

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ АНІЗОТРОПНОГО ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ТІЛА ЗІ ЗАПОВНЕНОЮ ТРІЩИНОЮ

В. П. СИЛОВАНЮК, В. О. МЕЛЬНИК, А. І. ДІДУХ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

З допомогою зсувної вінклерівської моделі досліджено процес заліковування тріщини поздовжнього зсуву в анізотропному пружно-пластичному тілі. Сформульовану крайову задачу зведено до розв'язування сингулярного інтегро-диференціального рівняння. Наведено розрахункові залежності міцності пружно-пластичного тіла з такою тріщиною від анізотропії пружних властивостей матеріалу.

Ключові слова: пружно-пластичне тіло, заліковування тріщин, антипловська деформація, міцність.

The healing process of a longitudinal shear crack in an anisotropic elastoplastic body is studied using the Winkler shear model. The formulated boundary problem is reduced to solving a singular integro-differential equation. Calculated dependences of the strength of an elastoplastic body with such a crack on the anisotropy of the material elastic properties are presented.

Keywords: elastic-plastic body, crack healing, anti-planar deformation, strength.

Вступ. Поширення тріщин у композитних матеріалах має низку особливостей. Одна з них – формування достатньо великих зон передруйнування біля вершин тріщини з нерозірваних волокон армувального матеріалу та пластичної матриці. Для встановлення граничного навантаження таких матеріалів застосовують нелінійну механіку руйнування, зокрема δ_c -критерій граничного розкриття або зсуву берегів тріщини. В інженерній практиці, зокрема в будівельній галузі, для відновлення міцності пошкоджених тріщинами елементів конструкцій використовують ін'єкційні технології заліковування [1, 2]. Вони полягають у введенні під тиском у дефектні зони тіла полімерів у рідкому стані, які після тверднення протидіють зміщенню протилежних поверхонь тріщин. В результаті тіло зміцнюється і здатне нести експлуатаційне навантаження. Відомі [2–4] теоретичні та експериментальні дослідження зі встановлення ресурсу міцності елементів конструкцій з ізотропних матеріалів. Нижче проаналізовано ефективність заліковування тріщини поздовжнього зсуву в анізотропних пружно-пластичних тілах зі застосуванням нелінійного δ_c -критерію міцності.

Основні співвідношення теорії пружності анізотропного тіла за поздовжнього зсуву. Поздовжній зсув реалізується в нескінченному циліндричному тілі під дією навантаження, прикладеного вздовж твірних циліндра. Поле переміщень, що відповідає такому напруженому стану, описують співвідношення

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, y). \quad (1)$$

Компоненти тензора деформацій пов'язані з переміщеннями співвідношеннями Коші:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2)$$

З виразів (1), (2) випливає, що компоненти тензора деформацій

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0. \quad (3)$$

Якщо припустити, що анізотропне тіло володіє площиною пружної симетрії, нормальною до твірних, то пружні сталі

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0. \quad (4)$$

У цьому випадку узагальнений закон Гука виглядає так:

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}, \\ 2\varepsilon_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz},\end{aligned}\quad (5)$$

або

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= 2c_{55}\varepsilon_{xz} + 2c_{45}\varepsilon_{yz}, \\ \tau_{yz} &= 2c_{44}\varepsilon_{yz} + 2c_{45}\varepsilon_{xz},\end{aligned}\quad (6)$$

де

$$c_{44} = \frac{a_{55}}{a_{55}a_{44} - a_{45}^2}, \quad c_{45} = \frac{a_{45}}{a_{55}a_{44} - a_{45}^2}, \quad c_{55} = \frac{a_{44}}{a_{55}a_{44} - a_{45}^2}. \quad (7)$$

Рівняння рівноваги тут зводяться до одного:

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Загальний його розв'язок можна подати через одну функцію $\chi(\xi)$ комплексної змінної $\xi = x + sy$:

$$u_z(x, y) = 2\operatorname{Re}[\chi(\xi)]. \quad (9)$$

Напруження розраховують за залежностями

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -2\operatorname{Re}[s\Phi(\xi)], \\ \tau_{yz} &= 2\operatorname{Re}[\Phi(\xi)],\end{aligned}\quad (10)$$

$$\Phi(\xi) = i(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2} \chi'(\xi), \quad s = -c_{45}/c_{44} + i(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2}/c_{44}.$$

Міцність пружно-пластичного тіла з тріщиною поздовжнього зсуву. Міцність циліндричного анізотропного тіла з тріщиною за поздовжнього зсуву (рис. 1) з використанням δ_{IIIc} -моделі розраховували за формулою [4]

$$q_c = \frac{2\tau_c}{\pi} \arccos \left(\exp \left(- \frac{\pi \delta_{IIIc}}{4a\tau_c \sqrt{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}} \right) \right). \quad (11)$$

Тут q_c – гранична інтенсивність зсувних навантажень; τ_c – границя міцності за зсуву матеріалу в площині тріщини; δ_{IIIc} – граничний зсув біля вершини тріщини; $2a$ – її довжина.

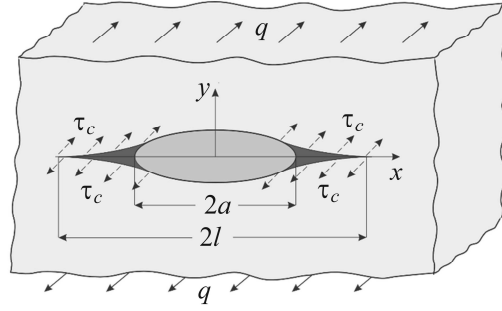


Рис. 1. Схематичне зображення поздовжнього зсуву тіла з дефектом.

Fig. 1. Schematic representation of longitudinal shear of a body with a defect.

Формулювання задачі. Нехай після ін'єкційного зміцнення тріщина заповнена матеріалом, який після тверднення утворює тонкий прошарок між її поверхнями. За антиплоскої деформації тіла контакт між прошарком і основним матеріалом опишемо за моделлю типу Вінклера:

$$\tau_{zy}(x,0) = \frac{[u_z(x)]}{2h(x)}\mu, \quad \sigma_y(x,0) = 0, \quad 0 \leq |x| \leq a. \quad (12)$$

Тут $[u_z(x)]$ – стрибок переміщення $u_z(x)$; μ – модуль зсуву матеріалу прошарку; $2h(x)$ – його товщина. В результаті прикладання у віддалених точках зсувних зусиль інтенсивністю $\tau_{zy} = q$ на обох кінцях тріщини виникають зони передруйнування, напруження в яких приймаємо рівним границі міцності на зсув:

$$\tau_{zy}(x,0) = \tau_c, \quad \sigma_y(x,0) = 0, \quad a \leq |x| \leq l. \quad (13)$$

Якщо від напруженого стану тіла з тріщиною відокремити однорідний напружений стан тіла без тріщини, що перебуває під дією зусиль $\tau_{zy} = q$, то можна звести задачу до встановлення рівноваги простору з тріщиною розміром $2l$, на поверхнях якої задані зусилля

$$\begin{aligned} \sigma_y(x,0) &= 0, \quad x \in (-l, l), \\ \tau_{yz}(x,0) &= -q + \frac{[u_z + u_z^0]}{2h(x)}\mu H(a - |x|) + \tau_c H(|x| - a), \quad x \in (-l, l). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут $H(x)$ – функція Гевісайда; $u_z^0 = \frac{qh(x)}{c_{44}}$. Зазначимо, що перша умова у формулах (14) виконується автоматично вибором загального розв'язку (9).

Інтегральне рівняння задачі. Враховуючи співвідношення (9), (10), введемо такі позначення:

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\text{Re} \left[\frac{\Phi(x)}{i\sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}} \right] = \begin{cases} f'(x), & x \in (-l, l), \\ 0, & x \notin (-l, l). \end{cases} \quad (15)$$

Звідси на основі формули Коші отримуємо:

$$\Phi(\xi) = \frac{\sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{f'(x)dx}{x - \xi}. \quad (16)$$

З другої граничної умови (14) для дотичних напружень, враховуючи вирази (10), (16), дістанемо інтегро-диференціальне рівняння для визначення функції $f(x)$:

$$\frac{\sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f'(t) dt}{t - x} - \frac{f(x)\mu}{h(x)} H(a - |x|) +$$

$$+ q - q\varepsilon H(a - |x|) - \tau_c H(|x| - a) = 0, \quad |x| \leq l, \quad \varepsilon = \mu / c_{44}. \quad (17)$$

Аналітичний розв'язок рівняння (17) можна одержати, якщо поверхню тріщини вважати еліптичним циліндром з півосями a, b та $h(x) = \frac{1}{\beta} \sqrt{a^2 - x^2}$,

$\beta = a / b$, $a \gg b$, а також припустити, що напружений стан в еліптичному про-шарку змінюється несуттєво з утворенням пластичних зон та однорідний, як для пружної моделі тіла.

Тоді

$$f(x) = \frac{q(1 - \varepsilon - \mu\beta A)}{\pi\sqrt{c_{44}c_{55} + c_{45}^2}} \left\{ 2\pi\sqrt{l^2 - x^2} + \frac{\tau_c - q(\varepsilon + \mu\beta A)}{q(1 - \varepsilon - \mu\beta A)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(x - a)\Gamma(l, x, a) - (x + a)\Gamma(l, x, -a) - 4\sqrt{l^2 - x^2} \arccos \frac{a}{l} \right] \right\}, \quad (18)$$

$$\Gamma(l, x, a) = \ln \frac{l^2 - xa - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - a^2)}}{l^2 - xa + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - a^2)}}, \quad A = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2} + \mu\beta}.$$

З умови обмеженості та неперервності напружень у точках $x = \pm l$ встановлюємо розмір зони передруйнування:

$$l - a = a \left(\sec \frac{\pi}{2} \frac{(1 - \varepsilon - \mu\beta A)}{\tau_c - q(\varepsilon + \mu\beta A)} - 1 \right). \quad (19)$$

Тепер формулу (18) зведемо до вигляду

$$f(x) = \frac{\tau_c - q(\varepsilon + \mu\beta A)}{\pi\sqrt{c_{44}c_{55} + c_{45}^2}} \times \left[(x - a)\Gamma(l, x, a) - (x + a)\Gamma(l, x, -a) \right]. \quad (20)$$

Для розрахунку граничного навантаження застосуємо критерій критичного зсуву поверхонь тріщини $2u_z(a) = 2f(a) = \delta_{IIIc}$. У результаті отримаємо рівняння для розрахунку ресурсу міцності на поздовжній зсув анізотропного тіла зі залікованою тріщиною:

$$-\frac{8a(\tau_c - q_*(\varepsilon + \mu\beta A))}{\pi\sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}} \ln \cos \frac{\pi q_*(1 - \varepsilon - \mu\beta A)}{2(\tau_c - q_*(\varepsilon + \mu\beta A))} = \delta_{IIIc}. \quad (21)$$

Встановили (рис. 2) залежність нормованого граничного навантаження q_*/τ_c від геометричних параметрів тріщиноподібного дефекту та пружних характеристик наповнювача та основного матеріалу.

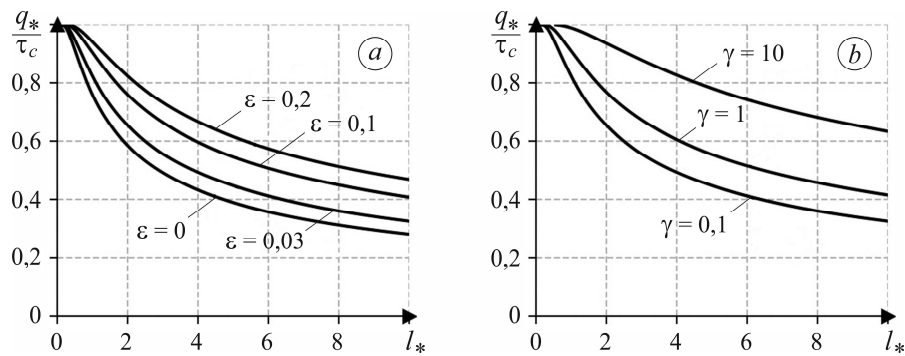


Рис. 2. Залежність граничного навантаження від нормованої довжини дефектів ($l_* = 8a\tau_c / (c_{44}\delta_{IIIc}\pi)$) за різних значень коефіцієнта жорсткості ϵ (a) та параметра анізотропії $\gamma = c_{55} / c_{44}$ (b) (a: $\gamma = 10, \beta = 20$; b: $\epsilon = 0,03, \beta = 20$).

Fig. 2. Dependence of the critical load on the normalized length of defects ($l_* = 8a\tau_c / (c_{44}\delta_{IIIc}\pi)$) at different values of rigidity coefficients ϵ (a) and anisotropy parameter $\gamma = c_{55} / c_{44}$ (b): (a: $\gamma = 10, \beta = 20$; b: $\epsilon = 0,03, \beta = 20$).

ВИСНОВКИ

У межах нелінійної механіки руйнування оцінено антиплоску деформацію пружно-пластичного тіла з тріщиною, залікованою ін'єкційним матеріалом. З допомогою моделі пружного прошарку вінклерівського типу сформульовану крайову задачу зведено до розв'язання інтегро-диференціального рівняння. В припущенні, що напруження у прошарку змінюється несуттєво з виникненням пластичної зони, отримано аналітичний розв'язок рівняння. Встановлено, що ефективність відновлення міцності тіла з тріщиною після ін'єкційної технології залежить від геометричних параметрів дефекту та пружних характеристик матеріалів.

Робота виконана в межах проєкту № 2023.04/0132 Національного фонду досліджень України.

1. Czarnecki L., Emmons P. H. Naprawa i ochrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – P. 434.
2. Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P. Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Dordrecht; Heidelberg; New York; London: Springer, 2014. – P. 230.
3. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термopружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.

Одержано 18.07.2024