

УДК 621.3.01:537.212

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

М.А. Щерба, канд. техн. наук

Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина,
m.shcherba@gmail.com

Описаны современные методы моделирования сильных электрических полей в диэлектрических средах с учетом их нелинейных и/или неоднородных свойств. Сравнены алгоритмы дискретизации, преимущества и недостатки методов конечных элементов, конечных разностей и конечных объемов. Приведены примеры реализации метода конечных элементов для нелинейной и неоднородной среды. Показано, что зависимости параметров среды от напряженности электрического поля возможно задавать теоретически, исходя из представлений о кристаллической модели среды, или аппроксимационными выражениями по результатам экспериментов. Неоднородные свойства сред с микроструктурами (многомасштабных сред) возможно задавать с помощью методик гомогенизации (определением усредненных эффективных параметров), статистического распределения (случайными функциями) или учета отдельных микродефектов (включений, выступов, трингов) и их близко расположенных совокупностей. Приведены примеры расчета неоднородного распределения электрического поля в диэлектрической среде с учетом ее нелинейных и неоднородных свойств. Библ. 23, рисунок.

Ключевые слова: электрическое поле, диэлектрик, нелинейность, неоднородность, проводимость, проницаемость, включение, численные методы.

Анализ распределения электрического поля (ЭП) в нелинейных и неоднородных диэлектрических средах во многих случаях невозможно провести без применения современных численных методов решения краевых задач поиска решений дифференциальных уравнений в частных производных. В последние годы интерес к этим задачам усилился в связи с широким применением и усовершенствованием твердых полимерных диэлектриков как изоляционного материала современного электроэнергетического оборудования [6]. В общем случае, кроме учета свойства неоднородности в микроразмерах (многомасштабные среды [3]), нелинейности, в ряде задач требуется учет частотной дисперсности и анизотропии среды.

При расчете распределения электрического поля в диэлектрике, решая краевую задачу (систему дифференциальных уравнений в частных производных Максвелла [2] с граничными условиями) в нелинейных и/или неоднородных средах, часто невозможно получить соответствующую функцию Грина [2, 5, 7] и, как следствие, нельзя применить методы, базирующиеся на интегральных уравнениях (МИУ). Поэтому на сегодняшний день для решения краевых задач наиболее часто используются так называемые "конечные" методы, которые дискретизируют уравнения Максвелла на объемной сетке среды. К "конечным" методам можно отнести следующие методы: конечных элементов (МКЭ) [3, 6, 11, 12], конечных разностей (МКР) [20] и конечных объемов (МКО) [7, 10].

Различные схемы по методу конечных элементов первоначально разрабатывались для эллиптических уравнений (краевых задач поиска решений дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями), но впоследствии были расширены и для гиперболических уравнений (задач Коши поиска решений дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям). Поскольку МКЭ изначально разработан для неструктурированных (нерегулярных) сеток, его целесообразно применять для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных для сложных геометрий расчетной области.

Среды с нелинейными или изменяющимися во времени параметрами удобно решать в так называемых "временных интервалах" [21]. Есть два основных подхода к построению схем метода конечных элементов во временных интервалах (МКЭ-ВИ) для уравнений Максвелла. Первый основан на дискретизации уравнений Максвелла для роторов посредством применения "смешанных элементов" [16], чаще всего краевых элементов Уитни [23]. Такой

выбор помогает избежать "ложных режимов" [19] в разностной схеме, поскольку удовлетворяет дискретному варианту кохомологии де Рама [4]. Это обеспечивается либо применением метода взвешенных невязок с соответствующими пробными функциями [16], либо использованием инцидентных матриц и построением дискретных операторов Ходжа [1]. Второй подход к построению МКЭ-ВИ основан на дискретизации уравнения Гельмгольца [2] посредством использования краевых элементов Уитни [23] с последующим применением метода взвешенных невязок на основании результата тестовых функций.

Методы конечных разностей основаны на аппроксимации частных производных конечными разностями и чаще всего требуют регулярных структурированных сеток. В своем первоначальном виде, предложенным и реализованным Тефловом [20], МКР-ВИ основывается на аппроксимации временных и пространственных производных в уравнениях Максвелла для роторов центральными разностями на сдвинутых сетках.

Под термином метод конечных объемов в общем случае подразумеваются использование значений интегралов по элементам объема, окружающих каждый узел сетки, и применение законов сохранения в этих локальных областях. Однако в последнее время после множества доработок и расширений с геометрической точки зрения разница между методами стала незначительной [10].

Нелинейная среда. В нелинейных средах их основные параметры могут изменяться в зависимости от напряженности электрического поля E , иногда и на несколько порядков. Так, в системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

материальное уравнение для нелинейной среды может быть записано как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi(E) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(E) = \varepsilon_0 \varepsilon(E) \mathbf{E}. \quad (5)$$

Нелинейные параметры среды могут задаваться исходя из аппроксимационных выражений, полученных по результатам экспериментов, например, как в работе [22]:

$$\sigma(E) = \sigma_{const} \left(\frac{2kT}{eEa} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{eEa}{2kT} \right); \quad (6)$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_{const} \left(\frac{2kT}{eEa} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{eEa}{2kT} \right) \quad (7)$$

или теоретически исходя из представлений о кристаллической модели среды, например, как в работе [11]:

$$\mathbf{P}_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + 2 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + 4 \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots, \quad (8)$$

где $\chi^{(1)}$ – линейная восприимчивость; $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, ... – нелинейные восприимчивости. В случае изотропного приближения модель упрощается к виду [9]

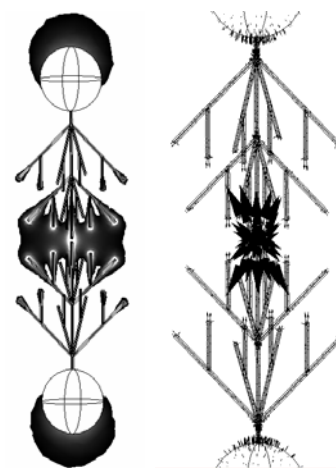
$$\mathbf{D} \approx \varepsilon(1 + \chi_n^{(2)} |\mathbf{E}|^2 + \chi_n^{(3)} |\mathbf{E}|^4) \mathbf{E}. \quad (9)$$

Так, с помощью метода конечных элементов и аппроксимационных соотношений из работы [22] удалось показать, что в шитой полиэтиленовой изоляции (СПЭ) высоковольтных кабелей увеличение напряженности электрического поля возле проводящих микровключений и проводимости диэлектрика выше значения $E = 140$ кВ/мм и $\sigma(E) = 10^{-9}$ См/м соответственно приводит к увеличению максимальной плотности полного тока в среде J_{\max} согласно экспоненциальному закону [17]. При усилении ЭП в локальных микрообъемах СПЭ изоляции до значений $E = 140 \dots 180$ кВ/мм, и как следствие удельной проводимости $\sigma(E)$ до значений $10^{-9} \dots 10^{-7}$ См/м, в такой изоляции возможно повышение максимальной плотности

полного тока J_{\max} на два-три порядка при неизменном высоком значении максимальной напряженности поля E_{\max} .

Неоднородная среда. Методы конечных элементов и конечных разностей также удобно применять для расчета распределения электрических полей в неоднородных средах. Неоднородные свойства сред с микроструктурами целесообразно задавать с помощью методик гомогенизации (определение усредненных эффективных параметров), статистического распределения (случайными функциями) или учитывая отдельные микроструктуры (включения, выступы, триинги) и их близко расположенные совокупности. Методика гомогенизации среды [12] с микроструктурными неоднородностями при их высокой плотности помогает избежать чрезмерного сгущения сетки путем определения усредненных эффективных параметров среды. Классическими подходами гомогенизации являются приближения Максвелла-Гарнетта [12] (формализм Клаузиуса-Моззотти для статических металлодиэлектрических смесей [14]) и эффективной среды [13] (формализм Бругмена). Оба приближения применимы к статике и могут быть обобщены на низкие частоты при дополнительном допущении разреженных сред. В случаях, когда имеется только частичная информация о материальных свойствах среды, детерминированное описание не применимо. Вместо него целесообразно использовать случайные модели, в которых основные свойства среды описаны статистически. Пример рассмотрения случайных сред с помощью МКР показан в работе [15], где используются непрерывное Гауссово распределение и Гауссовы корреляционные функции для диэлектрической проницаемости.

Учет отдельных микроструктур и их совокупностей, несмотря на увеличение количества элементов расчетной сетки, дает наиболее точные данные про электрофизические процессы в локальных областях диэлектрика. Так, с применением такого подхода и МКЭ в работе [8] показано, что наибольшие усиления максимальной напряженности поля (в 8-25 раз выше предела электрической прочности полиэтилена), электрических сил и давлений (до 10 мПа) вызывают эллипсоидальные микровключения и микровыступы, сильно вытянутые вдоль поля, а также микровключения с водными триингами на поверхности. На рисунке показаны возникающие усиления ЭП и векторы давлений со стороны двух водных микровключений с триингами на поверхность СПЭ изоляции. Появление группы близко расположенных микровключений, также как и ветвление водного триинга, увеличивает количество областей возмущенных электрических, механических и термических полей в диэлектрике, а значит, повышает суммарную вероятность возникновения пороговых процессов пробоя СПЭ изоляции хотя бы в одной из них.



Выводы. 1. Описаны подходы к моделированию сильного электрического поля в сложных диэлектрических средах с учетом их нелинейных и/или неоднородных свойств. Сравнены алгоритмы дискретизации, преимущества и недостатки методов конечных элементов, конечных разностей и конечных объемов.

2. Показано, что функциональные зависимости параметров среды от напряженности электрического поля возможно задавать из аппроксимационных выражений по результатам экспериментов или теоретически, исходя из представлений о кристаллической модели среды. Неоднородные свойства сред с микроструктурами могут быть заданы с помощью методик гомогенизации, статистического распределения или учета отдельных микроструктур и совокупностей близко расположенных дефектов.

3. Расчет распределения сильного электрического поля в диэлектрической среде с учетом ее нелинейных и неоднородных свойств показал, что учет функциональной зависимости $\sigma(E)$ при напряженностях поля $E \geq 140$ кВ/мм вызывает увеличение максимальной плотности токов J_{\max} на два-три порядка и более. Учет наличия в твердом диэлектрике микроструктур показал, что наибольшие усиления E_{\max} (в 8–25 раз выше предела электрической прочности по-

лиэтилена), електрических сил и давлений (до 10 мПа) вызывают проводящие эллипсоидальные микровключения и выступы, сильно вытянутые вдоль поля, а также близко расположенные проводящие микровключения, в частности, с водными триингами на поверхности.

1. *Вуазен К.* Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия. – М.: МЦНМО, 2010. – Т. 1. – 344 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука. – 1980. – 560 с.
3. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Многомасштабное моделирование в электротехнике. – К.: ТОВ "Арт-принт", 2011. – 255 с.
4. *Рам Ж.Д.* Дифференцируемые многообразия. – М.: Ком.Книга, 2006. – 247 с.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
6. *Шидловский А.К., Щерба А.А., Золотарев В.М., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Кабели с полимерной изоляцией на сверхвысокие напряжения. – К.: Наш Формат, 2013. – 550 с.
7. *Щерба А.А., Резинкина М.М.* Электромагнитные поля и их воздействие на объекты. – К.: Наук. думка, 2009. – 192 с.
8. *Щерба М.А.* Особенности локального усиления электрического поля проводящими включениями в нелинейной полимерной изоляции // Техн. электродинамика. – 2015. – № 2. – С. 16–23.
9. *Alcantara L.S.D., Teixeira F.L., Cesar A.C.* A new full-vectorial FD-BPM scheme: Application to the analysis of magneto-optic and nonlinear saturable media // J. Lightwave Technol., 2005. – Vol. 23. – P. 2579–2585.
10. *Bossavit A.* Computational Electromagnetics: Variational Formulations, Complementarity, Edge Currents. San Diego, CA: Academic, 1998.
11. *Fisher A., White D., Rodrigue G.* An efficient vector finite element method for nonlinear electromagnetic modeling // J. Comp. Phys., 2007. – Vol. 225. – P. 1331–1346.
12. *Jin J.M.* The Finite Element Method in Electromagnetics. – New York: Wiley, 1993.
13. *Lakhtakia A., Michel B., Weigholfer W.S.* Bruggeman formalism for two models of uniaxial composite media: Dielectric properties // Composites Sci. Technol., 1997. – Vol. 57. – P. 185–196.
14. *Merrill W.H., Diaz R.E., Lore M.M., Squires M.C., Alexopoulos N.G.* EMT for artificial materials composed of multiple sizes of spherical inclusions in a host continuum // IEEE Trans. Antennas Propag., 1999. – Vol. 47. – P. 142–148.
15. *Moss C.D., Teixeira F.L., Yang Y.E., Kong J.A.* Finite-difference time-domain simulation of scattering from objects in continuous random media // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., 2002. – Vol. 40. – №1. – P. 178–186.
16. *Rieben R.N., Rodrigue G.H., White D.A.* A high order mixed vector finite element method for solving the time dependent Maxwell equations on unstructured grids // J. Comp. Phys., 2005. – Vol. 204. – P. 490–519.
17. *Shcherba M.A.* Dependences of electric field amplification during water tree branching in solid dielectrics // IEEE international conference IEPS 2014, Kyiv, Ukraine. – P. 46–49.
18. *Silvester P.P., Ferrari R.L., Finite Elements for Electrical Engineers.* Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1996.
19. *Sun D. K., Manges J., Yuan X., Cendes Z.J.* Spurious Modes in Finite Element Methods // IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1995. – Vol. 37. – P. 12–24.
20. *Taflove A.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood, MA: Artech House, 1995.
21. *Teixeira F.L.* Time-Domain Analysis, J. Webster, Ed. New York: Wiley, 2001, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering Online.
22. *Thomas A., Saha T.K.* A theoretical investigation for the development of a water tree dielectric response model // Proceedings of the IEEE Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena (CEIDP). – 2006. – P. 369–372.
23. *Wong M., Picon O., Hanna V.F.* A finite element method based on Whitney forms to solve Maxwell equations in the time domain // IEEE Trans. Magn., 1995. – Vol. 31. – № 3. – P. 1618–1621.

УДК 621.3.01:537.212

М.А. Щерба, канд. техн. наук

Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

Математичне моделювання сильних електричних полів у нелінійних та неоднорідних діелектричних середовищах

Описано сучасні методи моделювання сильних електричних полів у діелектричних середовищах з урахуванням їх нелінійних та/або неоднорідних властивостей. Порівняно алгоритми дискретизації, переваги і недоліки методів кінцевих елементів, кінцевих різниць і кінцевих обсягів. Наведено приклади реалізації методу кінцевих елементів для нелінійного і неоднорідного середовища. Показано, що залежність параметрів середовища від напруженості електричного поля можливо задавати теоретично, виходячи з представлень про кристалічну модель середовища, або апроксимаційними виразами за результатами експериментів. Неоднорідні властивості середовищ з мікроструктурами (багатомасштабних середовищ) можливо задавати за допомогою методик гомогенізації (визначенням усереднених ефективних параметрів), статистичного розподілу (випадковими функціями) або врахуванням окремих мікродефектів (включень, виступів, триінгів) та їх близько розташованих сукуп-

ностей. Наведено приклади розрахунку неоднорідного розподілу електричного поля в діелектричному середовищі з урахуванням його нелінійних і неоднорідних властивостей. Бібл. 23, рисунок.

Ключові слова: електричне поле, діелектрик, нелінійність, неоднорідність, провідність, проникність, включення, чисельні методи.

М.А. Shcherba

Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine

The mathematical modeling of strong electric fields in nonlinear and inhomogeneous dielectric medium

The modern methods of strong electric fields simulation in dielectric media with nonlinear and/or inhomogeneous properties have been described. The discretization algorithms, benefits and lacks of finite element, finite difference and finite volume methods have been compared. The examples of finite element method impletion for nonlinear and inhomogeneous medium have been made. It was shown that the dependence of the medium parameters on the electric field is possible to set theoretically by using the medium crystalline model or by using the approximate expressions on the experiments results. Inhomogeneous media with microstructures (multiscale media) may be set with the homogenization methods (determination of average effective parameters), the statistical distribution (random functions) or accounting for individual micro-defects (inclusions, juts, treeings) and their closely spaced sets. The calculation examples of the electric field inhomogeneous distribution in a dielectric medium with nonlinear and inhomogeneous properties have been made. References 23, figure.

Key words: electric field, dielectric, nonlinearity, heterogeneity, conductivity, permeability, inclusion, numerical methods.

Надійшла 10.03.2015

Received 10.03.2015

УДК 681.313.39

ВИМІРЮВАЧ ТОЧКИ РОСИ ПОВІТРЯНОГО ОХОЛОДЖУВАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ГЕНЕРАТОРА-ДВИГУНА СВО 1225/255-40 УХЛ 4

О.Л. Ламеко¹, канд. техн. наук, **А.С. Левицький²**, докт. техн. наук, **А.П. Жук³**, гол. інж.,
І.А. Жук⁴, канд. техн. наук

1 – Державне підприємство "Енергоімпульс" Інституту електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

2 – Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

3, 4 – Філія «Дирекція з будівництва Дністровської ГАЕС» ПАТ «Укргідроенерго»,
м. Новодністровськ, Чернівецька обл., 60236, Україна

Наведено результати досліджень зі створення вимірювача точки роси повітряного охолоджувального середовища генератора-двигуна СВО 1225/255-40 УХЛ 4, який створено на базі інтегрального датчика відносної вологості й температури типу SHT 25 і мікроконтролера C8051F310. Представлено методику та результати калібрування вимірювача за відносною вологістю. Наведено результати випробувань вимірювача на вплив електромагнітного поля промислової частоти та імпульсних наносекундних завад. Бібл. 20, рис. 9, табл. 3.

Ключові слова: генератор, охолодження, повітря, відносна вологість, температура, точка роси, вимірювання, завади.

При експлуатації генераторів-двигунів типу СВО 1225/255-40 УХЛ 4 Дністровської ГАЕС під час тривалих зупинок машини через підвищену вологість повітря може відбуватися зволоження обмоток статора і ротора. Щоб його уникнути, необхідно постійно вимірювати температуру точки роси повітря поблизу обмоток і при її наближенні до температури обмоток включати спеціальні електронагрівачі [4].

Найбільш поширеним методом визначення температури точки роси є метод одночасного вимірювання температури і відносної вологості повітря в одному і тому ж обсязі. При цьому температура точки роси визначається за виміряними значеннями температури і вологості