

## ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

УДК 621.3:004.94

### ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

**И.Н. Кучерявая**, докт. техн наук

Институт электродинамики НАН Украины,  
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина  
e-mail: [rb-irina@rambler.ru](mailto:rb-irina@rambler.ru)

*Рассмотрена общая характеристика метода мультифизического моделирования применительно к исследованию электротехнических устройств. Описаны подходы к численной реализации сильно- и слабосвязанных задач различной физической природы. Приведены зависимости и физические факторы, обуславливающие связь мультифизических процессов и явлений в устройствах. Даны примеры решения сильносвязанной мультиполевой задачи индукционного нагрева и слабосвязанной цепно-полевой задачи для исследования электрических процессов в изоляции силового кабеля. Библ. 44, рис. 10, таблица.*

**Ключевые слова:** мультифизические модели, полевые задачи, цепно-полевые задачи, сильно- и слабосвязанные процессы, электротехнические устройства, компьютерное моделирование.

**Введение.** Увеличение компьютерных вычислительных ресурсов и создание современного программного обеспечения обуславливают новый уровень проведения научных исследований электротехнических устройств и технологических систем, в том числе с учетом различных взаимосвязанных физических процессов, протекающих в них.

Мультифизическое моделирование – активно развивающийся в настоящее время метод компьютерного моделирования предоставляет возможность получения многосторонней информации об исследуемом объекте с точки зрения комплексного рассмотрения наиболее характерных для него явлений и процессов различной физической природы при учете взаимосвязей между ними. Оно основывается на рассмотрении нескольких взаимосвязанных физических процессов в одной модели (в одном программном приложении), например, электромагнитных, термодинамических, механических, магнитогидродинамических процессов, которые в свою очередь зависят от процессов во внешних электрических цепях. Единая математическая модель строится на основе фундаментальных законов различных научных дисциплин и предполагает установление и реализацию междисциплинарных связей для всестороннего исследования физического объекта и получения системного знания о его работе [28, 30, 36].

Для большинства технических приложений учет связанности физических полей и процессов является сложной задачей. В ряде случаев мультифизическое моделирование может проводиться на разных масштабных уровнях исследуемого объекта, в одной или многих подобластях его физической модели, при этом на каждом уровне решаться могут как однополевые, так и многополевые задачи, связанные между собой [7, 8, 25, 30, 36].

С использованием результатов работы [19] на рис. 1 представлены характерные особенности мультифизических моделей и расчетных методик для исследования электротехнических устройств.

Мультифизическое моделирование физических полей успешно проводится с помощью современных программных пакетов, среди них – *COMSOL Multiphysics*, *ANSYS Multiphysics*, *Flux*, *LSDyna*, в которых реализуется численный метод конечных элементов [14]. Для решения задач электротехники часто применяют методы, которые оперирует данными как во временной, так и в частотной области, например, метод конечных объемов во временной области (*finite volume time-domain method*), метод конечных разностей в частотной области (*finite difference frequency domain method*) [19].

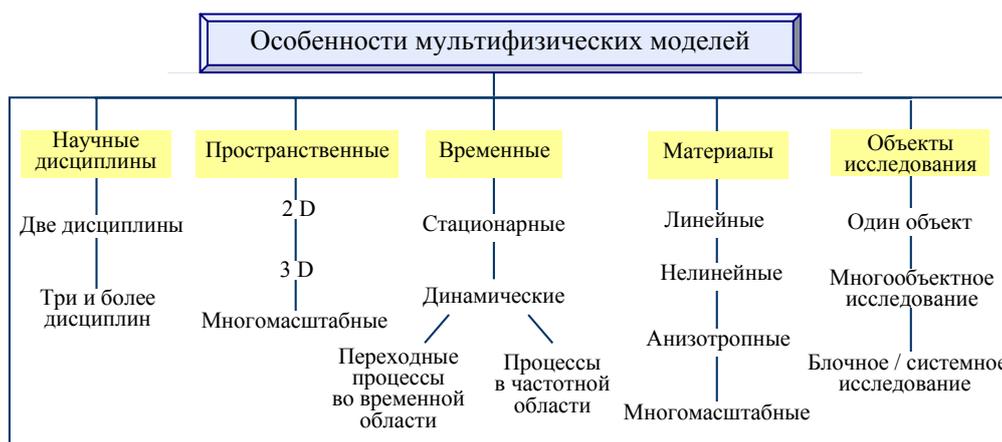


Рис. 1



Рис. 2

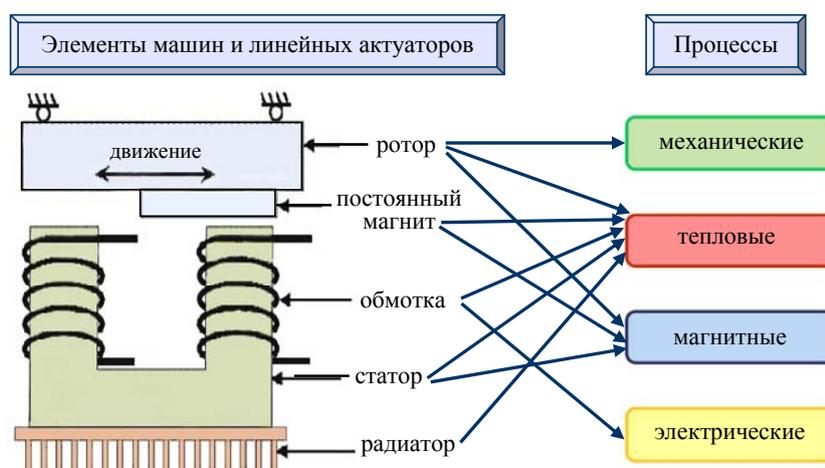


Рис. 3

Мультифизичность, или связанность физических процессов различной природы является одним из основных положений современной электротехники, которое используется и развивается во многих научных работах с целью углубленного исследования электротехнических устройств и систем. Примеры связанных физических процессов и мультифизических задач для электромеханических систем, включая электронные, магнитные, высокочастотные



Рис. 4

элементы, двигатели и актуаторы, даны на рис. 2 [23]. На основе результатов [23] на рис. 3 представлены процессы для изучения составляющих элементов электрических машин и линейных актуаторов. Анализ работ [23, 31–33, 38–40] позволяет выявить основные научные дисциплины и междисциплинарные связи для мультифизических исследований электрических машин и трансформаторов, показанные на рис. 4. В частности в статье [33] выполнен детальный обзор научных публика-

ций, методов и подходов к решению связанных электромагнитных и тепловых, электромагнитных и механических задач, электромагнитных задач и задач структурной механики для исследования электротехнических устройств, среди которых электрические машины и трансформаторы. Согласно [33, 29] решение мультифизических задач численными методами предполагает выполнение ряда этапов, приведенных на рис. 5 а. С учетом этого алгоритм численной реализации мультифизического моделирования может быть представлен в виде схемы на рис. 5, б.

Важную роль в решении мультифизических задач играет определение функционально-зависимых характеристик процессов (рис. 5 а). Например, для задач индукционного нагрева, которые относятся к мультифизическим задачам, это зависящие от температуры параметры – магнитная проницаемость, удельное сопротивление, теплопроводность, теплоемкость нагреваемого материала, которые в значительной степени определяют эффективность нагрева, а температурные зависимости электрических параметров (магнитной проницаемости и сопротивления материалов) обуславливают связь электромагнитной и тепловой задач.

**Слабо- и сильносвязанные мультифизические задачи.** Мультифизические задачи в электротехнике с точки зрения характера связи между различными процессами в рамках одной задачи классифицируются как слабо- или сильносвязанные (см. рис. 5 а). Характеристика двух классов мультифизических задач – сильно- и слабосвязанных задач – представлена в таблице [21, 22, 29, 33].

	Сильносвязанные задачи	Слабосвязанные задачи
Подходы к решению	Одновременное решение задач	Последовательное решение задач, связь задач посредством обмена данными
Основные требования	Одинаковые дискретизация расчетных областей и метод решения задач	Интерполяция результатов решения задач для обмена данными между ними
Преимущества	Реализация сильнонелинейных взаимосвязей между задачами	Различные дискретизация и метод решения задач
Недостатки	Плохо обусловленные матрицы, достаточно продолжительное время решения задач	В отдельных случаях нетривиальный обмен данными между задачами. Проблемы со сходимостью. При нелинейных характеристиках медленная сходимость решения задач
Примеры применения	Установки индукционного нагрева, непрерывного литья стали, магнитоэлектрические явления	Электрические машины и трансформаторы

Сильносвязанные мультифизические процессы предполагают совместное одновременное решение задач, принадлежащих различным научным дисциплинам, а слабосвязанные процессы позволяют проводить последовательное решение задач. Сильносвязанные полевые задачи не могут быть решены отдельно, характеризуются сильнонелинейными связями друг с другом и сравнимыми постоянными времени исследуемых процессов. Задачи, решаемые

одновременно и одним численным методом, позволяют достаточно быстро достигать сходимости решения, однако не предусматривают выбора различного метода решения и реализации различного сеточного разбиения областей исследуемого объекта для разных физических задач.

Важной особенностью слабосвязанных задач является возможность их разделения и последовательного решения. Вместе с тем слабосвязанные физические процессы требуют организации обмена данными между задачами, как правило, для задания объемных источников и граничных условий. Подходы к решению слабосвязанных задач достаточно гибкие и строятся на основе модульного принципа. Для таких задач возможно моделирование физических процессов с различными постоянными времени. В [24] отмечается медленная сходимость решения слабосвязанных задач в случае использования нелинейных характеристик.

В общем случае задачи могут быть определены в различных областях моделируемого объекта, характеризоваться различными постоянными времени, в ряде случаев для их решения требуются различная дискретизация и применение различных численных методов с целью получения высокой точности решения (рис. 5).

Для решения мультифизических полевых задач необходимо предусмотреть разделение процессов по времени и решение сильносвязанных задач с наименьшим временным шагом, исходя из предварительной оценки характерного времени переходного процесса. Например, индукционный нагрев осуществляется на частоте от 50 Гц до высоких частот (выше 1 МГц). При этом период электромагнитной волны может быть менее 0,02 с, а значение постоянной времени переходного теплового процесса – значительно больше, но не менее от 0,1 с до нескольких секунд. В таком случае связанная электротепловая задача решается с наименьшим шагом по времени, а при последовательном решении электромагнитной и тепловой задач для каждой из них должны быть заданы свои расчетные временные характеристики – шаг по времени и конечное время расчета процесса. В каждом конкретном случае необходима своя адаптация к соразмерности временных постоянных физических процессов.

Отметим, что хотя сильносвязанные задачи решаются одновременно, в ряде случаев для уменьшения вычислительных затрат целесообразно использовать многократный итерационный процесс, выполняя последовательное решение этих задач.

Исходя из описания слабо- и сильносвязанных мультифизических задач, схематическое представление алгоритма их решения дано на рис. 6 а и б соответственно.



Рис. 5

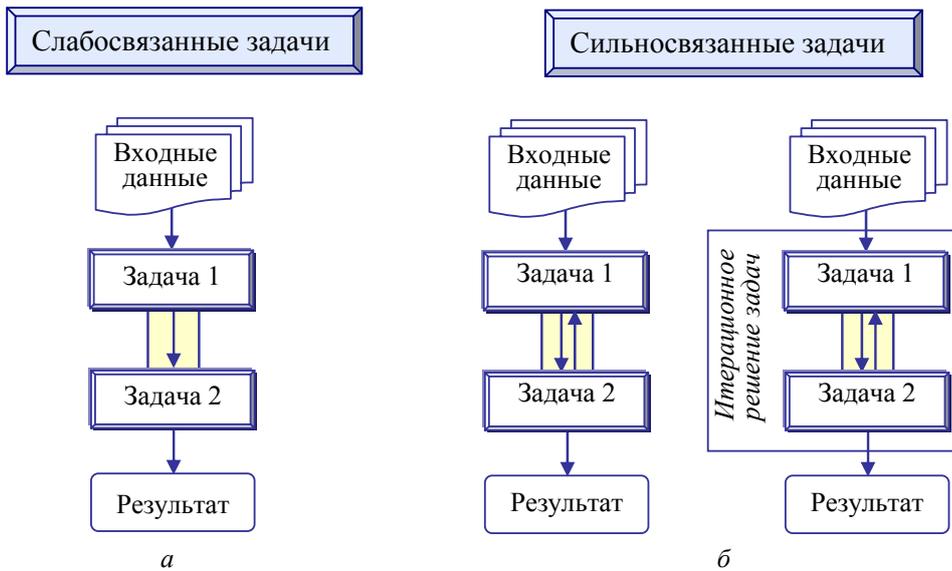


Рис. 6

Выбор метода решения связанных задач – последовательное решение слабосвязанных задач или одновременное решение сильносвязанных задач – во многом зависит от особенностей протекания моделируемых процессов. Мультифизические модели и методики их реализации разрабатываются с учетом пространственных, временных

характеристик физических процессов, свойств материалов исследуемых объектов [28, 30, 41, 44]. При этом в качестве объектов моделирования могут быть многосложные физические объекты, может проводиться системное исследование с учетом работы электротехнического устройства в составе энергосистемы, например, как в статье [3] на основе результатов [16]. Изучение сложных по структуре физических объектов и композиционных материалов предполагает построение многоуровневых моделей и применение многомасштабного моделирования [8, 12, 36, 37].

Моделирование процессов в электротехнике может выполняться с использованием основ теории электрических цепей или теории электромагнитного поля, либо с применением комбинированного цепно-полевого подхода. С точки зрения подходов к моделированию различных физических процессов в рамках одной мультифизической задачи основными разновидностями таких задач являются мультифизические полевые и цепно-полевые задачи. В работе [9] выделяется еще один класс задач – мультифизические цепные.

**Мультифизические полевые задачи** предусматривают исследование электромагнитных процессов в числе взаимосвязанных физических процессов в электротехнических устройствах на основе теории поля. Наряду с этим могут применяться законы и положения различных научных дисциплин – термодинамики, структурной механики, гидродинамики, электрохимии, акустики, биомедицины и других в зависимости от принципа действия и назначения исследуемых устройств.

Рассмотрение связанных между собой мультифизических полевых задач основывается на использовании ряда взаимозависимостей свойств и характеристик одного физического процесса (например, электрического поля) от другого процесса (температурного поля, биологических эффектов или химических реакций). С использованием данных работ [23, 32, 33, 38–40] такие взаимные зависимости и междисциплинарные связи, необходимые для решения задач комплексного исследования электрических машин и электромагнитных устройств, показаны на рис. 7. На рис. 7 а представлены основные процессы и явления в устройствах, а на рис. 7 б–г – зависимости и взаимовлияющие физические эффекты, обуславливающие связь между мультифизическими задачами.

Математические модели мультифизических полевых задач обычно основываются на связанных дифференциальных уравнениях в частных производных относительно пространственных и временных переменных. Пространственные области решения связанных задач дискретизируются с использованием, например, методов конечных элементов (*finite element method*), конечных разностей (*finite difference method*), граничных элементов (*boundary element method*), конечных интегралов (*finite integration technique*) [14, 19].

В качестве примера мультифизической полевой задачи рассмотрим трехполевую за-

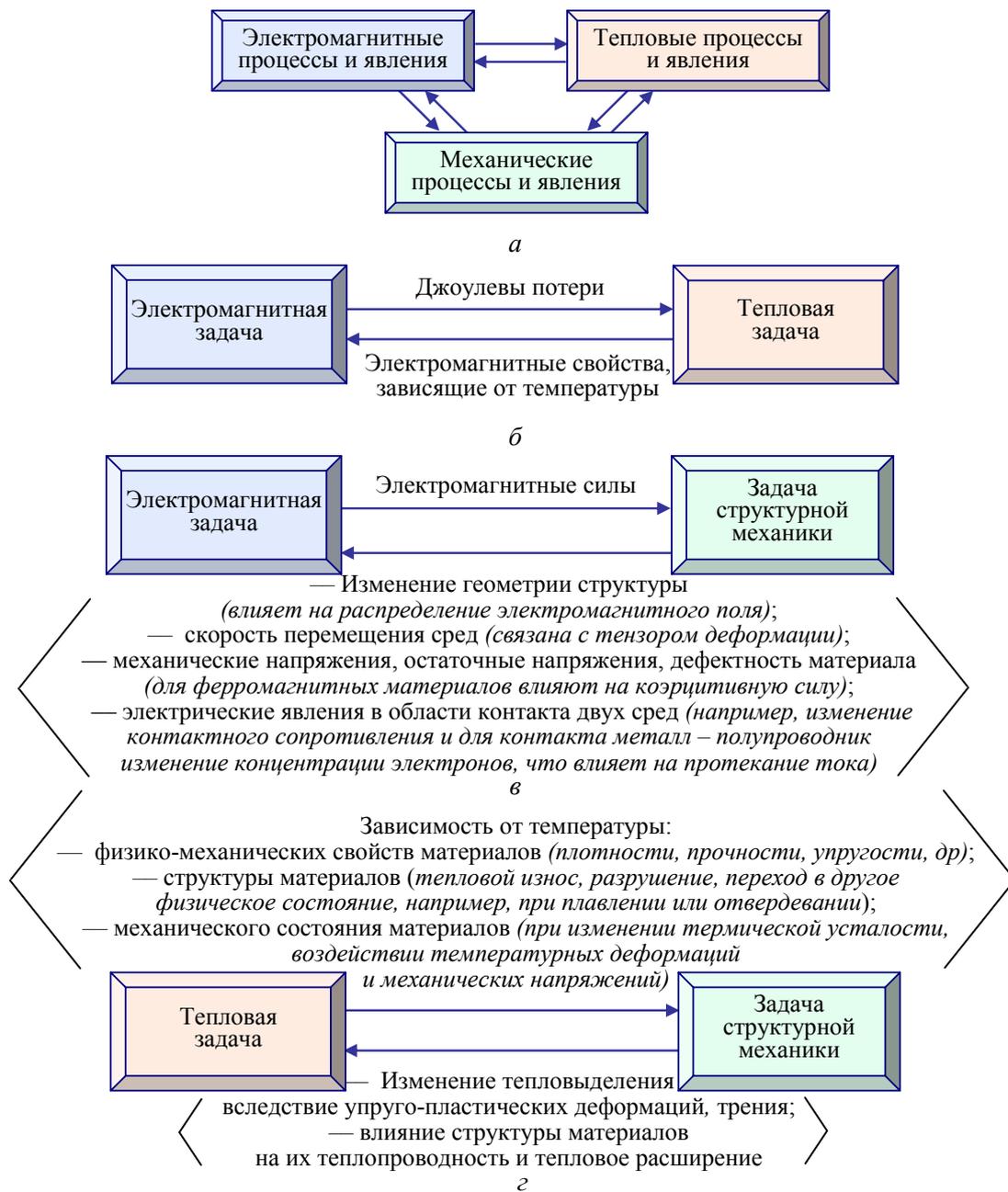


Рис. 7

дачу индукционного нагрева расплавленного стекла, движущегося на выходном участке (в выработочном канале) стекловаренной печи (рис. 8 а). Задача включает расчет связанных электромагнитных, гидродинамических и тепловых процессов в области канала с индуктором (рис. 8 а справа). Постановка задачи и использование индуктора на одном из последних этапов производства стекла для дополнительного и более равномерного его нагрева предложены чл.-корр. НАН Украины И.В. Волковым.

Математическая модель процессов строится для трехмерного случая в декартовой системе координат относительно переменных – комплексного векторного магнитного потенциала  $\dot{A} = (\dot{A}_x, \dot{A}_y, \dot{A}_z)$ , скорости движения жидкого стекла  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  и температуры  $T = T(x, y, z)$ . Рассматривается случай установившегося движения стекломассы в канале. Разрабатывается модель и проводятся расчеты для 1/2 части расчетной области в силу ее симметрии.

1. *Электромагнитная задача* описывается уравнениями относительно векторного потенциала, имеющими следующий вид для различных подобластей:

$$j\omega\sigma(T)\dot{A} + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{A}) = 0 \quad \text{в области жидкого стекла;} \quad (1)$$

$$\nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \mathbf{J}_0 \quad \text{в области индуктора;} \quad (2)$$

$$\nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = 0 \quad \text{в остальных подобластях.} \quad (3)$$

В системе уравнений (1)...(3):  $\sigma = \sigma(T)$  – электропроводность расплавленной стекломассы, зависимости от температуры которой приведены в [15];  $\omega$  – угловая частота;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\mathbf{J}_0$  – вектор плотности тока в индукторе;  $j$  – мнимая единица.

2. *Гидродинамическая задача.* Течение расплавленного стекла в канале в стационарном режиме описывается уравнениями для несжимаемой жидкости:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \cdot [-p \mathbf{I} + \eta(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})^T)] + \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Первое уравнение представляет собой уравнение Навье-Стокса, второе – уравнение неразрывности. Неизвестными являются:  $\mathbf{v}$  – вектор скорости и  $p$  – давление стекломассы. Кроме того,  $\eta$  обозначает динамическую вязкость жидкого стекла;  $\rho$  – его плотность;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  – объемную плотность электромагнитных сил, определяемую как

$$\mathbf{F} = \text{Re}[\mathbf{J} \times \mathbf{B}^*], \quad (6)$$

где  $\mathbf{J} = -j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}}$  – вектор плотности индуцированного тока в стекломассе;  $\mathbf{B} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}$  – вектор магнитной индукции;  $\text{Re}$  обозначает действительную часть комплексной величины, а "\*" – комплексно-сопряженную величину.

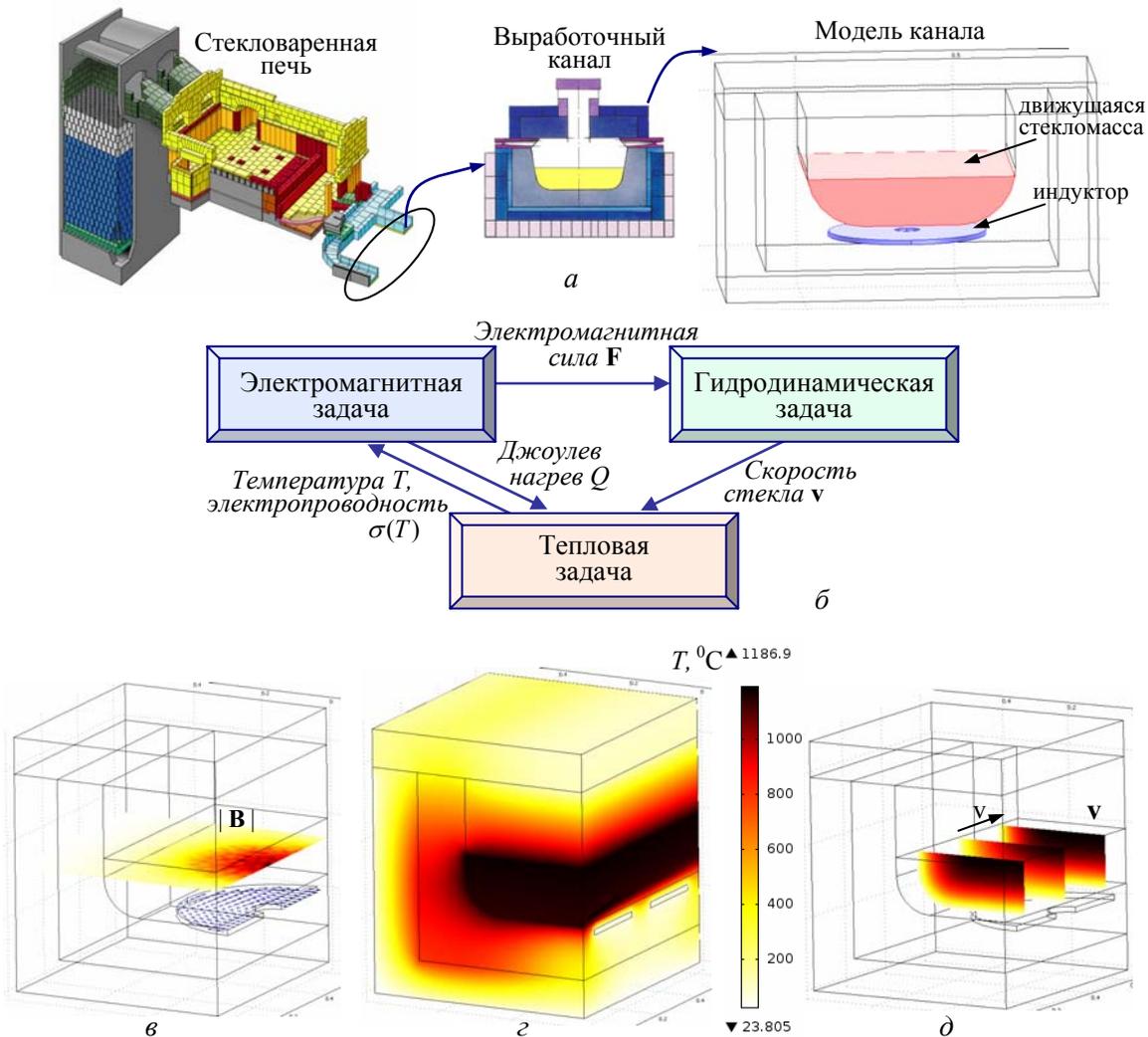


Рис. 8

На входной поверхности объема со стеклом задается распределение скорости, полученное в результате предварительного решения гидродинамической задачи установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области канала, где движется стекло-масса [5, уравнение (43)]:

$$\eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \frac{dp}{dz}.$$

Как показывают математические формулировки, электромагнитная и гидродинамическая задачи связаны величиной электромагнитной силы  $\mathbf{F}$ , действующей на расплавленное стекло в канале.

3. *Тепловая задача* описывается дифференциальным уравнением вида

$$\rho C_p \mathbf{v} \nabla T - \nabla \cdot \lambda \nabla T = Q. \quad (7)$$

Здесь  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $\lambda(T)$  – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность расплавленного стекла соответственно;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости стекла, распределение которого находится в результате решения гидродинамической задачи (4)...(6);  $Q$  – удельная мощность источника тепла, обуславливающая индукционный нагрев стекла наведенными токами, вычисляемая как

$$Q = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*}{\sigma} = J_x \dot{E}_x + J_y \dot{E}_y + J_z \dot{E}_z, \quad (8)$$

где  $\dot{E}_x = -j\omega \dot{A}_x$ ,  $\dot{E}_y = -j\omega \dot{A}_y$ ,  $\dot{E}_z = -j\omega \dot{A}_z$  – составляющие напряженности электрического поля.

Как видно, тепловая задача связана с электромагнитной посредством величины  $Q$  в уравнении (7) или плотности тока  $\mathbf{J} = -j\omega \sigma \mathbf{A}$  в (8), а с гидродинамической задачей – учетом скорости движения жидкого стекла  $\mathbf{v}$  в управляющем уравнении (7).

Таким образом, электромагнитная, гидродинамическая и тепловая задачи являются взаимосвязанными и решаются совместно методом конечных элементов в программе [20]. Связь задач и обмен данными между ними отображены на рис. 8 б. Электромагнитная и тепловая задачи являются сильно связанными, а гидродинамическая задача с электромагнитной и тепловой слабо связанными. В силу сложных связей между задачами они решаются одновременно.

Полученные в результате компьютерных расчетов распределения магнитного поля  $|\mathbf{B}|$  в одном из сечений 1/2 канала с жидким стеклом и тока в индукторе даны на рис. 8 в. Температурное поле в 1/2 части канала и распределение вектора скорости  $\mathbf{v}$  в отдельных сечениях показаны на рис. 8 г–д.

Отметим, что задачи индукционного нагрева относятся к мультифизическим задачам и включают в качестве основных электромагнитный и тепловой процессы, а в случае нагрева движущихся жидких сред – дополнительный гидродинамический процесс. При решении таких задач необходим учет нелинейных характеристик материалов и сред [27]. Как отмечается в обзоре [35], модели индукционного нагрева продолжают совершенствоваться путем учета точки магнитных превращений – температуры Кюри при нагреве магнитных материалов, расчета термопластических деформаций, анизотропии композиционных материалов. Среди исследований в этом направлении можно отметить работы [6, 7, 17]. Основные научные дисциплины и взаимные связи между ними для исследования установок индукционного нагрева показаны на рис. 9.

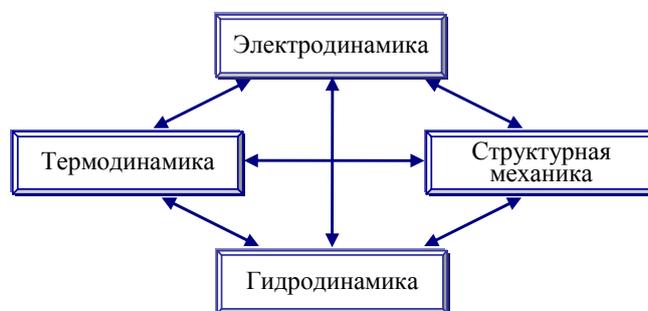


Рис. 9

**Мультифизические цепно-полевые задачи** решаются в случае исследования процессов в электрических устройствах, подключенных к внешней электрической цепи. Математическое описание процессов выполняется с использованием положений теории поля и теории

электрических цепей. Посредством создания комбинированных цепно-полевых моделей изучаются динамические режимы, учитывается возможность возникновения переходных режимов работы устройств. Цепно-полевое моделирование широко применяется для исследования всех видов электрических машин, трансформаторов, электромагнитных систем, кабельных линий [1, 4, 10, 13, 18, 26, 34, 42]. Обзор подходов к реализации цепно-полевых моделей для описания процессов в электротехнических устройствах приведен в [9].

Как и мультиполевые задачи, цепно-полевые можно классифицировать как слабо- и сильносвязанные в зависимости от характера связи между полевой и цепной частями общей модели. Сильносвязанные цепно-полевые задачи решены, например, в [2, 10, 11, 43].

В работе [3] используется слабосвязанная цепно-полевая модель для исследования закономерностей распределения электрического поля в силовом кабеле на 330 кВ в аварийном режиме. Предварительно решается цепная задача в программе моделирования динамических систем *Simulink/MatLab*, определяется напряжение кабеля в аварийном режиме короткого замыкания в нагрузке кабельной линии [16]. Затем в программе *Comsol Multiphysics* [20] реализуется полевая модель относительно электрического потенциала при заданном напряжении на токопроводящей жиле, найденном из решения цепной задачи и анализа переходных электромагнитных процессов аварийного режима.

Схема реализации описанной цепно-полевой модели изображена на рис. 10, где показана *Simulink*-модель кабельной линии 330 кВ при коротком замыкании (рис. 10 а). В результате ее реализации найдено изменение напряжения кабеля (рис. 10 б). На рис. 10 в представлена связь между задачами, а на рис. 10 г дана формулировка полевой задачи с заданным напряжением  $U(t)$  на поверхности жилы. Цепная и полевая задачи являются слабосвязанными и решаются последовательно. Результаты компьютерных расчетов в виде изолиний электрического потенциала и распределения электрического поля (в оттенках серого цвета) в изоляции кабеля вблизи полупроводящего слоя показаны на рис. 10 д для различных значений частоты.

**Заключение.** Анализ научных публикаций в области исследования электротехнических устройств выявляет широкое применение и эффективность метода мультифизического моделирования. Мультифизическое моделирование позволяет проводить комплексное изучение устройств путем рассмотрения совокупности одновременно протекающих и взаимо-

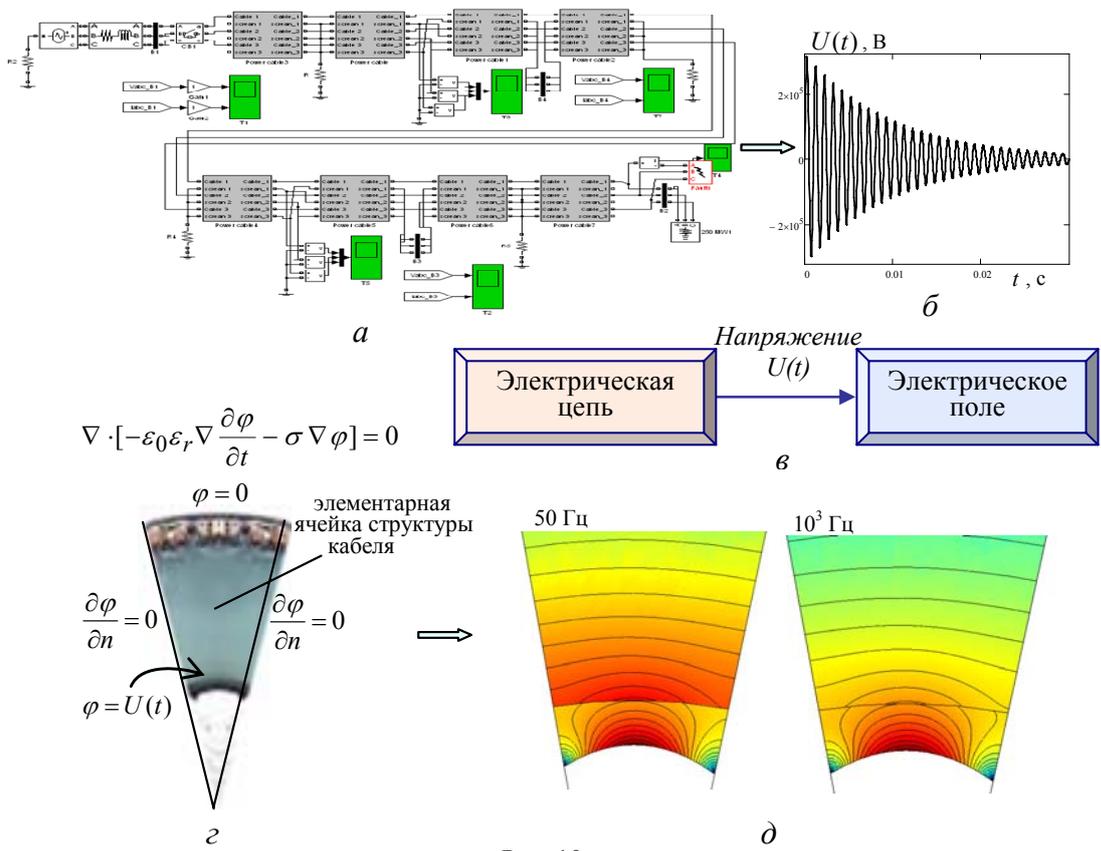


Рис. 10

связанных физических процессов, в основе которых лежат электромагнитные процессы и явления, а также учитывать сложные связи электрических устройств, внешних цепей и систем управления, достигая при этом углубленного понимания природы явлений и процессов.

Некоторые сложности в реализации мультифизического моделирования связаны с необходимостью использования положений различных научных дисциплин для построения составной математической модели, с организацией связи и обмена данными между физическими задачами, с согласованием этапов численного решения задач на достаточно мощных компьютерах. Однако они не умаляют больших преимуществ и перспективности метода, позволяющего получать многосторонние знания об электротехнических устройствах различных типов.

1. Васьковский Ю.Н. Перспективы моделирования динамических режимов электромеханических преобразователей на основе цепно-полевых методов // *Электротехника і електромеханіка*. – 2003. – № 1. – С. 23–25.
2. Коровкин Н.В., Шишигин С.Л. Расчетные методы в теории заземления // *Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун-та*. – 2013. – № 1. – С. 74–79. – [http://ntv.spbstu.ru/fulltext/N1.166.2013\\_11.PDF](http://ntv.spbstu.ru/fulltext/N1.166.2013_11.PDF)
3. Кучерявая И.Н. Применение метода многомасштабного моделирования для исследования электрического поля в изоляции силового кабеля на 330 кВ в аварийном режиме // *Техн. електродинаміка*. – 2012. – № 4. – С. 13–18.
4. Лебедев В.Д., Яблоков А.А. Исследование динамических процессов в измерительных трансформаторах тока и напряжения // *Вестник ИГЕУ*. – 2013. – Вып. 6. – С. 1–7. – <http://vestnik.ispu.ru/sites/vestnik.ispu.ru/files/publications/str.98-104.pdf>
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
6. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Компьютерное моделирование электромагнитных и тепловых процессов при индукционном нагреве стального реактора с сыпучим материалом // *Техн. електродинаміка*. – 2005. – № 3. – С. 3–11.
7. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Компьютерное моделирование электротепловых процессов в установке индукционного нагрева на двух пространственных уровнях // *Электрон. моделирование*. – 2007. – Т. 29, № 2. – С. 85–99.
8. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Многомасштабное моделирование в электротехнике. – К.: Артпринт, 2011. – 255 с.
9. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Мультифизическое моделирование электротехнических устройств // *Техн. електродинаміка*. – 2015. – № 2. – С. 3–15.
10. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Цепно-полевая модель для определения нагрузочной способности кабельных линий // *Гідроенергетика України*. – 2014. – № 2–3. – С. 68–73.
11. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Численный расчет электромагнитных и тепловых процессов в подземной кабельной линии. Стационарный режим // *Техн. електродинаміка. Темат. вип. "Силова електроніка та енергоефективність"*. – 2006. – Ч. 1. – С. 91–95.
12. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. – К.: Ин-т электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с.
13. Рышиа В.В., Радимов И.Н., Гулый М.В., Кравченко П.А. Усовершенствованная цепно-полевая модель вентильно-реактивного двигателя // *Электротехніка і електромеханіка*. – 2010. – № 5. – С. 22–26.
14. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
15. Станек Я. Электрическая варка стекла / Под ред. Ю.А. Гулояна. – М.: Легкая индустрия, 1979. – 248 с.
16. Щерба А.А., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Электромагнитные процессы в кабельной линии с полиэтиленовой изоляцией на напряжение 330 кВ // *Техн. електродинаміка*. – 2013. – № 1. – С. 9–15.
17. Щерба А.А., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н., Ушаков В.И. Компьютерное моделирование электротепловых процессов и термомеханических напряжений при индукционном нагреве движущихся медных слитков // *Техн. електродинаміка*. – 2013. – № 2. – С. 10–18.
18. Benderskaya G. Numerical methods for transient field-circuit coupled simulations based on the finite-integration technique and a mixed circuit formulation / Dissertation. – Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Univesitat Darmstadt. – Darmstadt, 2007. – 139 p.
19. Bondeson A., Rylander T., Ingelstrom P. Computational electromagnetics. – New York: Springer Science, 2005. – 222 p.
20. Comsol multiphysics modeling and simulation software – <http://www.comsol.com/>
21. *Coupled field problems* / Edited by A.J. Kassab and M.H. Aliabadi. – WITPress, Southampton, Boston, 2001 – 256 p.
22. *Coupled problems and multi-physics* / Edited by M. Karama. – Durnten-Zurich: Trans Tech Publications, 2011. – 140 p.
23. Dede E.M., Lee J., Nomura T. Multiphysics simulation: electromechanical system applications and optimization. – Springer-Verlag: London, 2014. – 212 p.
24. Eustache P., Meunier G., Coulomb J.L. Finite element toolbox for generic coupling (magnetic, thermal, etc.) // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 1996. – Vol. 32, Is. 3. – P. 1461–1464.

25. *Flemisch B.* Tackling coupled problems in porous media: development of numerical models and an open source simulator. – Institut für Wasser-und Umweltsystemmodellierung, 2013. – 232 p. – <http://www.simtech.uni-stuttgart.de/publikationen/prints.php?ID=774>
26. *Gersem H., Hameyer K., Weiland T.* Field-circuit coupled models in electromagnetic simulation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 168, Is. 1–2. – P. 125–133.
27. *Golosnoy I.O., Sykulski J.K.* Numerical modeling of non-linear coupled thermo-electric problems. A comparative study. // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). – 2009. – Vol. 28, No. 3. – P. 639–655.
28. *Groen D., Zasada S.J., Coveney P.V.* Survey of multiscale and multiphysics applications and communities. // Computing in Science & Engineering. – 2014. – Vol. 16, No. 2. – P. 34–43.
29. *Hameyer K., Driesen J., De Gersem H., Belmans R.* The classification of coupled field problems // IEEE Trans. on Magnetics. – 1999. – Vol. 35, No. 3. – P. 1618–1621.
30. *Keyes D.E., McInnes L.C., Woodward C., Gropp W., Myra E., Pernice M., Bell J., Brown J., Clo A., Connors J., Constantinescu E., Estep D.* Multiphysics simulations: Challenges and opportunities // The International Journal of High Performance Computing Applications. – 2013. – Vol. 27, No. 1. – P. 4–83.
31. *Kulkarni S.V.* Coupled field computations for analysis of intricate phenomena in transformers // Advanced Research Workshop on Transformers. – Baiona, Spain, 28-31 October, 2007. – P. 172–186.
32. *Kulkarni S.V., Kharade S.A.* Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. – CRC Press, Taylor & Francis group, 2012. – 750 p.
33. *Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Escarela-Perez R., Campero-Littlewood E.* Applications of coupled field formulations to electrical machinery // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). – 2007. – Vol. 26, Is. 2. – P. 489–523.
34. *Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Jochi V.S.* Analysis of short circuit performance of split-winding transformer using coupled field-circuit approach // IEEE Trans. on Power Delivery. – 2007. – Vol. 22, No. 2. – P. 936–943.
35. *Lavers J.D.* State of the art of numerical modeling for induction processes // International Journal of Computations and Mathematics in Electrical (COMPEL). – 2008. – Vol. 27, No. 2. – P. 335–349.
36. *Michopoulos J. G., Farhat C., Fish J.* Survey on modeling and simulation of multiphysics systems. – 2005. – [http://www.columbia.edu/cu/civileng/fish/Publications\\_files/MultiphysicsSurvey.pdf](http://www.columbia.edu/cu/civileng/fish/Publications_files/MultiphysicsSurvey.pdf)
37. *Multiscale modeling of polymer properties* (Series: Computer-aided chemical engineering; 22) / Edited by M. Laso and E.A. Perpete. – Amsterdam; Oxford: Elsevier, 2006. – 424 p.
38. *Pantelyat M.G.* Coupled magneto-thermo-mechanical phenomena in electromagnetic devices: main interactions and their graphical representation // ISTET 2013: International Symposium on Theoretical Electrical Engineering: 24th – 26th June 2013: Pilsen, Czech Republic. – 2013. – P. IV-13-IV-14.
39. *Pantelyat M.G.* Multiphysical numerical analysis of electromagnetic devices: state-of-the-art and generalization // Електротехніка і електромеханіка. – 2013. – № 3. – С. 29–35.
40. *Schmidt E.* Finite element analysis of electrical machines and transformers: State of the art and future trends // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). – 2011. – Vol. 30, Is: 6. – P. 1899–1913.
41. *Watanabe N.* Finite element method for coupled thermo-hydro-mechanical processes in discretely fractured and non-fractured porous media // A thesis for the degree of doctor of philosophy in engineering. – Dresden University of Technology, 2011. – 44 p.
42. *Zhang Y., Zhang N., Kang Y., Yan X., Xie D.* Magnetic field of a complex construction transformer using direct field-circuit coupling method // Advanced Materials Research. – 2013. – Vols. 614–615. – P. 1230–1233.
43. *Zhou P., Fu W.N., Lin D., Stanton S., Cendes Z.J.* Numerical modeling of magnetic devices // IEEE Trans. on Magnetics. – 2004. – Vol. 40, No. 4. – P. 1803–1809.
44. *Zimmerman W.B.J.* Multiphysics / Process modelling and simulation with finite element methods / W.B.J. Zimmerman. – World Scientific, 2004. – P. 107–136.

УДК 621.3:004.94

**І.М. Кучерява**, докт. техн. наук

Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

#### **Застосування мультифізичного моделювання у розв'язанні задач електротехніки**

*Представлено загальну характеристику методу мультифізичного моделювання стосовно дослідження електротехнічних пристроїв. Описано підходи до чисельної реалізації сильно- та слабкозв'язаних задач різної фізичної природи. Наведено залежності та фізичні фактори, що зумовлюють зв'язок мультифізичних процесів і явищ у пристроях. Наведено приклади розв'язання сильнозв'язаної мультипольової задачі індукційного нагріву і слабкозв'язаної колопольової задачі для дослідження електричних процесів в ізоляції силового кабелю. Бібл. 44, рис. 10, таблиця.*

**Ключові слова:** мультифізичні моделі, польові задачі, колопольові задачі, сильно- та слабкозв'язані процеси, електротехнічні пристрої, комп'ютерне моделювання.

**I.M. Kucheriava**

Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Peremohy, 56, Kyiv-57, Ukraine

**Application of multiphysics modeling to problem solving in electrical engineering**

In the article the multiphysics modeling method for study of electrical devices is characterized. The approaches to numerical solution of the weakly coupled and strongly coupled problems of different physical nature are described. The dependences and physical factors that cause the interactions between the multiphysics processes and phenomena in the devices are presented. The examples of both strongly coupled problem of induction heating and weakly coupled field-circuit problem for examination of the electrical processes in power cable insulation are given. References 44, figures 10, table.

**Key words:** multiphysics models, field problems, field-circuit problems, strongly and weakly coupled processes, electric devices, computer modeling.

Надійшла 9.01.2015

Received 9.01.2015

УДК 621.314

**ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ****В.В. Голубев**, канд. техн. наук

Институт электродинамики НАН Украины,

пр. Победы, 56. Киев 57, 03680, Украина

e-mail: vigohome@mail.ru

Предложены готовое аналитическое решение для переходных и квазиустановившихся электромагнитных процессов в цепях переменного тока второго порядка с периодически меняющимися во времени параметрами элементов и методика его получения. Определены разные модификации математической модели в зависимости от характера параметров и изменений конфигурации схемы. Библ. 3, рис. 6.

**Ключевые слова:** переменный ток, установившийся процесс, импульсное регулирование, переменные параметры, высокая частота, аналитическое решение, математическая модель

Предложенное в работах [1, 2] аналитическое решение для переходных и квазиустановившихся электромагнитных процессов в импульсных цепях второго порядка не распространяется на схемы с периодически изменяющимися параметрами накопителей энергии индуктивного и емкостного характера [3]. Задачей этой статьи является расширение функциональных возможностей предложенной ранее методики и математической модели расчета электромагнитных процессов, связанных с изменением схемы соединения и параметров реактивных элементов цепей переменного тока.

На рис. 1-4 приведены примеры упрощенных схем преобразователей переменного напряжения различного функционального назначения, параметры элементов и соответственно коэффициенты передачи которых могут принимать любые значения и циклически изменяться один или несколько раз за один или несколько периодов сетевого напряжения (период повторяемости) согласно алгоритму управления ключами.

Токи и напряжения в этих схемах находим так же, как и в линейных цепях, но поинтервально. Для общности анализа

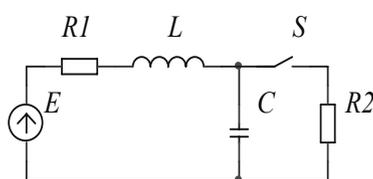


Рис. 1

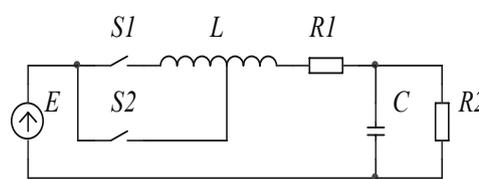


Рис. 2

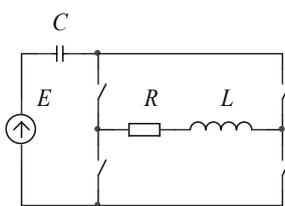


Рис. 3

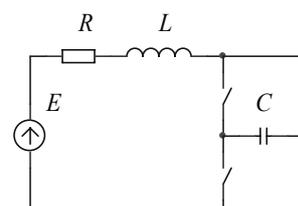


Рис. 4