

ВИКОРИСТАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НАДПРОВІДНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ МАГНІТНИХ СИСТЕМ

Ю.М. Васецький, докт. техн. наук, **І.Л. Мазуренко**, канд. техн. наук, **А.В. Павлюк**, асп.
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

На основі розробленої математичної моделі й оцінки геометричних параметрів досліджено можливість використання асимптотичних методів для розрахунку магнітних полів, запасеної енергії поля і масогабаритних параметрів надпровідних тороїдальних магнітних систем з обмеженою кількістю котушок. Показано, що залежно від характеристик взаємного розташування джерел поля й області його визначення необхідно використовувати різні асимптотичні методи розрахунку. Встановлено, що точність розрахунку магнітного поля і його енергії є достатньою для практичного використання асимптотичних методів. Оцінка ефективності їх застосування для тороїдальних надпровідних систем показала, що необхідний обсяг обчислень суттєво зменшується порівняно з використанням традиційних чисельних методів. Бібл. 11, рис. 10, таблиця.

Ключові слова: надпровідна тороїдальна обмотка з обмеженою кількістю котушок, математична модель, асимптотичні методи.

Вступ. Обмотка тороїдальних магнітних систем звичайно складається з певної кількості однакових окремих котушок, які симетрично розташовані вздовж кругової осі. Тому про тороїдальність геометрії такої системи можна говорити у тому відношенні, що осьові лінії кожної котушки лежать на деякій тороїдальній поверхні. Якщо система складається з великої кількості котушок, то вони досить щільно заповнюють цю тороїдальну поверхню. Однак у будь-якому випадку магнітна система, що складається з окремих котушок, лише умовно є тороїдальною системою, в дійсності вона не є осесиметричною і в загальному випадку має розглядатися як система окремих котушок, розташованих визначеним чином.

Математична модель магнітної системи з обмеженою кількістю котушок у порівнянні з ідеалізованою математичною моделлю у вигляді суцільної струмової поверхні або моделлю з суцільною „товстою обмоткою” [11] повинна врахувати кількість котушок та геометричні параметри перерізу кожної котушки. Така модель дає змогу знаходити магнітні поля у всьому просторі, у тому числі й поля розсіювання, які відсутні при використанні моделі суцільної тороїдальної обмотки.

Раніше на прикладі дослідження магнітних полів та параметрів надпровідних індуктивних накопичувачів енергії (НПН) з тороїдальною обмоткою, що складається з окремих котушок, було показано вплив дискретності на такі параметри: радіальні розміри, об'єми надпровідної обмотки та конструктивного матеріалу механічної утримуючої системи [5]. Значення індукції магнітного поля та енергії в моделі з обмеженою кількістю котушок було визначено з допомогою чисельних методів відповідно прямокутних паралелепіпедів та струмових ниток. Електромагнітні сили, що виникають у надпровідній обмотці при протіканні струму, також були визначені з допомогою методу розбиття на прямокутні паралелепіпеди з подальшим підсумовуванням сил, що діють на ці блоки, для знаходження розподілу лінійної густини сил вздовж периметра котушок.

Точність розрахунку при визначенні магнітних полів та параметрів тороїдальних систем з обмеженою кількістю котушок залежить від ступеня розбиття обмотки, тобто від кількості паралелепіпедів та струмових ниток. При розробці надпровідних магнітних систем пристроїв, призначених для виконання певних функцій в електроенергетиці, виникає необхідність проводити багатоваріантні розрахунки, що пов'язано, зокрема, з урахуванням різних режимів роботи енергосистем [2], а також визначення оптимальних параметрів пристроїв. Все це призводить до дуже великих обсягів необхідних обчислень. У такому випадку, як було показано, для систем з масивними криволінійними провідниками різної конфігурації

більш ефективними є наближені асимптотичні методи [2], в яких з достатньою точністю враховуються основні геометричні властивості складних за конфігурацією магнітних систем.

У найбільшому ступені обсяг обчислень зменшується для тривимірних задач розрахунку магнітних полів, сил і енергетичних параметрів, що є характерним і для тороїдальних магнітних систем з дискретною обмоткою. Це пов'язано в першу чергу з тим, що в задачах, які виникають, при використанні асимптотичних методів замість об'ємних інтегралів необхідно обчислювати лише одновимірні контурні інтеграли, а геометрія перерізу струмопроводів враховується окремо.

Метою цієї роботи є дослідження можливості використання більш ефективних асимптотичних методів для розрахунку магнітних полів та параметрів надпровідних тороїдальних магнітних систем з обмеженою кількістю котушок. Порівняння отриманих результатів проводиться з результатами, отриманими за допомогою більш точних, але й більш трудомістких чисельних методів. Аналіз виконується для геометрично відносно простої конфігурації тороїдальної магнітної системи з круглими котушками незмінного перерізу (рис. 1).

Математична модель. Дослідження магнітних полів і параметрів тороїдальних соленоїдів з обмеженою кількістю котушок необхідно виконувати з урахуванням реальної геометрії магнітної системи. Основними геометричними параметрами, що характеризують тороїдальну систему, є великий радіус тора R і відносна величина перерізу тора ε (рис. 1):

$$R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{a}{R}, \quad (1)$$

де a – радіус осьової лінії круглої котушки.

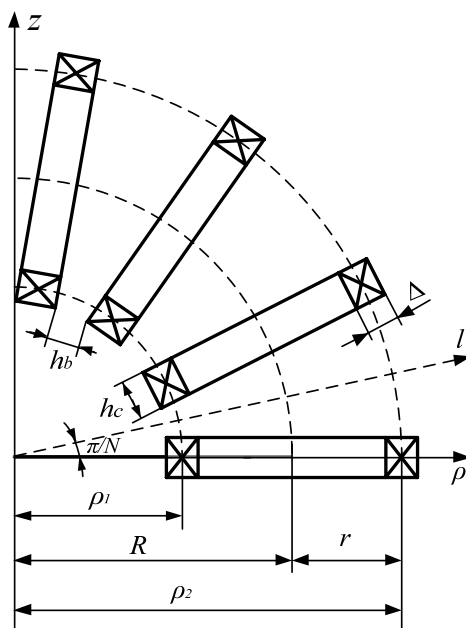


Рис. 1

Додатковими геометричними параметрами, які використовуються для дослідження магнітних систем з визначеною кількістю котушок, є: кількість котушок N , відстань між ними h_b , а також розміри перерізу обмотки котушок – товщина Δ та ширина h_c (рис. 1). Всі геометричні розміри можуть бути нормовані на обраний розмірний параметр, яким у роботі вважається R .

Відстань h_b може бути визначена через інші геометричні розміри магнітної системи:

$$h_b = 2 \sqrt{h_c^2 + \left(\rho_1 - \frac{\Delta}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N} - \arctan \frac{h_c}{2\rho_1 - \Delta}\right)}. \quad (2)$$

Ширину котушок зручно представити у вигляді добутку максимальної ширини h_{cn} при точному стикуванні на радіусі $\rho'_1 = (\rho_1 - \Delta/2)/\cos(\pi/N)$ (рис. 1) і коефіцієнта стикування $k_{ct} \leq 1$: $h_c = h_{cn} k_{ct}$.

Внаслідок дискретності тороїдальної обмотки, що складається з окремих надпровідних котушок, магнітне поле буде існувати не тільки всередині тороїдального об'єму, воно буде й всередині обмотки та поширюватися за межі тороїдального об'єму. Це створює необхідність розраховувати поле в усьому просторі, де протікають електричні струми і поза ними.

Використання асимптотичних методів передбачає вибір малих параметрів, пов'язаних з характером взаємного розміщення джерел струму, і області, в якій визначається поле. У цьому випадку вони визначаються геометричними властивостями осьової лінії і перерізу котушок. Малими величинами можуть бути відношення відстані r , на яку віддалена будь-яка точка від осьової лінії, до характерних розмірів контура. Для тороїдальних магнітних систем з дискретними котушками характерним є відносно малі розміри перерізу котушок порівняно з радіусами кривизни їх осьових ліній і розмірами контурів, створених цими лініями. Тому

такі магнітні системи є об'єктом, для якого доцільним є використання асимптотичних методів розрахунку. Залежно від того, в якій області простору розраховується поле, малими виявляються різні параметри. Відповідно використовуються різні асимптотичні методи.

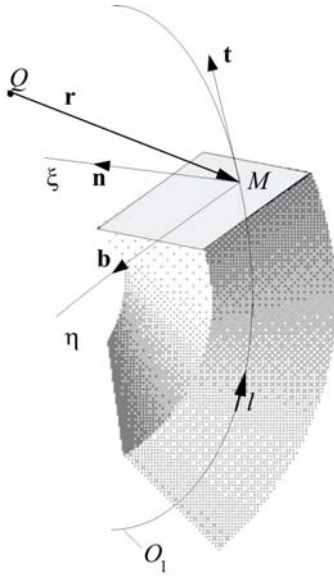


Рис. 2

Метод мультипольного розкладання є найбільш ефективним методом розрахунку розподілу поля на відстанях, великих порівняно з розмірами простору, в якому зосереджені джерела струму. Для струмопроводів, що утворені масивними провідниками, метод дає змогу значно розширити область застосування – для цього необхідно лише, щоб характерні розміри не всього контура струмопроводу, а його перерізу d були малі порівняно з відстанню r від перерізу до точки спостереження, в якій визначається поле. Тобто метод є застосовним, якщо малим є параметр $\varepsilon_D = d/r$ (рис. 2).

При означених умовах використовується розклад векторного потенціалу в ряд Тейлора, який з урахуванням малого параметра представляють у вигляді [2]

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_S j \mathbf{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\boldsymbol{\rho} \nabla)^k \frac{1}{r} dS dl, \quad (3)$$

де l – довжина осьової лінії; S – площа перерізу; j – густина струму; \mathbf{t} – одиничний вектор, дотичний до осьової лінії.

Після інтегрування по площі перерізу в (3) отримують вираз для потенціалу

$$A = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_l (m^{(0)} \mathbf{t} + f_{Ai}^{(1)} m_i^{(1)} + f_{Aij}^{(2)} m_{ij}^{(2)} + f_{Aijk}^{(3)} m_{ijk}^{(3)} + \dots) \frac{dl}{r}, \quad (4)$$

де i, j, \dots – індекси, що відповідають координатам ξ, η у площині перерізу вздовж головної нормалі і бінормалі до лінії контура. У виразі (4) виконується підсумовування по повторюваних індексах. Через $m_{ij\dots}^{(n)}$ позначені моменти плоского перерізу n -го порядку, що в сукупності утворюють тензор рангу n :

$$m_{ij\dots}^{(n)} = \int_S j x_i x_j \dots dS = \int_S j(\xi, \eta) \xi^{n_1} \eta^{n_2} dS, \quad (5)$$

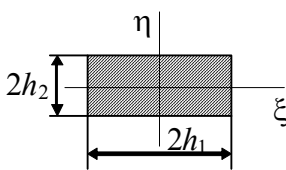


Рис. 3.

де $n = n_1 + n_2$. Так, наприклад, для часто застосовуваного струмопроводу, що має переріз прямокутної форми (рис. 3), при однорідному розподіленні струму за перерізом $j = \text{const}$, нерівними нулю будуть лише моменти з парними значеннями $n_1 = 2k_1$ і $n_2 = 2k_2$:

$$m^{(2k_1+2k_2)} = 4j \frac{h_1^{2k_1+1} h_2^{2k_2+1}}{(2k_1+1)(2k_2+1)}. \quad (6)$$

Моментом нульового порядку є просто струм, що тече по провіднику $m^{(0)} = I$.

Функції $f_{Aij}^{(n)}$ під знаком інтегралу (4) залежать тільки від координати l осьової лінії контура і координат точки Q , в якій знаходиться поле. Функції $f_{Ai}^{(1)}$ і $f_{Aij}^{(2)}$ для магнітних систем з котушками, осьова лінія кожної з яких лежить у площині, можуть бути представлені як

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{A\xi}^{(1)} = -\left(\frac{\mathbf{nr}}{r^2} + \frac{1}{a}\right) \mathbf{t}, & \mathbf{f}_{A\eta}^{(1)} = -\left(\frac{\mathbf{br}}{r^2}\right) \mathbf{t}; \\ \mathbf{f}_{A\xi\xi}^{(2)} = -\left(\frac{\mathbf{nr}}{r^2} \mathbf{f}_{A\xi}^{(1)} - \frac{(\mathbf{nr})^2}{2r^3} \mathbf{t} + \frac{\mathbf{t}}{2r^2}\right), & \mathbf{f}_{A\eta\eta}^{(2)} = -\left(\frac{\mathbf{br}}{r^2} \mathbf{f}_{A\eta}^{(1)} - \frac{(\mathbf{br})^2}{2r^3} \mathbf{t} + \frac{\mathbf{t}}{2r^2}\right), \end{cases} \quad (7)$$

де a – радіус кривизни осьової лінії.

Вираз для індукції магнітного поля отримують у результаті застосування операції rot до кожного члена суми (4):

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_l (I \mathbf{t} \times \mathbf{r} + f_{Bi}^{(1)} m_i^{(1)} + f_{Bij}^{(2)} m_{ij}^{(2)} + f_{Bijk}^{(2)} m_{ijk}^{(2)} + \dots) \frac{dl}{r^3}, \quad (8)$$

функції $f_{Bij}^{(n)}$ мають вигляд

$$\begin{cases} f_{B\xi}^{(1)} = -\left(\frac{3nr}{r^2} + \frac{1}{a}\right) t \times r + b, & f_{B\eta}^{(1)} = -\left(\frac{3br}{r^2}\right) t \times r + n, \\ f_{B\xi\xi}^{(2)} = -\frac{3}{r} \left(f_{B\xi}^{(1)} \frac{nr}{r} + \left(1 + \frac{(nr)^2}{r^2}\right) \frac{t \times r}{2r} \right) - \frac{b}{a}, & f_{B\eta\eta}^{(2)} = -\frac{3}{r} \left(f_{B\xi}^{(1)} \frac{br}{r} + \left(1 + \frac{(br)^2}{r^2}\right) \frac{t \times r}{2r} \right). \end{cases} \quad (9)$$

В області простору поблизу осьових ліній котушок, у тому числі й там, де протікають струми, параметр ε_D буде малим тільки для достатньо віддалених ділянок провідника. У випадку, коли відстань до точки Q , у якій визначається поле, співрозмірна з розмірами контура, малим параметром, по якому виконують розкладання, є параметр ε_d , рівний відношенню характерних розмірів перерізу до характерних розмірів контура. Оскільки поле створено всіма джерелами контура, то загальний розв'язок задачі отримують з використанням процедури зрощування двох розкладань [2]. У результаті вираз для векторного потенціалу замість об'ємного містить лише одновимірний інтеграл. У випадку, коли розташування осьової лінії обрано таким чином, що вона проходить через точки перерізів, де моменти першого порядку дорівнюють нулю ($m_i^{(1)} = 0$), формула для розрахунку векторного потенціалу набуває вигляду

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{2\pi(1-\xi/a)^{1/2}} (\Psi_0 - \frac{\Psi_1 \mathbf{n}}{2a}) \mathbf{t} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \left(1 + \frac{\mathbf{r} \mathbf{p}_Q}{r^2 + d^2} \right) \mathbf{t} \frac{dl}{(r^2 + d^2)^{1/2}}, \quad (10)$$

де d – довільний розмірний параметр, порядок величини якого відповідає характерному розміру перерізу. Функції Ψ_0 , Ψ_1 – логарифмічні потенціали плоского поля, які розраховуються окремо. Відповідні вирази для різних конфігурацій перерізів наведено у роботі [2].

Індукція магнітного поля поблизу кругової осі у будь-якій точці перерізу провідника може бути знайдена в результаті дії операції $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Для котушок кругової форми результат інтегрування записується у вигляді простого аналітичного виразу:

$$\begin{cases} B_\xi = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{\xi}{2a} \right) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} - \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi_1 \mathbf{n}) \right], \\ B_\eta = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{\xi}{2a} \right) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Psi_1 \mathbf{n}) - \frac{1}{2a} \left(\Psi_0 + I \left(\ln \frac{8a}{d} - 1 \right) \right) \right]. \end{cases} \quad (11)$$

Повна енергія магнітного поля W , що створена системою струмів, є сумою [6]

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k W_{ik}, \quad (12)$$

де складові $\frac{1}{2} W_{ii}$ при $i = k$ дають власну енергію кожної системи струмів, а складові

$W_{ik} = W_{ki}$ при $i \neq k$ представляють взаємну енергію струмів.

Взаємна енергія може бути визначена як

$$W_{ik} = \int_V \mathbf{A}_j dV, \quad (13)$$

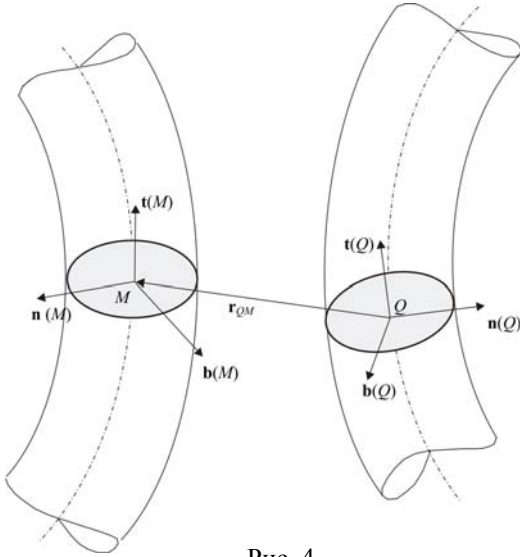


Рис. 4

де \mathbf{j} – густина струму однієї з систем струмів; \mathbf{A} – векторний потенціал, створений іншою системою струмів у місці протікання струмів \mathbf{j} .

З використанням асимптотичного методу розрахунку для системи двох струмопроводів, показаних на рис. 4, вираз для взаємної енергії можна представити як суму, що містить одновимірні інтеграли і моменти плоских перерізів (5).

Якщо, як і раніше, осеві лінії проходять через перерізи в точках, де моменти першого порядку дорівнюють нулю, то маємо

$$W_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{l_Q l_M} \left(I_Q I_M \mathbf{t}_Q \cdot \mathbf{t}_M + I_Q m_{ij}^{(2)}(M) f_{Wij}^{(0,2)} + I_M m_{ij}^{(2)}(Q) f_{Wij}^{(2,0)} + \dots \right) \frac{dl_M dl_Q}{r}. \quad (14)$$

Функції $f_{Wij}^{(k,n)}$ залежать тільки від координат l_Q , l_M точок на осевих лініях контурів і вектора $\mathbf{r}_{QM} = -\mathbf{r}_{MQ}$ між цими точками. При цьому

$$f_{Wij}^{(0,2)} = \mathbf{t}_Q \mathbf{f}_{Aij}^{(2)}(l_M, \mathbf{r}_{QM}), f_{Wij}^{(2,0)} = \mathbf{t}_M \mathbf{f}_{Aij}^{(2)}(l_Q, \mathbf{r}_{MQ}). \quad (15)$$

Власна енергія магнітного поля контура зі струмом визначається аналогічно за виразом (13), проте необхідно обирати наближений вираз для векторного потенціалу в точках поблизу джерел поля (10). Тоді, як показано в [2], маємо

$$W_{ii} = \frac{\mu_0 a}{2} I^2 \left(\ln \frac{8a}{d_g} - 2 \right), \quad (16)$$

де d_g – середньгеометричний розмір поперечного перерізу (рис. 3), який для перерізу прямокутної форми може бути знайдений з виразу

$$\ln \frac{d_g}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{h_1}{h_2} \arctg \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \arctg \frac{h_1}{h_2} \right) - \frac{25}{12} - \frac{1}{12} \left[\frac{h_1^2}{h_2^2} \ln \left(1 + \frac{h_2^2}{h_1^2} \right) + \frac{h_2^2}{h_1^2} \ln \left(1 + \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) \right]. \quad (17)$$

Для отримання значення енергії необхідно обчислити вирази (14), (16), які містять тільки одновимірні контурні інтеграли, що у порівнянні з початковим виразом (13), де наявний об'ємний інтеграл, суттєво спрощує розрахунок.

Параметри надпровідної тороїдальної магнітної системи. Дослідження ефективності використання асимптотичних методів проведемо на прикладі розрахунку параметрів надпровідної тороїдальної системи з певною кількістю окремих кругових котушок. Виконаємо порівняння показників використання асимптотичних методів з чисельними для магнітної системи, яка має ті ж вхідні параметри, що і в роботі [5], де розрахунки виконувались за допомогою чисельних методів: енергоємність $W = 450$ МДж, надпровідна обмотка має максимальну припустиму індукцію $B_m = 5$ Тл і максимальну густина струму $j_m = 4 \cdot 10^7$ А/м², що відповідають обмотці з низькотемпературного надпровідника NbTi. Такі вхідні параметри характерні для надпровідного індуктивного накопичувача, здатного виконувати певні функції в електроенергетичній системі по забезпеченню надійної роботи енергосистеми та підвищенню якості енергії [1, 9]. Відносний радіус котушок тороїдальної системи обрано достатньо близьким до оптимального $\varepsilon = 0,6$.

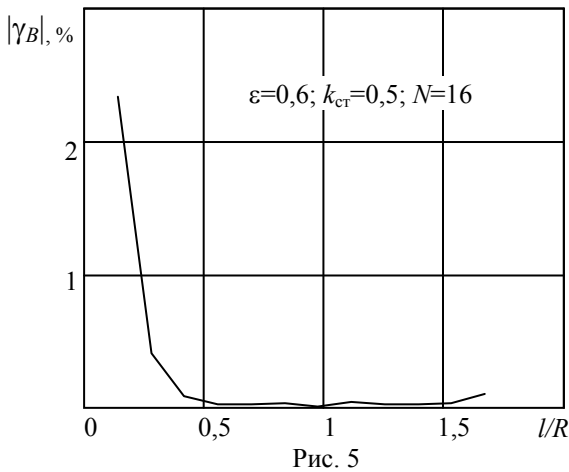
Для порівняння результатів обчислення деякої величини T_i різними методами будемо оцінювати відносне відхилення відповідних значень:

$$\gamma_i = \frac{T_{ich} - T_{ia}}{T_{ich}} \cdot 100\%, \quad (18)$$

де T_{ich} – точне значення величини T_i ; T_{ia} – значення, отримане за допомогою асимптотичного методу.

Для магнітних систем з обмеженою кількістю котушок вхідними параметрами вважаються: енергоємність W , властивості матеріалів B_m , j_m , σ_c , σ_t , а також геометрична конфігурація магнітної системи N , ε , k_{ct} . Вихідними параметрами є, насамперед, масогабаритні параметри: розміри магнітної системи (великий радіус тора R), об'єм надпровідної обмотки V_{sc} , об'єм V_t та V_c матеріалу механічної утримуючої системи, що сприймають відповідно сили розтягу і стиску, а також геометричні параметри надпровідної обмотки: її товщина Δ , ширина h_c та відстань між котушками h_b (рис. 1).

Спочатку проведемо дослідження ефективності використання асимптотичних методів для розрахунку магнітних полів. Надпровідна обмотка тороїдальних соленоїдів з обмеженою кількістю котушок містить незаповнені провідником повітряні проміжки, внаслідок неможливості точного стикування окремих котушок, що найбільше позначається на радіусі r_2 тора (рис. 1). Чисельні та асимптотичні методи дають змогу обчислювати поле як всередині тороїдального об'єму, так і поза ним. Поле між котушками та поза тороїдальним об'ємом є задачею обчислення індукції в точках, віддалених від джерел поля, і може бути знайдено з виразу (8), поле в обмотці котушок – індукція в точках поблизу джерел відповідно знаходиться з виразу (11).



На рис. 5 представлено розраховані значення відносної похибки $|\gamma_B|$ асимптотичного методу порівняно з чисельним для точок, що знаходяться між котушками у незаповненій обмоткою області, вздовж лінії l як поблизу кругової осі тора, так і в області поза «тороїдальним» об'ємом. За точні вибрано значення B_{ch} , знайдені за допомогою методу прямокутних паралелепіпедів [5], у цьому випадку достатньою була кількість блоків 2880. Подальше збільшення кількості блоків не призводило до зміни результатів розрахунку.

Видно, що в області «тороїдального» об'єму $1 - \varepsilon \leq l/R \leq 1 + \varepsilon$ параметр $|\gamma_B|$ не перевищує декількох десятих відсотка (поблизу кругової осі тора при $l/R \approx 1$ відносне відхилення складає дуже незначну величину $|\gamma_B| \approx 0,02\%$). Зростання $|\gamma_B|$ в області поблизу вертикальної осі тора обумовлено тим, що тут сама величина індукції різко падає і незначна похибка дає помітну величину відносного відхилення $|\gamma_B|$.

Для оцінки ефективності розрахунку асимптотичним методом визначався необхідний час для багаторазового розрахунку індукції (100 разів). При визначенні поля вздовж лінії між котушками він виявився значно меншим у порівнянні з використанням чисельного методу. Відношення необхідного часу при використанні чисельного методу до часу затраченого при розрахунку асимптотичним методом становить $t_q / t_a \approx 5,5$, що наведено у відповідній колонці таблиці.

Місце визначення індукції магнітного поля	Чисельний метод		Час розрахунку асимптотичним методом, t_a	$\frac{t_q}{t_a}$
	Кількість блоків	Час розрахунку чисельним методом, t_q		
Між котушками	2880	66 хв	12 хв	5,5
В точці „а” перерізу	12960	10 хв 40 с	15 с	42,66

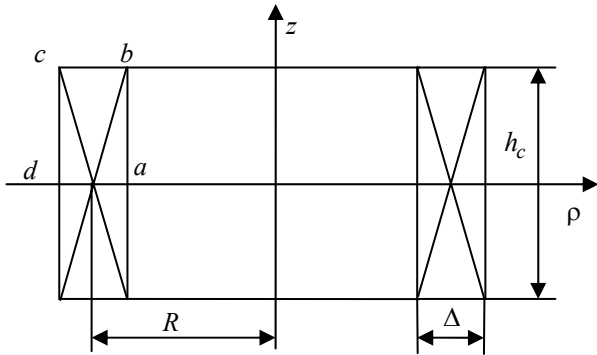


Рис. 6

Для визначення точності та ефективності розрахунку індукції поля за допомогою асимптотичного методу в іншій області простору – поблизу осьової лінії котушки зі струмом було вибрано точки a і d (рис. 6), в яких виконано, як і у попередньому випадку, розрахунок індукції 100 разів. У цих точках відносна похибка порівняно з результатом, отриманим чисельним методом, становить: у точці a – $|\gamma_B| = 0,06\%$; у точці d – $|\gamma_B| = 1,79\%$. Час,

затрачений чисельним методом, більший майже у 43 рази, ніж асимптотичним методом (таблиця).

У зв'язку з тим, що точність визначення індукції магнітного поля асимптотичним методом є досить високою, а необхідний час на проведення розрахунків значно зменшується, з'являється можливість більш детального аналізу розподілу поля в магнітній системі. Для проведення обмеженого обсягу обчислень у конкретній магнітній системі може бути використано як чисельний, так і асимптотичний метод. Однак для багатоваріантних розрахунків асимптотичний метод стає кращим, принаймні для отримання попередніх даних.

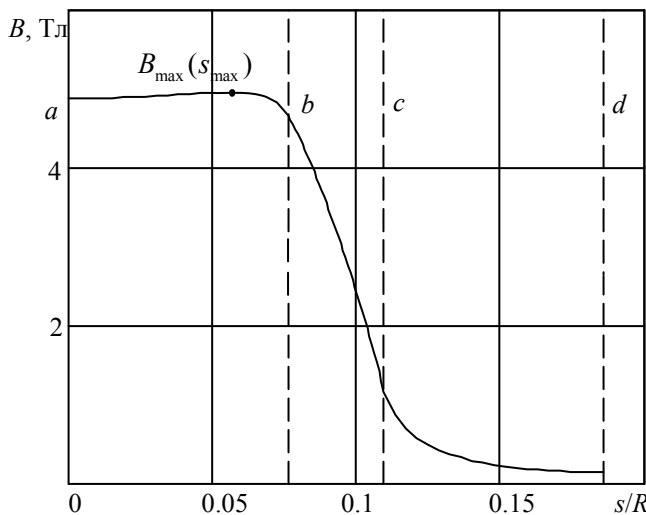


Рис. 7

Як приклад, розглянемо розподіл магнітного поля по периметру перерізу та всередині його. Розподіл поля по лінії, на якій лежать точки a , b , c , d , наведено у вигляді залежності $B(s/R)$ на рис. 7, де s – довжина вздовж периметра, що відраховується від точки a . Точку, де знаходиться максимальне значення індукції, виділено на графіку: вона знаходиться між точками a і b перерізу. Тобто максимальне значення індукції буде на внутрішній поверхні тора, проте на відміну від спрощеної моделі з суцільною струмовою поверхнею не в точці a , як вважалось раніше. Ця особливість пояснюється тим, що у тонких котушках кінцевої висоти максимум поля зміщується до її торця [8], і

у системі котушок у тороїдальному соленоїді цей ефект також проявляється, але не такою значною мірою, як у відокремленій котушці.

Розподіл індукції по площі перерізу у вигляді ліній однакового значення її абсолютної величини показано на рис. 8. Значення індукції по перерізу ближче до вертикальної осі тора виявляються меншими, порівняно з допустимим значенням. Розрахунки показують, що область перерізу, в якій значення індукції вдвічі менші, ніж максимальне, тобто $B \leq 2,5$ Тл становить приблизно половину площі всього перерізу обмотки. Частина обмотки у цій області

можна замінити на іншу з більшим значенням густини струму. Це призведе до зменшення площі перерізу та в результаті до зменшення маси надпровідника.

Розглянемо тепер результати розрахунків енергії поля та деяких масогабаритних параметрів магнітної системи. Точність розрахунку енергії з допомогою чисельного методу залежить від кількості струмових ниток [11]. Зі збільшенням числа ниток зростає точність, проте одночасно зростає й обсяг розрахунку. Вибравши за точне значення енергії при кількості струмових ниток, достатній для порівняння, можна розрахувати значення енергії та відносні похибки при її обчисленні двома методами.

Результат порівняння показує, що похибка розрахунку асимптотичним методом в обраному прикладі для власної енергії поля окремих котушок не перевищує 1 %, а взаємної –

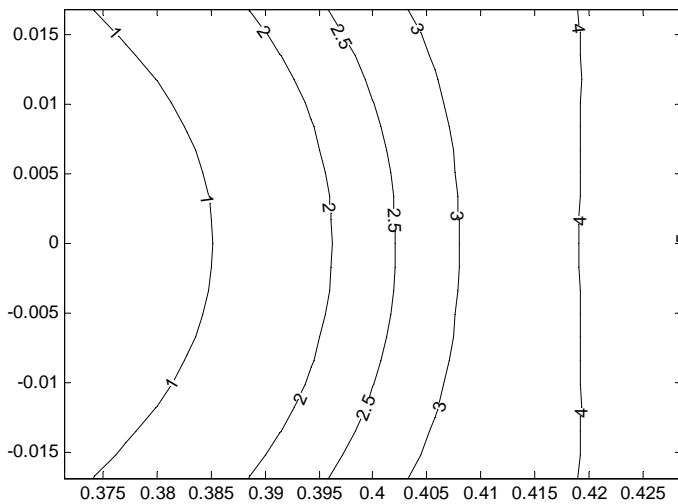


Рис. 8

точність виявляється ще кращою. Однак найбільш суттєвим є зменшення необхідного обсягу розрахунків завдяки тому, що використання чисельного методу передбачає багаторазове інтегрування з урахуванням вибраної кількості струмових ниток, тоді як асимптотичним – лише по осевих лініях котушок.

Для надпровідних магнітних систем, які можуть використовуватися як індуктивні накопичувачі в електроенергетиці, важливими показниками є масогабаритні параметри, серед яких одні з найбільш суттєвих виявляються розміри накопичувача (великий радіус

тора R) та об'єм надпровідної обмотки V_{sc} .

Як показано в роботі [4], для їх визначення необхідно обчислити при заданому струмі й конфігурації котушок максимальну індукцію поля й його енергію. Порівняння параметрів, отриманих в результаті розрахунку асимптотичним і чисельним методами, зручно виконувати для безрозмірних параметрів $k_R(\varepsilon)$ й $k_{V_{sc}}(\varepsilon)$, пов'язаних зі значенням великого радіуса тора і об'єму матеріалу надпровідної обмотки:

$$R = \frac{W^{1/3} \mu_0^{1/3}}{B_m^{2/3}} k_R(\varepsilon); \quad V_{sc} = \frac{W^{2/3}}{j_m B_m^{1/3} \mu_0^{1/3}} k_{V_{sc}}(\varepsilon). \quad (19)$$

З представлених залежностей (рис. 9 і 10) видно, що відхилення значень параметрів, отриманих за допомогою асимптотичних методів, від точних значень в цілому зростають зі зменшенням відносного радіуса котушок, що утворюють тороїдальну систему. Це пов'язане в першу чергу з тим, що зі зменшенням величини ε зростає висота котушок порівняно з їх радіусом. При малих ε розмір перерізу котушок (їх висота) стає співрозмірною з радіусом кривизни, що є обмеженням використання асимптотичного методу розрахунку. Як показує аналіз малих параметрів, для обраної кількості котушок $N = 36$ при їх повному стикуванні метод можливо використовувати, коли $\varepsilon \geq 0,2$.

Висновки. Асимптотичні методи дають змогу визначити магнітні поля і параметри тороїдальних систем накопичення енергії наближено. Основними перевагами цих методів є суттєве зменшення обсягу та відповідно часу розрахунку порівняно з чисельними, і достатня точність, яка може бути задовільною на першому етапі вибору характеристик магнітних систем, у тому числі індуктивних накопичувачів енергії, призначених для використання в певних галузях електроенергетики, коли необхідно опрацювати велику кількість вхідних даних.

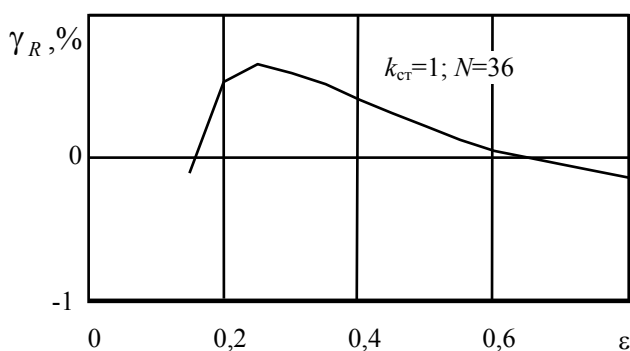


Рис. 9

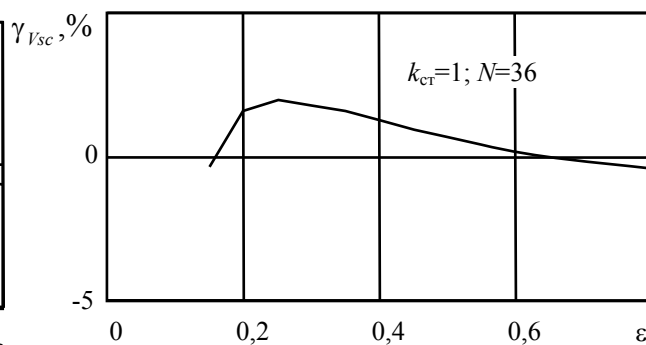


Рис. 10

У моделі тороїдальних систем з обмеженою кількістю котушок максимальне значення індукції буде на внутрішній частині тора в точці, яка не лежить посередині ширини перерізу котушки (точка a), як було у моделі з суцільною струмовою поверхнею, а розташована ближче до краю її перерізу.

По перерізу котушок тора індукція магнітного поля розподілена нерівномірно, приблизно в половині площі, розташованій ближче до вертикальної осі тора, вона буде мати набагато менше значення, порівняно з допустимим для вибраного матеріалу надпровідника. Ця частина обмотки може бути замінена на іншу з більшим значенням густини струму, що призведе до зменшення об'єму та маси надпровідника та покращить масогабаритні показники індуктивного накопичувача.

1. Божко С.В. Применение сверхпроводящих накопителей электромагнитной энергии при решении задач повышения устойчивости энергосистем и улучшения качества электроэнергии // Промэлектро. – 2002. – № 4. – С. 40–44.
2. Васецкий Ю.М. Асимптотические методы решения задач электродинамики в системах с массивными криволинейными проводниками. – К.: Наук. думка, 2010. – 271 с.
3. Васецкий Ю.М., Мазуренко І.Л., Павлюк А.В. Застосування надпровідних індуктивних накопичувачів (НПН) для демпфування нерегулярних коливань перетоку потужності // Техн. електродинаміка. – 2012. – № 3. – С. 43–44.
4. Васецкий Ю.М., Мазуренко І.Л., Павлюк А.В. Параметры сверхпроводящих магнитных систем с удерживающими элементами внутри тороидального объема // Техн. електродинаміка. – 2011. – № 5. – С. 36–47.
5. Павлюк А.В. Магнітні поля і параметри надпровідних тороїдальних систем з обмеженою кількістю котушок // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАНУ, 2013. – Вип. 34. – С. 94–105.
6. Тамм І.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 503 с.
7. Тозони О.В., Маергойз І.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. – К.: Техника, 1974. – 352 с.
8. Уилсон М. Сверхпроводящие магниты / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 406 с.
9. Якимец І.В., Дмитриева Г.А. Сверхпроводниковые индуктивные накопители как средство управления перетоками активной мощности по межсистемным связям ЭЭС // Электричество. – 2003. – № 2. – С. 6–16.
10. Eyssa Y.M., Boom R.W. Considerations of a Large Force Balanced Magnetic Energy Storage System // IEEE Trans. on Magnetics. – 1981. – Vol. 17. – N 1. – P. 460–462.
11. Thome R.J., Tarrh J.M. MHD and Fusion Magnets. Field and Force Design Concepts. New York, A Wiley-Interscience publication, 1982. – 316 p.

УДК 621.355

Ю.М. Васецкий, докт. техн. наук, **І.Л. Мазуренко**, канд. техн. наук, **А.В. Павлюк**, асп.

Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина

Использование асимптотических методов для определения параметров сверхпроводящих тороидальных магнитных систем

На основе разработанной математической модели и оценки геометрических параметров исследована возможность использования асимптотических методов для расчета магнитных полей, запасенной энергии и массогабаритных параметров сверхпроводящих тороидальных магнитных систем с ограниченным количеством катушек. Показано, что в зависимости от характеристик взаимного расположения источников поля и области его определения необходимо использовать разные асимптотические методы расчета. Установлено, что точность расчета магнитного поля и его энергии достаточна для практического использования асимптотических методов. Оценка эффективности их применения для тороидальных сверхпроводящих систем

показала, что необходимый объем вычислений существенно уменьшается по сравнению с использованием традиционных численных методов. Библ. 11, рис. 10, таблица.

Ключевые слова: сверхпроводящая тороидальная обмотка с ограниченным количеством катушек, математическая модель, асимптотические методы.

Y.M. Vasetsky, I.L. Mazurenko, A.V. Pavlyuk

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,
Peremogy, 56, Kyiv-57, Ukraine

Application of asymptotic methods for determination parameters of superconducting toroidal magnetic systems

On the basis of the developed mathematical model and an estimation of geometrical parameters possibility to apply asymptotic methods is investigated for calculation of the magnetic fields, energy and mass-size parameters of superconducting toroidal magnetic systems with the limited number of coils. Required asymptotic method depends on small parameters that characterize the relative positioning of field sources and area of field definition. It is determined, that calculation accuracy of magnetic field and its energy is sufficient for practical use of asymptotic methods. The estimation of asymptotic methods efficiency for toroidal superconducting systems has shown that the necessary volume of calculations essentially decreases in comparison with using traditional numerical methods. References 11, figures 10, table.

Key words: superconducting toroidal winding with limited number of coils, mathematical model, asymptotic methods.

Надійшла 23.09.2013

Received 23.09.2013