електродинаміки і теплопровідності подано у праці [7].

Розглянемо детально методику побудови розв'язку розглядуваної квазістатичної задачі термопружності для пластини, яку описують співвідношення (6)–(8). Спочатку апроксимуємо розподіл функцій $\psi^{(s)}(x_1, x_3)$ і $\sigma_{13}^{(s)}(x_1, x_3)$ за товщиною координатою x_3 кубічними поліномами

$$\psi^{(s)} = \sum_{j=1}^4 \psi_{j-1}^{(s)}(x_1) x_3^{j-1}, \quad \sigma_{13}^{(s)} = \sum_{j=1}^4 \alpha_{13(j-1)}^{(s)}(x_1) x_3^{j-1}. \quad (11)$$

Тоді коефіцієнти $\psi_{j-1}^{(s)}$, $\alpha_{13(j-1)}^{(s)}$ апроксимаційних поліномів (11) подаємо через інтегральні за товщиною координатою x_3 характеристики

$$N^{(s)} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \psi^{(s)} dx_3; \quad M^{(s)} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \psi^{(s)} x_3 dx_3;$$

$$N_{13}^{(s)} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{13}^{(s)} dx_3; \quad M_{13}^{(s)} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \sigma_{13}^{(s)} x_3 dx_3$$

функцій $\psi^{(s)}(x_1, x_3)$ і $\sigma_{13}^{(s)}(x_1, x_3)$ і задані їх граничні значення

$$\psi_{(0)}^{(s)} = \frac{3}{2} N_{13}^{(s)} - \frac{1}{4} \psi_*^{(s)}; \quad \psi_{(1)}^{(s)} = \frac{5}{2h} M_{13}^{(s)} - \frac{3}{4h} \psi_{**}^{(s)}; \quad \psi_{(2)}^{(s)} = \frac{3}{4h^2} \psi_*^{(s)} - \frac{3}{2h^2} N_{13}^{(s)};$$

$$\psi_{(3)}^{(s)} = \frac{5}{4h^3} \psi_{**}^{(s)} - \frac{5}{2h^2} M_{13}^{(s)}; \quad \psi_*^{(s)} = \psi^{(s)+} + \psi^{(s)-}; \quad \psi_{**}^{(s)} = \psi^{(s)+} - \psi^{(s)-};$$

$$\alpha_{13(0)}^{(s)} = \frac{3}{2} N_{13}^{(s)}; \quad \alpha_{13(1)}^{(s)} = \frac{5}{2h} M_{13}^{(s)}; \quad \alpha_{13(2)}^{(s)} = -\frac{3}{2h^2} N_{13}^{(s)}; \quad \alpha_{13(3)}^{(s)} = -\frac{5}{2h^3} M_{13}^{(s)}.$$

Систему рівнянь для визначення інтегральних характеристик $N^{(s)}, M^{(s)}, N_{13}^{(s)}, M_{13}^{(s)}$ отримуємо усередненням за товщиною координатою x_3 перших двох рівнянь системи (6) і цих рівнянь, помножених на x_3 , згідно з формулами (10). Після перетворень на інтегральні характеристики $N^{(s)}, M^{(s)}, N_{13}^{(s)}, M_{13}^{(s)}$ отримуємо вже системи одновимірних рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{3}{h^2} \right) N^{(s)} = \Phi_1^{(s)} - \frac{3}{2h^2} \psi_*^{(s)}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{15}{h^2} \right) M^{(s)} = \Phi_2^{(s)} - \frac{15}{2h^2} \psi_{**}^{(s)},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{3}{h^2} \right) N_{13}^{(s)} = \frac{1}{2h} \frac{\partial \psi_{**}^{(s)}}{\partial x_1}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{15}{h^2} \right) M_{13}^{(s)} = \frac{3}{2h} \frac{\partial \psi_*^{(s)}}{\partial x_1} - \frac{3}{h} \frac{\partial N^{(s)}}{\partial x_1}. \quad (12)$$

Тут

$$\Phi_1^{(s)} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \left\{ \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^- \right] \right\},$$

$$\Phi_2^{(s)} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \left\{ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} + \frac{3}{2h} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^- \right] - \frac{3}{2h^2} (T^+ - T^-) \right\},$$

де $T_n = \frac{2n-1}{2h^n} \int_{-h}^h T x_3^{n-1} dx_3$ ($n=1, 2$) – інтегральні характеристики температури;

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^\pm = \frac{\partial T(x_1, \pm h, t)}{\partial x_3}.$$

Граничні значення $\psi^{(s)\pm}$ функції $\Psi^{(s)}$ на поверхнях $x_3 = \pm h$ знаходимо за допомогою усереднення крайових умов (7), (8), відповідно до співвідношень (10).

За вільних від зовнішнього силового навантаження торцевих перетинів $x_1 = \pm d$ враховуємо умови спряження значень функцій $\sigma_{13}(x_1, \tau)$ і $\Psi(x_1, \tau)$ у вершинах прямокутника поперечного перерізу пластини

$$\sigma_{13}(d, \tau) = \sigma_{13}(1, \tau); \quad \sigma_{13}(d, \tau) = \sigma_{13}(-1, \tau); \quad \sigma_{13}(-d, \tau) = \sigma_{13}(1, \tau); \quad \sigma_{13}(-d, \tau) = \sigma_{13}(-1, \tau),$$

$$\Psi(d, \tau) = \Psi(1, \tau); \quad \Psi(d, \tau) = \Psi(-1, \tau); \quad \Psi(-d, \tau) = \Psi(1, \tau); \quad \Psi(-d, \tau) = \Psi(-1, \tau). \quad (13)$$

Усереднюючи крайові умови (7) на торцевих перетинах, згідно з формулами (10), отримуємо відповідні граничні за координатою x_1 умови на функції $\psi^{(s)\pm}$ $N^{(s)}$, $M^{(s)}$, $N_{13}^{(s)}$, $M_{13}^{(s)}$. Системи взаємозалежних рівнянь (12) розв'язуємо, застосовуючи за змінною x_1 скінченне інтегральне перетворення з ядром $K(\alpha_k, x_1) = (\sin \alpha_k (x_1 + d)) / \sqrt{d}$, де $\alpha_k = \pi k / 2d$. Розв'язки систем (12) подано у праці [6].

За знайденими виразами $N^{(s)}$, $M^{(s)}$, $N_{13}^{(s)}$, $M_{13}^{(s)}$ для функцій $\psi^{(s)}$ і $\sigma_{13}^{(s)}$ отримуємо формули

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_3, t) &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x_3^2}{h^2}\right) N(x_1, t) + \frac{5}{2} \left(\frac{x_3}{h} - \frac{x_3^3}{h^3}\right) M(x_1, t) - \frac{1}{4} \left(1 - 3 \frac{x_3^2}{h^2}\right) \Psi_*(x_1, t) - \\ &- \frac{1}{4} \left(3 \frac{x_3}{h} - 5 \frac{x_3^3}{h^3}\right) \Psi_{**}(x_1, t), \quad \Psi_*(x_1, t) = \Psi^+ + \Psi^-; \quad \Psi_{**}(x_1, t) = \Psi^+ - \Psi^-, \end{aligned} \quad (14)$$

а також

$$\sigma_{13}(x_1, x_3, t) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x_3^2}{h^2}\right) N_{13}(x_1, t) + \frac{5}{2} \left(\frac{x_3}{h} - \frac{x_3^3}{h^3}\right) M_{13}(x_1, t). \quad (15)$$

Розв'язуючи третє рівняння системи (6) за відомих співвідношень (14), (15) функцій $\psi^{(s)}$ і $\sigma_{13}^{(s)}$, знаходимо вираз компоненти $\sigma_{11}^{(s)}$ тензора напружень

$$\sigma_{11}^{(s)}(x_1, x_3, t) = \int \left[\frac{5}{2h} \left(1 - \frac{3x_3^2}{h^2}\right) M_{13}^{(s)}(x_1, t) - \frac{3x_3}{h^2} N_{13}^{(s)}(x_1, t) \right] dx_1. \quad (16)$$

За відомими функціями $N_{13}^{(s)}$ і $M_{13}^{(s)}$ функції $\psi^{\pm}$ знаходимо з виразів (7) і (8) безпосереднім інтегруванням за x_1 при нульових граничних значеннях функції $\psi^{\pm}$ на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$. За відомих функцій $\psi^{(s)}$ і $\sigma_{11}^{(s)}$ компоненти $\sigma_{22}^{(s)}$ і $\sigma_{33}^{(s)}$ тензора напружень визначаємо з відповідних співвідношень (6).

Термомеханічна поведінка алюмінієвої пластини за індукційного нагріву однорідним квазіусталеним ЕМП. За індукційного нагріву КЕМП компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнетного поля $\vec{H}$ на основах $x_3 = \pm 1$ і торцевих перетинах $x_1 = \pm d$ пластини задають виразами

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}, \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (17)$$

Відповідно крайові умови (3) узгодження значень функцій $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ та умови (12) спряження значень функцій $\Psi(x_1, \tau)$ і $\sigma_{13}(x_1, \tau)$ у кутових точках поперечного перерізу пластини виконуються тотожно. Функція $\varphi(\tau)$ має вигляд $\varphi(\tau) = 1 - e^{b\tau}$, де $i = \sqrt{-1}$; $b = 1 / (2\delta_0^2)$; $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$ – параметр, який визначає відносну до півтовщини пластини h глибину проникання індукційних струмів частоти ω [4, 5]; $\beta = \ln \epsilon / \tau_*$; $\epsilon = 0,001$; τ_* – безрозмір-

ний час, що відповідає часу виходу електромагнетних коливань частоти ω на усталений режим з амплітудою H_0 .

Підставляючи вирази (17) у відповідні формули, отримані на основі запропонованої методики [7] для виразу компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$, та використовуючи формулу (4), записуємо вираз тепла Джоуля Q . Підставляємо його у відповідні формули, знайдені на основі запропонованої методики для температури [7], і отримуємо вираз температури $T(x_1, x_3, Fo)$. За знайденим виразом температурного поля $T(x_1, x_3, Fo)$ на основі формул (14)–(16) записуємо співвідношення компонент тензора квазістатичних напружень.

Для аналізу термомеханічної поведінки розглядуваної пластини за відомими компонентами $\sigma_{11}(x_1, x_3, t)$; $\sigma_{13}(x_1, x_3, t)$; $\sigma_{22}(x_1, x_3, t)$; $\sigma_{33}(x_1, x_3, t)$ тензора напружень і температурою $T(x_1, x_3, t)$ визначаємо інтенсивність напружень σ_i , яку за розглядуваної двовимірної задачі описуємо формулою

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{13}^2}.$$

Числовий експеримент виконано для алюмінієвої пластини [8] завтовшки $2h = 2$ mm, завширшки $2d_* = 80$ mm за поверхневого ($\delta_0 = 0,1$) та суцільного ($\delta_0 = 1$) нагріву.

Аналіз інтенсивності напружень. Показано зміну в часі Fo інтенсивності напружень σ_i / H_0^2 за поверхневого (рис. 1a) і суцільного (рис. 1b) індукційного нагріву КЕМП за $Bi = 1$, а також зміну інтенсивності напружень σ_i / H_0^2 за площею поперечного перерізу розглядуваної пластини за $Bi = 1$ і $Fo = 4$ (що відповідає часу виходу інтенсивності напружень на максимальне значення) за індукційного нагріву КЕМП при $\delta_0 = 0,1$ (рис. 2a) та $\delta_0 = 1$ (рис. 2b).

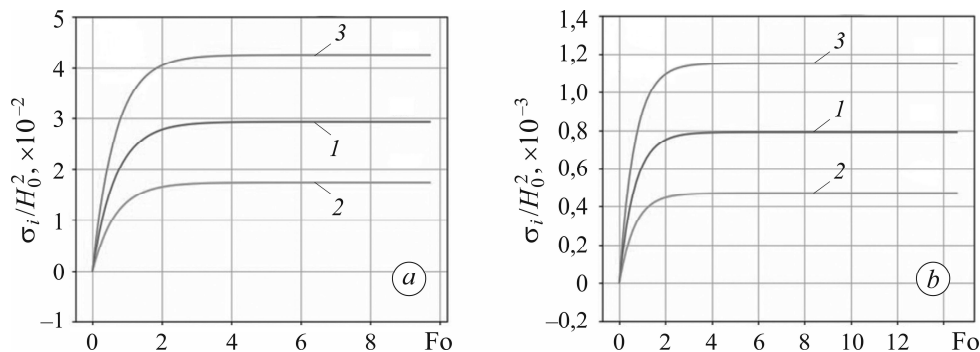


Рис. 1. Зміна в часі Fo інтенсивності напружень σ_i / H_0^2 у алюмінієвій пластині завтовшки $2h = 2$ mm і завширшки $2d_* = 80$ mm за її індукційного нагріву при $\delta_0 = 0,1$ (a) і $\delta_0 = 1$ (b) в точках $M_1(0,25d_*; 0,25h)$, $M_2(0,5d_*; 0,5h)$, $M_3(0,9d_*; 0,9h)$ (криві 1–3, відповідно) за $Bi = 1$.

Fig. 1. Time variation Fo of the stress intensity σ_i / H_0^2 in an aluminum plate with a thickness of $2h = 2$ mm and a width of $2d_* = 80$ mm during its induction heating at $\delta_0 = 0.1$ (a) and at $\delta_0 = 1$ (b) at points $M_1(0.25d_*; 0.25h)$, $M_2(0.5d_*; 0.5h)$, $M_3(0.9d_*; 0.9h)$ (curves 1–3 respectively) at the value of $Bi = 1$.

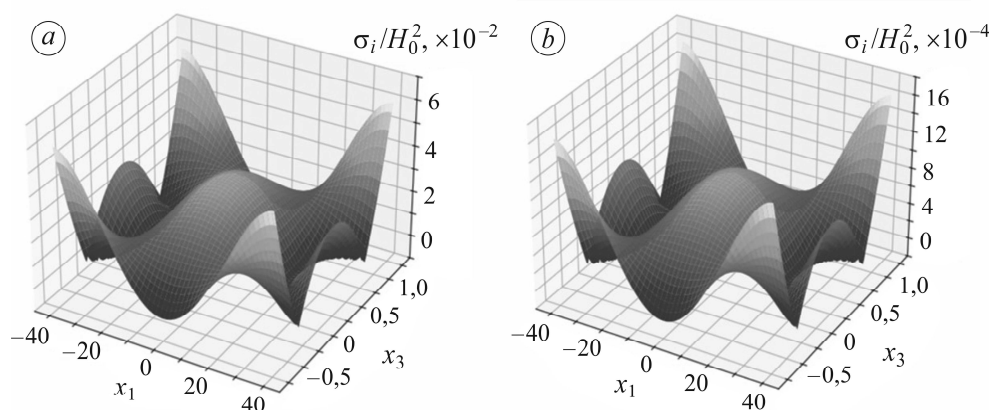


Рис. 2. Зміна інтенсивності напружень σ_i / H_0^2 за площею поперечного перерізу алюмінієвої пластини завтовшки $2h = 2$ mm і завширшки $2d_* = 80$ mm за $Bi = 1$ і $Fo = 4$ за її поверхневого ($\delta_0 = 0,1$) (a) та суцільного ($\delta_0 = 1$) (b) індукційного нагріву.

Fig. 2. Variation of the stress intensity σ_i / H_0^2 over the cross-sectional area of an aluminum plate with a thickness of $2h = 2$ mm and a width of $2d_* = 80$ mm at the value of $Bi = 1$ and $Fo = 4$ under its surface ($\delta_0 = 0.1$) (a) and continuous ($\delta_0 = 1$) (b) induction heating.

У результаті числового аналізу зміни в часі Fo інтенсивності напружень у характерних точках $M_1(0,25d_*; 0,25h)$, $M_2(0,5d_*; 0,5h)$, $M_3(0,9d_*; 0,9h)$ прямокутника поперечного перерізу алюмінієвої пластини за її індукційного нагріву КЕМП виявлено, що максимальні значення інтенсивності напружень $\sigma_i^{\max}$ в обох випадках (поверхневого та суцільного нагріву) є в точці M_3 , тобто у кутових точках прямокутника поперечного перерізу (на ребрах пластини). При $\delta_0 = 0,1$ значення $\sigma_i^{\max}$ приблизно у 40 разів більші, ніж при $\delta_0 = 1$.

ВИСНОВКИ

Встановлено, що значення $\sigma_i^{\max}$ у розглядуваній алюмінієвій пластині за її індукційного нагріву КЕМП суттєво залежать від безрозмірного параметра δ_0 і критерію Біо. Час τ_* виходу інтенсивності напружень у розглядуваній пластині на усталений режим зі зменшенням критерію Біо на порядок за обох вибраних випадків індукційного нагріву теж зростає на порядок. За фіксованого значення δ_0 зі зменшенням критерію Біо інтенсивність напружень у характерних точках поперечного перерізу пластини набуває приблизно однакового значення. Зокрема, за $Bi = 0,01$ вони вже практично збігаються, тобто характер режиму нагріву пластини наближається до умов теплоізоляції її бічних граней. За умов поверхневого нагріву ($\delta_0 = 0,1$) і $Bi = 1$ значення $\sigma_i^{\max}$ приблизно у 40 разів більші порівняно з умовами суцільного нагріву ($\delta_0 = 1$) і $Bi = 1$. Тому для досягнення більших значень $\sigma_i^{\max}$ у алюмінієвій пластині доцільно використовувати її поверхневий нагрів. Зі збільшенням H_0 за поверхневого і суцільного індукційного нагріву значення $\sigma_i^{\max}$ зростають за квадратичним законом. Виявлені залежності інтенсивності напружень у алюмінієвій пластині від умов індукційного нагріву і конвективного теплообміну мають важливе значення для вибору оптимальних пара-

метрів індукційної термообробки алюмінієвих пластин та прогнозування їх несучої здатності за дії КЕМП.

1. *Lupi S.* Fundamentals of Electroheat // Electrical Technologies for Process Heating. – Cham: Springer, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46015-4>
2. *Bobart G. F.* Induction heating // Access Science. – 2020. Available online: <https://www.accessscience.com/content/article/a341500>
3. *Hetnarski R.* Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7>
4. *Rudnev V., Loveless D., and Cook R. L.* Handbook of Induction Heating. – CRC Press, 2017. – 772 p.
5. *Термоупругость* электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.
6. *Musii R. S.* Constructing solutions for two-dimensional quasi-static problems of thermomechanics in terms of stresses for bodies with plane-parallel boundaries // Mathematical modeling and computing. – 2024. – **11**, № 4. – P. 995–1002.
7. *Analysis of varying temperature regimes in a conductive strip during induction heating under a quasi-steady electromagnetic field* / R. Musii, M. Lis, P. Pukach, A. Chaban, A. Szafraniec, M. Vovk, and N. Melnyk // Energies. – 2024. – **17**, № 2. – Article number 366.
8. *Thompson M.* Base Metals Handbook. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2006. – 386 p.

Одержано 15.08.2024