

ВЗАЄМОДІЯ SH-ХВИЛІ З НАПІВНЕСКІНЧЕННОЮ ТРІЩИНОЮ У ПРУЖНОМУ ШАРІ

З. Т. НАЗАРЧУК, М. В. ВОЙТКО, Д. Б. КУРИЛЯК, Я. П. КУЛИНИЧ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Визначено розподіл поля зміщень на лицевих поверхнях пружного шару з внутрішнім дефектом типу напівнескінченної тріщини за її зондування нормальною SH-хвилею. Модель дефекту – нескінченно тонкий розріз, береги якого вільні від напружень. Сформульовано відповідну крайову задачу дифракції, яку розв'язано аналітично методом Вінера–Гопфа. Встановлено особливості поведінки поля на поверхнях шару, які можна використати для оцінки глибини залягання дефекту та ідентифікації його краю.

Ключові слова: *дифракція, тріщина, пружний шар, метод Вінера–Гопфа.*

The distribution of the displacement field on the front surfaces of an elastic layer with an internal crack-type defect is determined for its diagnostics of by an elastic SH-wave. The defect model is an infinitely thin cut whose faces are free of stresses. The corresponding boundary value problem of wave diffraction is formulated and solved by the Wiener-Hopf method. The solution is obtained in analytical form. The features of the field behavior on the layer surfaces are established, which can be used to estimate the defect depth and identify its edge.

Keywords: *diffraction, crack, elastic layer, Wiener-Hopf technique.*

Вступ. З розвитком сучасних методів оптичної візуалізації полів зміщень на поверхнях матеріалів і конструкцій, сформованих пружними хвилями, розширюються можливості їх технічного діагностування [1–4]. Тому для підвищення достовірності інтерпретації результатів вимірювань важливо розв'язати відповідні модельні задачі про взаємодію пружних хвиль із дефектами. Загальні підходи такого аналізу наведено раніше [5–9].

Для ідентифікації тонкого дефекту в пружному шарі за полем зміщень на його поверхні розглядали задачу про дифракцію нормальної симетричної моди SH-хвилі на напівнескінченній тріщині. У вибраній математичній моделі тріщину описували нескінченно тонким розрізом, на берегах якого відсутні напруження, а пружний шар – хвилеводом. Для визначення розподілу поля зміщень на вільних від напружень поверхнях шару сформулювали відповідну крайову задачу дифракції, яку розв'язали методом Вінера–Гопфа [10, 11].

Раніше цим методом досліджували задачі розсіювання SH-хвилі на напівнескінченному та скінченному тонких міжфазних дефектах на межі жорсткого з'єднання шару і півпростору [12–14]. Також з його допомогою розв'язали задачу про дифракцію хвилі Лемба на скінченній тріщині, розташованій посередині шару паралельно до його лицевих поверхонь [15]. Дифракцію антисиметричної моди SH-хвилі на напівнескінченній тріщині в шарі вивчали методом часткових областей [16].

Мета цього дослідження – змоделювати поля зміщень на поверхні шару з внутрішньою тріщиною, щоб ідентифікувати її оптичними методами.

Формулювання задачі. Нехай у декартовій системі координат $O(x, y, z)$ задано плоский шар $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in [-d, d]\}$ (рис. 1). Тут і надалі координату $z \in (-\infty, \infty)$ опускаємо через незалежність від неї розподілу поля зміщень. Напівнескінченна тріщина $\Gamma: \{x \in (-\infty, 0), y = h\}, h < |d|$, розташована паралельно до лицевих поверхонь шару. Така структура утворює розгалужений пружний хвильовід з областями $D_1: \{x > 0, y \in [-d, d]\}$, $D_2: \{x < 0, y \in [h, d]\}$, $D_3: \{x < 0, y \in [-d, h]\}$. Нехай в області D_1 поширюється симетрична нормальна SH-хвиля (антиплоске збудження), яка викликає зміщення частинок шару вздовж осі Oz і задана у вигляді $u_z^{\text{inc}} = u_z^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \cos(\beta_j y)$, де $\beta_j = \pi j / 2d$, $j = 2, 4, 6, \dots$; $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$, $\text{Re} \gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$). Гармонічну залежність зондувального поля від часу описує множник $e^{-i\omega t}$, який надалі опускаємо. Хвильові процеси у такій динамічній системі визначає z -компонента вектора зміщень дифрагованого поля $\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_z u(x, y)$, яке шукаємо з розв'язку крайової задачі для рівняння Гельмгольца:

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in P, \quad (1)$$

Функція $u(x, y)$ задовольняє крайові умови на вільних від напружень лицевих поверхнях шару та тріщини:

$$\tau_{zy} = \mu \partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = \pm d, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\tau_{zy} = \mu \partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = h \pm 0, \quad x \in (-\infty, 0). \quad (3)$$

Тут $u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y)$ – повне поле зміщень.

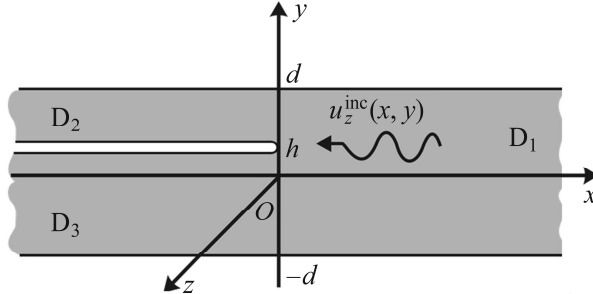


Рис. 1. Внутрішня тріщина у пружному шарі.

Fig. 1. Internal crack in an elastic layer.

Єдиність розв'язку досягали вибором класу функцій, що забезпечують виконання умов випромінювання на нескінченності, та умовою Мейкснера [11] в околі вершини тріщини: $u \sim \rho^{1/2}$, $\partial_y u \sim \rho^{-1/2}$, коли $\rho = [x^2 + (y - h)^2]^{1/2} \rightarrow 0$, ρ – відстань до вершини у локальній полярній системі координат.

Зведення задачі до рівняння Вінера–Гопфа. Позначимо Фур'є-трансформанту шуканого дифрагованого поля зміщень так:

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx,$$

де $\alpha = \sigma + i\tau$ (σ, τ набувають дійсні значення).

Вважаємо, що функція $U(\alpha, y)$ регулярна у смугі $\Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, де $-k'' < \tau_0 < k''$, що охоплює дійсну вісь комплексної площини α .

Уведемо такі позначення:

$$U(\alpha, y) = U^+(\alpha, y) + U^-(\alpha, y), \quad (4)$$

$$U'(\alpha, y) = U'^+(\alpha, y) + U'^-(\alpha, y), \quad (5)$$

$$\text{де} \quad \begin{Bmatrix} U^+ \\ U'^+ \end{Bmatrix}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ \partial_y u(x, y) \end{Bmatrix} e^{i\alpha x} dx, \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} U^- \\ U'^- \end{Bmatrix}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ \partial_y u(x, y) \end{Bmatrix} e^{i\alpha x} dx. \quad (7)$$

Тут $U^+(\alpha, y)$, $U'^+(\alpha, y)$ та $U^-(\alpha, y)$, $U'^-(\alpha, y)$ – функції, регулярні, відповідно, у верхній ($\tau > -\tau_0$) та нижній ($\tau < \tau_0$) півплощинах змінної α .

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є до рівняння (1) та врахувавши крайові умови (2), подамо Фур'є-трансформанту шуканого дифрагованого поля у вигляді

$$U(\alpha, y) = \begin{cases} 2A(\alpha)e^{\gamma d} \text{ch}[\gamma(y-d)], & h < y < d, \\ 2C(\alpha)e^{-\gamma d} \text{ch}[\gamma(y+d)], & -d < y < h. \end{cases} \quad (8)$$

Тут для виконання умов випромінювання вибираємо вітку $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \alpha^2}$.

Далі застосуємо інтегральне перетворення Фур'є до крайової умови (3) та, використавши означення (5) і співвідношення (7), одержимо:

$$U'^-(\alpha) = U'^-(\alpha, h+0) = U'^-(\alpha, h-0) = -\frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (9)$$

А з умови неперервності поля напружень на поверхні $y = h$ маємо:

$$C(\alpha) = -A(\alpha)e^{2\gamma d} \text{sh}(\gamma l_2) / \text{sh}(\gamma l_3), \quad (10)$$

де $l_2 = d - h$, $l_3 = d + h$.

Беручи до уваги подання (5), (8)–(10), для $y = h$ дістанемо:

$$A(\alpha) = -\left(U'^+(\alpha) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right) / \left(2\gamma e^{\gamma d} \text{sh}(\gamma l_2) \right). \quad (11)$$

Тепер, використовуючи вирази (10), (11), Фур'є-трансформанту поля зміщень (8) запишемо так:

$$U(\alpha, y) = \begin{cases} -\left(U'^+(\alpha) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right) \text{ch}[\gamma(y-d)] / (\gamma \text{sh}(\gamma l_2)), & h < y < d, \\ \left(U'^+(\alpha) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right) \text{ch}[\gamma(y+d)] / (\gamma \text{sh}(\gamma l_3)), & -d < y < h. \end{cases} \quad (12)$$

Тут $U'^+(\alpha) = U'^+(\alpha, h+0) = U'^+(\alpha, h-0)$.

Далі, враховуючи означення (4), (6) і умову неперервності поля зміщення на поверхні $y = h$, $x \in (0, +\infty)$, зведемо крайову задачу (1)–(3) до рівняння Вінера–Гопфа:

$$M(\alpha) \left[U'^+(\alpha) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right] = J^-(\alpha), \quad \alpha \in \Pi. \quad (13)$$

Тут $J^-(\alpha)$ – невідома функція, яка є Фур’є-трансформантою стрибка поля зміщення на поверхні тріщини і регулярна у півплощині $\tau < \tau_0$; $M(\alpha)$ – характеристична функція:

$$M(\alpha) = -\frac{\text{sh}(2\gamma d)}{\gamma \text{sh}(\gamma l_2) \text{sh}(\gamma l_3)}; \quad J^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 [u(x, h+0) - u(x, h-0)] e^{i\alpha x} dx.$$

Розв’язання рівняння Вінера–Гопфа. Характеристична функція $M(\alpha)$ парна і регулярна у смузі Π , а за її межами має прості нулі та полюси і допускає факторизацію методом нескінченних добуток Вейерштрасса [10]:

$$M(\alpha) = M_+(\alpha) M_-(\alpha).$$

Тут $M_-(\alpha) = M_+(-\alpha)$;

$$M_{\pm}(\alpha) = -\frac{k \sin(2kd)}{\sqrt{\sin(kl_2) \sin(kl_3)}} \frac{1}{(k \pm \alpha)} \times \\ \times \frac{e^{\mp i\alpha(l_2 \ln(2d/l_2) + l_3 \ln(2d/l_3))/\pi} \prod_{n=1}^{\infty} [1 \pm \alpha / (i\gamma_{n1})] e^{\pm i\alpha \frac{2d}{n\pi}}}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 \pm \alpha / (i\gamma_{n2})] e^{\pm i\alpha \frac{l_2}{n\pi}} \prod_{n=1}^{\infty} [1 \pm \alpha / (i\gamma_{n3})] e^{\pm i\alpha \frac{l_3}{n\pi}}}, \quad (14)$$

де $\gamma_{n1} = (2d)^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - (2kd)^2}$, $\gamma_{n2(3)} = l_{2(3)}^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - (kl_{2(3)})^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Функції (14) регулярні і не мають нулів, відповідно, у півплощинах $\tau > \mp \tau_0$, а в областях регулярності $M_{\pm}(\alpha) = O(|\alpha|^{-1/2})$, коли $|\alpha| \rightarrow \infty$; за межами цих областей мають прості нулі, якщо $\alpha = \mp i\gamma_{n1}$, і полюси, якщо $\alpha = \mp i\gamma_{n2}, \mp i\gamma_{n3}$, а також простий полюс за умови $\alpha = \mp k$; $\text{Re}(\gamma_{nl}) \geq 0$, $l = 1, 2, 3$.

Для розв’язання рівняння Вінера–Гопфа (13) поділимо його обидві частини на $M_-(\alpha)$ і отримаємо:

$$M_+(\alpha) U^{+'}(\alpha) - M_+(\alpha) \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} = \frac{J^-(\alpha)}{M_-(\alpha)}, \quad \alpha \in \Pi. \quad (15)$$

Перший доданок у лівій частині рівняння (15) – регулярна функція змінної α у півплощині $\tau > -\tau_0$. Функція у правій його частині регулярна у півплощині $\tau < \tau_0$. Другий доданок у лівій частині є функцією, регулярною у смузі $\alpha \in \Pi$. Подамо його як суму двох функцій $S_+(\alpha)$ та $S_-(\alpha)$, регулярних, відповідно, у півплощинах $\tau > -\tau_0$ та $\tau < \tau_0$ [10, 11]:

$$M_+(\alpha) \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} = S_+(\alpha) + S_-(\alpha). \quad (16)$$

$$\text{Тут } S_+(\alpha) = \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} (M_+(\alpha) - M_+(i\gamma_j)), \quad S_-(\alpha) = \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}.$$

Враховуючи подання (16), рівняння (15) перепишемо так:

$$M_+(\alpha) U^{+'}(\alpha) + S_+(\alpha) = \frac{J^-(\alpha)}{M_-(\alpha)} - S_-(\alpha). \quad (17)$$

Тут права частина – регулярна функція в півплощині $\tau < \tau_0$, а ліва – в півплощині $\tau > -\tau_0$. Асимптотичну поведінку невідомих функцій $U^{*+}(\alpha)$ і $J^-(\alpha)$ в цих областях, якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$, встановлюємо з умов поведінки зміщень і напружень в околі вершини тріщини:

$$U^{*+}(\alpha) = O(|\alpha|^{-1/2}), |\alpha| \rightarrow \infty, \text{ коли } \alpha > -\tau_0; \quad J^-(\alpha) = O(|\alpha|^{-3/2}), \text{ коли } \alpha < \tau_0.$$

Оскільки півплощини регулярності функцій у правій та лівій частинах рівняння (17) перекриваються на смужі Π і прямують у ній до нуля на нескінченності, то згідно з теоремою Ліувілля вони визначають цілу функцію, рівну нулю в усій комплексній площині. Тому, прирівнявши до нуля ліву і праву частини, шуканий розв’язок рівняння Вінера–Гопфа (13) запишемо так:

$$U^{*+}(\alpha) = \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \left(1 - \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(\alpha)} \right), \quad J^-(\alpha) = \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j) M_-(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (18)$$

Тепер, підставляючи вираз для $U^{*+}(\alpha)$ у рівняння (12), знаходимо Фур’є-трансформанту поля зміщень. Для переходу в координатний простір використаємо обернене перетворення Фур’є і дифраговане поле зміщень подамо так:

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{\infty} R_{jq} e^{-\gamma_{q1} x} \cos\left((2d)^{-1} \pi q(y-d)\right), & x, y \in D_1, \\ -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{q=0}^{\infty} T_{jq} e^{\gamma_{q2} x} \cos\left(l_2^{-1} \pi q(y+d)\right), & x, y \in D_2, \\ -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{jq} e^{\gamma_{q3} x} \cos\left(l_3^{-1} \pi q(y+d)\right), & x, y \in D_3. \end{cases} \quad (19)$$

Тут R_{jq} , T_{jq} , F_{jq} – коефіцієнти трансформації мод на вершині тріщини, відповідно, для областей $x > 0$ і $x < 0$;

$$R_{jq} = \frac{\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j) (-1)^{q+1} \pi q \sin(\pi q h / 2d) M_+(i\gamma_{q1})}{2d \cdot 2d \gamma_{q1} (\gamma_{q1} + \gamma_j)}, \quad (20)$$

$$T_{jq} = \frac{\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j)}{l_2} \frac{\varepsilon_q (-1)^q}{M_+(i\gamma_{q2}) \gamma_{q2} (\gamma_{q2} - \gamma_j)}, \quad (21)$$

$$F_{jq} = \frac{\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j)}{l_3} \frac{\varepsilon_q (-1)^q}{M_+(i\gamma_{q3}) \gamma_{q3} (\gamma_{q3} - \gamma_j)}, \quad (22)$$

де $\gamma_{02} = \gamma_{03} = -ik$, $\varepsilon_q = 1/2$, якщо $q = 0$, і $\varepsilon_q = 1$, якщо $q > 0$.

За асимптотичною оцінкою виразів (20)–(22) встановлюємо, що $R_{jq}, T_{jq}, F_{jq} = O(q^{-3/2})$, якщо $q \rightarrow \infty$.

Числовий аналіз результатів. Введемо безрозмірні величини $\bar{y} = y/2d$, $\bar{x} = x/2d$, $\bar{h} = h/2d$ та $\bar{\omega} = 2kd$. Дослідимо залежності амплітуди повного поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ від нормованої координати $\bar{x}$ на лицевих поверхнях $\bar{y} = \pm 0,5$ шару P (рис. 2). Визначимо вплив безрозмірної хвильової товщини шару (частоти) $\bar{\omega}$ та безрозмірного параметра $\bar{h}$ ($0 < \bar{h} < 0,5$) на амплітуду повного поля зміщень. Проаналізуємо поширення першої ненульової моди ($j = 2$) в області D_1 уздовж осі Ox без загасання за умови $2\pi < \bar{\omega} < 4\pi$. Обчислювали для трьох безрозмірних

значень координати тріщини $\bar{h} = \{0,05; 0,25; 0,45\}$ та частоти $\bar{\omega} = \{6,5; 9; 12\}$. Амплітуду повного поля $|u^{\text{tot}}|$ у виділених областях хвилевода визначають домінуючі доданки рядів (19), кількість яких рівна кількості нормальних хвиль, здатних поширюватися тут без загасання. Критичні частоти дифрагованої нормальної СН-хвилі для областей D_2 та D_3 описують формули $\bar{\omega}_n^{(2)} = \pi n / (1/2 - \bar{h})$ та $\bar{\omega}_n^{(3)} = \pi n / (1/2 + \bar{h})$, а для області D_1 – критичні частоти $\bar{\omega}_n^{(1)} = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Нехай тріщина розташована близько до середини шару ($\bar{h} = 0,05$). Тоді перші три нормовані критичні частоти дифрагованої нормальної хвилі для областей D_2 і D_3 будуть, відповідно, $\bar{\omega}_{\{1;2;3\}}^{(2)} = \{20\pi/9; 40\pi/9; 60\pi/9\}$ і $\bar{\omega}_{\{1;2;3\}}^{(3)} = \{20\pi/11; 40\pi/11; 60\pi/11\}$. Очевидно, що за частоти зондування $\bar{\omega} = 6,5$ в області D_2 поширюється тільки нульова мода ($\bar{\omega} < \bar{\omega}_1^{(2)}$). Тому розподіл поля зміщення залежатиме від першого члена другого ряду (19), а решта членів ряду експоненційно загасатимуть. Цим пояснюють факт, що розподіл поля зміщень на поверхні $\bar{y} = 0,5$ практично не залежить від координати $\bar{x}$ (крива 1, рис. 2a). В області D_3 поширюються без загасання дві моди (нульова і перша) ($\bar{\omega}_1^{(3)} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_2^{(3)}$), що обумовлює осциляційний характер розподілу поля зміщень на поверхні $\bar{y} = -0,5$ (крива 1, рис. 2b). Оскільки $\bar{\omega}_1^{(1)} < \bar{\omega}_2^{(1)} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_3^{(1)}$, то розподіли $|u^{\text{tot}}|$ на верхній і нижній гранях області D_1 очікувано осциляційні, що визначають перші два доданки першого ряду (19). Зауважимо, що за вибраного діапазону зміни $\bar{\omega}$ в області D_1 поширюватимуться без загасання щонайменше дві моди поля зміщень. Тому на поверхнях $\bar{y} = \pm 0,5$ розподіл поля зберігатиме осциляційний характер.

За безрозмірної частоти $\bar{\omega} = 9$ у кожній із областей D_2 , D_3 поширюється по дві моди, тому на їх поверхнях $\bar{y} = \pm 0,5$ амплітуда поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ також осцилює. В області D_1 амплітуда осциляцій суттєво зменшується порівняно з випадком, коли $\bar{\omega} = 6,5$ (криві 2 на рис. 2a, b). Тобто тут хвиля практично не відбивається. Аналогічна картина і за безрозмірної частоти зондування $\bar{\omega} = 12$ (криві 3, рис. 2a, b). Тут в області D_2 без загасання поширюватимуться дві моди, а в області D_3 – три, тому розподіл поля зміщень на верхній і нижніх гранях зберігає осциляційний характер, а поле, відбите в область D_1 , практично відсутнє.

Із наближенням тріщини до верхньої ліцевої поверхні шару ($\bar{h} = 0,25$ і $\bar{h} = 0,45$) безрозмірні критичні частоти для області D_2 набувають значень $\bar{\omega}_n^{(2)} = \{4\pi; 8\pi; 12\pi\}$ і $\bar{\omega}_n^{(2)} \approx \{20\pi; 40\pi; 60\pi\}$, а для області D_3 – $\bar{\omega}_n^{(3)} \approx \{4\pi/3; 8\pi/3; 4\pi\}$ і $\bar{\omega}_n^{(3)} \approx \{20\pi/19; 40\pi/19; 60\pi/19\}$. Тобто за обох значень $\bar{h}$ в області D_2 поширюватиметься без загасання тільки нульова мода за усіх вибраних значень $\bar{\omega}$. При цьому в області D_3 кількість однорідних мод не перевищуватиме двох. Тобто поведінка поля $|u^{\text{tot}}(x,y)|$ на нижній поверхні шару матиме осциляційний характер, однак, амплітуда і період осциляцій залежатимуть від параметрів $\bar{h}$ і $\bar{\omega}$ (криві 1–3, рис. 2c–f). Виявили, що для усіх досліджуваних випадків на межі з'єднання областей $D_1 - D_2$ і $D_1 - D_3$ різко змінюється

залежність поля $|u^{\text{tot}}(x, y)|$ на поверхнях шару Р від нормованої координати $\bar{x}$. Це обумовлено зміною структури хвильових процесів у хвильовідних областях, утворених тріщиною. Цю властивість можна використати, щоб ідентифікувати положення вершини напівнескінченної тріщини в шарі. Залежність характеру осциляцій на поверхнях шару від ширини хвильовідних областей можна використати для оцінки глибини тріщини в шарі.

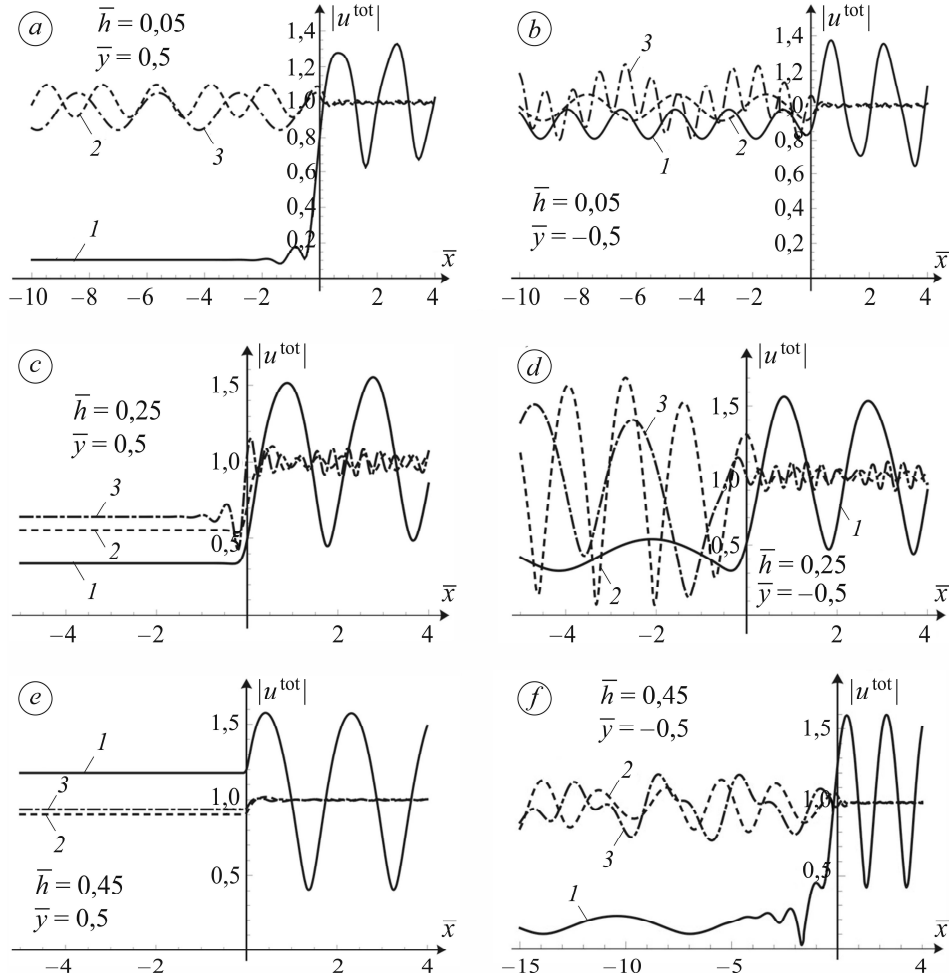


Рис. 2. Залежність поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ від нормованої координати $\bar{x}$ на верхній ($\bar{y} = 0,5$) (a, c, e) та нижній ($\bar{y} = -0,5$) (b, d, f) вільних поверхнях шару за різних значень $\bar{h}$ та $\bar{\omega}$: 1 – $\bar{\omega} = 6,5$; 2 – 9; 3 – 12.

Fig. 2. Dependences of the displacement fields $|u^{\text{tot}}|$ on the normalized coordinate $\bar{x}$ on the upper ($\bar{y} = 0.5$) (a, c, e) and lower ($\bar{y} = -0.5$) (b, d, f) free faces of the layer for different values of the $\bar{h}$ and $\bar{\omega}$: 1 – $\bar{\omega} = 6.5$; 2 – 9; 3 – 12.

Для глибшого розуміння процесів формування полів у шарі з дефектом зосередимо увагу на енергетичних коефіцієнтах відбивання/проходження, які визначимо за відношенням середнього потоку потужності відбитої/пройденої хвилі до середнього потоку потужності збуджувальної моди, що набігає на межу поділу областей $x = 0$, $-d \leq y \leq d$ [17, 18]. Тоді коефіцієнти відбивання V_j та проходження $W_j^{(2)}$, $W_j^{(3)}$ матимуть вигляд

$$V_j = \sum_{q=1}^{N_a} \frac{|\gamma_{q1}|}{|\gamma_j|} |R_{jq}|^2; W_j^{(2)} = \sum_{q=0}^{N_b} \frac{l_2 |\gamma_{q2}|}{2d |\gamma_j|} |T_{jq}|^2; W_j^{(3)} = \sum_{q=0}^{N_c} \frac{l_3 |\gamma_{q3}|}{2d |\gamma_j|} |F_{jq}|^2, \quad (23)$$

де $N_a = [2kd / \pi]$, $N_b = [kl_2 / \pi]$, $N_c = [kl_3 / \pi]$ – кількість мод дифрагованого поля, що поширюються без загасання, відповідно, в областях D_1 , D_2 , D_3 ; $[\cdot]$ – ціла частина числа.

На рис. 3 наведено залежності коефіцієнтів відбивання та проходження (23) зондувальної моди ($j = 2$) від безрозмірної частоти $\bar{\omega}$ в інтервалі $2\pi < \bar{\omega} < 4\pi$ за фіксованих значень параметра $\bar{h} = \{0,05; 0,25; 0,45\}$. Як бачимо, в точці інтервалу $\bar{\omega} = 2\pi$, коли починає формуватися мода ($j = 2$), коефіцієнт відбивання V_2 наближається до одиниці, а коефіцієнти $W_2^{(2)}$, $W_2^{(3)}$ прямують до нуля. Фізично це означає, що на цій частоті хвиля повністю відбивається. Зі збільшенням безрозмірної частоти $\bar{\omega}$ коефіцієнт V_2 спадає, а значення $W_2^{(2)}$, $W_2^{(3)}$ зростають. Однак така поведінка спостерігається до певного значення $\bar{\omega}$, яке відповідає першій критичній частоті розсіяної хвилі $\bar{\omega}_1^{(2)} = 20\pi/9$ в області D_2 , коли $\bar{h} = 0,05$ (рис. 3a); другим критичним частотам для області D_3 : $\bar{\omega}_2^{(3)} = 8\pi/3$, коли $\bar{h} = 0,25$ (рис. 3b), та $\bar{\omega}_2^{(3)} = 40\pi/19$, коли $\bar{h} = 0,45$ (рис. 3c).

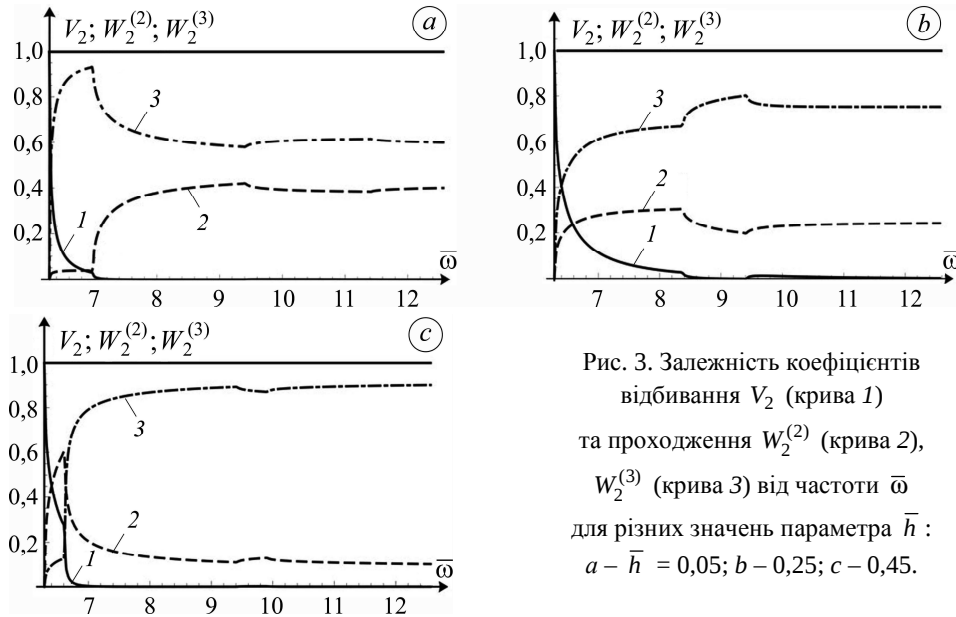


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів відбивання V_2 (крива 1) та проходження $W_2^{(2)}$ (крива 2), $W_2^{(3)}$ (крива 3) від частоти $\bar{\omega}$ для різних значень параметра $\bar{h}$: $a - \bar{h} = 0,05$; $b - 0,25$; $c - 0,45$.

Fig. 3. Dependence of the reflection V_2 (curve 1) and transmissions $W_2^{(2)}$ (curve 2), $W_2^{(3)}$ (curve 3) coefficients on the frequency $\bar{\omega}$ for different values of the parameter $\bar{h}$: $a - \bar{h} = 0.05$; $b - 0.25$; $c - 0.45$.

Із подальшим збільшенням частоти коефіцієнт V_2 продовжує спадати (криві 1, рис. 3), а коефіцієнти $W_2^{(2)}$ і $W_3^{(2)}$, відповідно, – зростати і спадати, а далі поведінка кривих практично не залежить від частоти.

Кривим на рис. 3 за нормованих критичних частот областей D_2 і D_3 властиві характерні “злами”. Оскільки вони залежать від ширини хвильовідних облас-

тей, то несуть інформацію про глибину залягання тріщини. Зауважимо, що тут виконується закон збереження енергії випромінювання у хвилевідних областях:

$$V_2 + W_2^{(2)} + W_2^{(3)} = 1 \text{ (рис. 3).}$$

ВИСНОВКИ

Запропоновано хвилевідну модель для ідентифікації тонких дефектів типу тріщин в однорідному ізотропному плоско-паралельному пружному шарі за його зондування полем нормальної пружної SH-хвилі. Для напівнескінченної тріщини, розміщеної паралельно до граней шару, методом Вінера–Гопфа розв’язано відповідну крайову задачу дифракції. Розв’язок отримано в аналітичному вигляді. За результатами аналізу залежностей полів зміщень на поверхнях шару від розташування тріщини та частоти зондування, а також частотних залежностей коефіцієнтів відбивання та проходження встановлено ознаки для її ідентифікації, які можна використати для інтерпретації результатів акустико-оптичного діагностування.

1. Nazarchuk Z., Muravsky L., and Kuryliak D. Optical Metrology and Optoacoustics in Non-destructive Evaluation of Materials. – Springer Series in Optical Sciences, 2023. – **242**. – 416 p.
2. Gopalakrishnan S. Wave Propagation in Materials and Structures. – CRC Press, Boca Raton, 2016. – 950 p.
3. Sause M. G. R. and Jasiuniene E. Structural Health Monitoring Damage Detection Systems for Aerospace. – Springer, 2021. – 286 p.
4. Scattering of the fundamental shear horizontal mode in a plate when incident at a through crack aligned in the propagation direction of the mode / M. Ratassepp, M. J. S. Lowe, P. Cawley, and A. Klauson // J. of the Acoustical Soc. of America. – 2008. – **124**, № 5. – P. 2873–2882.
5. Hongchen M. and Faxin L. Shear horizontal wave transducers for structural health monitoring and nondestructive testing: A review // Ultrasonics. – 2021. – **114**. – Article number 106355.
6. Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. – Malabar: Krieger Publishing Company, 1990. – Vol. I & II.
7. Miklowitz J. The theory of elastic waves and wave guides. – Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland Publication Company, 1978. – 618 p.
8. Graff K. F. Wave motion in elastic solids. – New York: Dover Publications, 1991. – 652 p.
9. Rose J. Ultrasonic Guided Waves in Solid Media. – Cambridge University Press, 2014. – 530 p.
10. Noble B. Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – 246 c.
11. Mittra R. and Le S. W. Analytical techniques in the theory of guided waves. – New York: Macmillan Company, 1971. – 302 p.
12. On the interaction of an elastic SH-wave with an interface crack in the perfectly rigid joint of a plate with a half-space / Z. T. Nazarchuk, D. B. Kuryliak, M. V. Voytko, and Ya. P. Kulynych // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, № 6. – P. 609–622.
13. Diffraction of SH-waves on the interface defect in the joint of an elastic layer and a half space / Z. T. Nazarchuk, D. B. Kuryliak, M. V. Voytko, and Ya. P. Kulynych // Materials Science. – 2022. – **57**, № 5. – P. 612–625.
14. SH-wave diffraction from a thin interface defect of finite width In the joint of an elastic layer with a half-space / D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk, M. V. Voytko, and Ya. P. Kulynych // Materials Science. – 2023. – **58**, № 6. – P. 701–708.
15. Rokhlin S. I. Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – **67**, № 4. – P. 1157–1165.
16. Semkiv M. Ya. Diffraction of normal SH-waves in a waveguide with a cut // Acoustic Bulletin. – 2011. – **14**, № 2. – P. 57–69. (in Ukrainian)
17. Tan T. H. Theorem on the scattering and the absorption cross section for scattering of plane, time-harmonic, elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1976. – **59**, № 6. – P. 1265–1267.
18. Grinchenko V. T. and Meleshko V. V. Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Solids. – Kyiv, Naukova Dumka, 1981. – 284 p. (in Russian)

Одержано 11.09.2024