

Application of multiphysics modeling to problem solving in electrical engineering

In the article the multiphysics modeling method for study of electrical devices is characterized. The approaches to numerical solution of the weakly coupled and strongly coupled problems of different physical nature are described. The dependences and physical factors that cause the interactions between the multiphysics processes and phenomena in the devices are presented. The examples of both strongly coupled problem of induction heating and weakly coupled field-circuit problem for examination of the electrical processes in power cable insulation are given. References 44, figures 10, table.

Key words: multiphysics models, field problems, field-circuit problems, strongly and weakly coupled processes, electric devices, computer modeling.

Надійшла 9.01.2015

Received 9.01.2015

УДК 621.314

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ**В.В. Голубев**, канд. техн. наук

Институт электродинамики НАН Украины,

пр. Победы, 56. Киев 57, 03680, Украина

e-mail: vigohome@mail.ru

Предложены готовое аналитическое решение для переходных и квазиустановившихся электромагнитных процессов в цепях переменного тока второго порядка с периодически меняющимися во времени параметрами элементов и методика его получения. Определены разные модификации математической модели в зависимости от характера параметров и изменений конфигурации схемы. Библ. 3, рис. 6.

Ключевые слова: переменный ток, установившийся процесс, импульсное регулирование, переменные параметры, высокая частота, аналитическое решение, математическая модель

Предложенное в работах [1, 2] аналитическое решение для переходных и квазиустановившихся электромагнитных процессов в импульсных цепях второго порядка не распространяется на схемы с периодически изменяющимися параметрами накопителей энергии индуктивного и емкостного характера [3]. Задачей этой статьи является расширение функциональных возможностей предложенной ранее методики и математической модели расчета электромагнитных процессов, связанных с изменением схемы соединения и параметров реактивных элементов цепей переменного тока.

На рис. 1-4 приведены примеры упрощенных схем преобразователей переменного напряжения различного функционального назначения, параметры элементов и соответственно коэффициенты передачи которых могут принимать любые значения и циклически изменяться один или несколько раз за один или несколько периодов сетевого напряжения (период повторяемости) согласно алгоритму управления ключами.

Токи и напряжения в этих схемах находим так же, как и в линейных цепях, но поинтервально. Для общности анализа

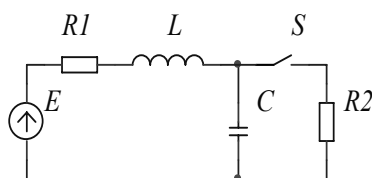


Рис. 1

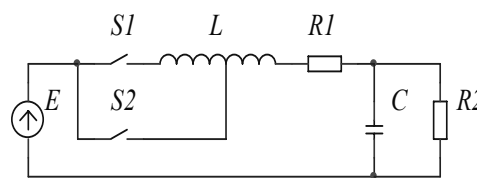


Рис. 2

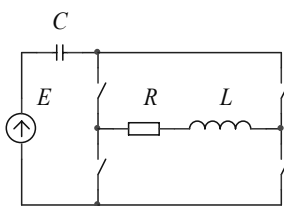


Рис. 3

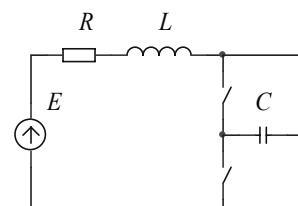


Рис. 4

применена система двойного индексирования временных интервалов, позволяющая формировать любые применяемые на практике алгоритмы управления [1, 2]. На рис. 5 а, б для иллюстрации представлены диаграммы многоступенчатого импульсно-модулированного сетевого напряжения и его составляющей, напряжения i -й ступени регулирования. Такая система обозначений позволяет описывать алгоритм изменения не только напряжения на входе цепи нагрузки (двухполюсника), но и/или любого параметра этой цепи.

Решение поставленной задачи покажем на примере цепи второго порядка, изображенные реакции (тока в j -й ветви и напряжения на j -м элементе) которой на возмущающее периодическое воздействие $E(\omega t)$ при ненулевых начальных условиях описывается в следующем обобщенном виде:

$$Y_{jis} = E(p)H_j(p) + X_1H_{1j}(p) + X_2H_{2j}(p), \tag{1}$$

где $H_j(p), H_{1j}(p), H_{2j}(p)$ – операторные передаточные функции;

$$H_j(p) = \frac{\mu_{j2}p^2 + \mu_{j1}p + \mu_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}; \quad H_{1j}(p) = \frac{\mu'_{j1}p + \mu'_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}; \quad H_{2j}(p) = \frac{\mu''_{j1}p + \mu''_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}. \tag{2}$$

Принятые допущения: трансформаторные и ключевые элементы идеальные, коммутация мгновенная, питающая сеть – идеальный источник синусоидального напряжения $u_1 = U_m \sin \omega t$ (неидеальность сети и параметры входного и выходного трансформаторов могут быть учтены в схеме замещения и алгоритме управления их параметрами).

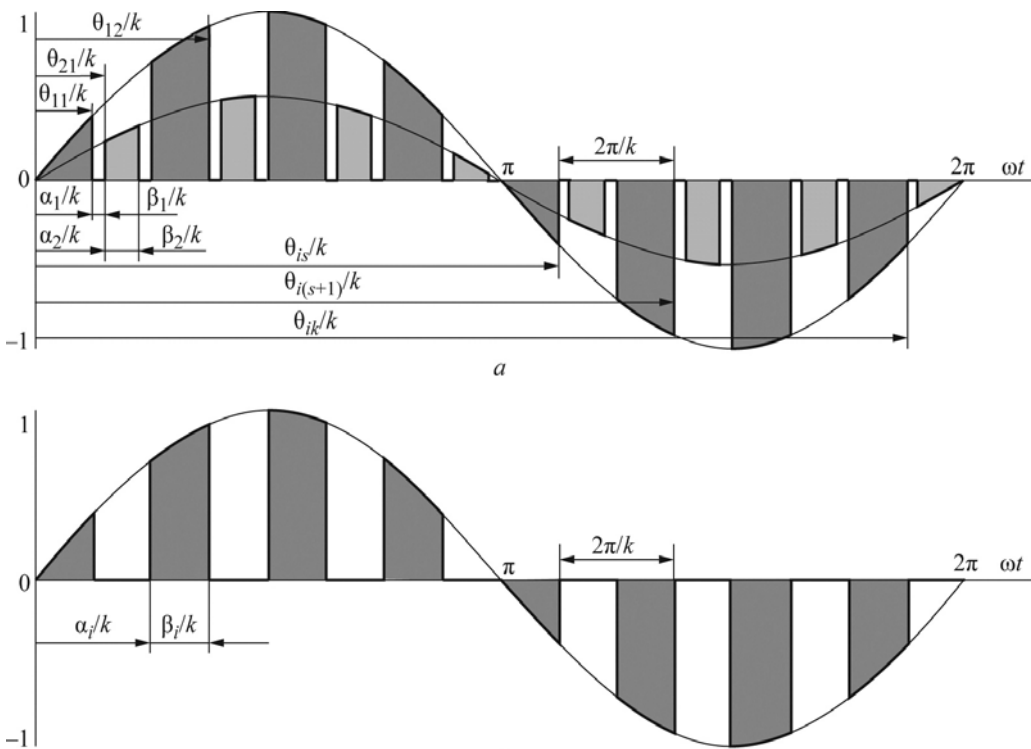


Рис. 5

Для каждой i -й ступени s -го интервала регулирования в переходном режиме можно записать общее выражение для мгновенного значения реакции j -й ветви преобразователя на изменение параметров схемы с учетом начальных значений переменных состояния, тока в дросселе $X_{1,i,s} = I_{0,i,s}$ и напряжения на конденсаторе $X_{2,i,s} = U_{0,i,s}$ [1]:

$$y_{j,i,s} = K_i U_m h_{j,i} \sin(\omega t_{i,s} - \xi_{j,i}) + \left\{ K_i U_m \left[p_{2,i} h_{j,i} \sin(\theta_{i,s} - \xi_{j,i}) - \omega h_{j,i} \cos(\theta_{i,s} - \xi_{j,i}) \right] \exp\left(-\frac{p_{1,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \left[\mu_{j,2,i} (p_{1,i} \sin \theta_{i,s} + \omega \cos \theta_{i,s}) + \mu_{j,1,i} \sin \theta_{i,s} \right] \exp\left(-\frac{p_{1,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \left[X_{j,1,i} (\mu'_{j,1,i} p_{1,i} + \mu'_{j,0,i}) + X_{j,2,i} (\mu''_{j,1,i} p_{1,i} + \mu''_{j,0,i}) \right] \right\} \frac{\exp p_{1,i} t_{i,s} - \exp p_{2,i} t_{i,s}}{p_{1,i} - p_{2,i}}$$

$$- \left\{ K_i U_m \left[p_{1,i} h_{j,i} \sin(\theta_{i,s} - \xi_{j,i}) - \omega h_{j,i} \cos(\theta_{i,s} - \xi_{j,i}) \right] \exp\left(-\frac{p_{2,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \frac{\exp p_{2,i} t_{i,s}}{p_{1,i} - p_{2,i}}, \right. \quad (3)$$

$$\left. + [X_{j,1,i}(\mu'_{j,1,i} p_{2,i} + \mu'_{j,0,i}) + X_{j,2,i}(\mu''_{j,1,i} p_{2,i} + \mu''_{j,0,i})] \right\}$$

где K_i – коэффициент передачи по напряжению на i -й ступени; $h_{j,i}$ – модуль коэффициента передачи реакции j -й ветви на i -й ступени;

$$h_{j,i} = \frac{\sqrt{(\mu_{j,2,i} \omega^2 - \mu_{j,0,i})^2 + \mu_{j,1,i}^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega^2 + p_{1,i}^2)(\omega^2 + p_{2,i}^2)}}; \quad (4)$$

$\xi_{j,i}$ – угол сдвига реакции j -й ветви на i -й ступени,

$$\cos \xi_{j,i} = \frac{(\omega^2 - p_{1,i} p_{2,i})(\mu_{j,2,i} \omega^2 - \mu_{j,0,i}) - (p_{1,i} + p_{2,i}) \mu_{j,1,i} \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 + p_{1,i}^2)(\omega^2 + p_{2,i}^2)} \sqrt{(\mu_{j,2,i} \omega^2 - \mu_{j,0,i})^2 + \mu_{j,1,i}^2 \omega^2}}; \quad (5)$$

$\Theta_{i,s}$ – временная координата начала i -й ступени s -го интервала,

$$\theta_{i,s} = \frac{2\pi(s-1) + \alpha_i}{k}, \quad \theta_{i+1,s} = \frac{2\pi(s-1) + \alpha_i + \beta_i}{k}, \quad \theta_{i+q,s} = \theta_{i,s+1} = \frac{2\pi s + \alpha_i}{k}; \quad (6)$$

k – число интервалов на периоде сети; $p_{1,i}, p_{2,i}$ – корни характеристического уравнения цепи на i -й ступени; q – число ступеней регулирования; s – число интервалов регулирования; α_i – фаза регулирования i -й ступени; β_i – суммарный за период сети угол регулирования i -й ступени; $\mu_{j,i}$ – коэффициенты операторных передаточных функций j -й ветви на i -й ступени регулирования согласно (2); ω – круговая частота сети.

Исходя из общего выражения (3) несложно записать мгновенные значения для инерциальных переменных – тока в дросселе и напряжения на конденсаторе в относительных единицах (о.е.):

$$\bar{i}_{i,s} = \frac{i_{i,s}}{U_m} = K_i h_{1,i} \sin(\omega t_{i,s} - \varphi_i) +$$

$$+ \left\{ K_i \left[p_{2,i} h_{1,i} \sin(\theta_{i,s} - \varphi_i) - \omega h_{1,i} \cos(\theta_{i,s} - \varphi_i) \right] \exp\left(-\frac{p_{1,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \frac{\exp p_{1,i} t_{i,s}}{p_{1,i} - p_{2,i}} - \right.$$

$$\left. + \bar{I}_{0,i}(\mu'_{11,i} p_{1,i} + \mu'_{10,i}) + \bar{U}_{0,i}(\mu''_{11,i} p_{1,i} + \mu''_{10,i}) \right\}$$

$$- \left\{ K_i \left[p_{1,i} h_{1,i} \sin(\theta_{i,s} - \varphi_i) - \omega h_{1,i} \cos(\theta_{i,s} - \varphi_i) \right] \exp\left(-\frac{p_{2,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \frac{\exp p_{2,i} t_{i,s}}{p_{1,i} - p_{2,i}}; \right. \quad (7)$$

$$\left. + \bar{I}_{0,i}(\mu'_{11,i} p_{2,i} + \mu'_{10,i}) + \bar{U}_{0,i}(\mu''_{11,i} p_{2,i} + \mu''_{10,i}) \right\}$$

$$\bar{u}_{i,s} = \frac{u_{i,s}}{U_m} = K_i h_{2,i} \sin(\omega t_{i,s} - \psi_i) +$$

$$+ \left\{ K_i \left[p_{2,i} h_{2,i} \sin(\theta_{i,s} - \psi_i) - \omega h_{2,i} \cos(\theta_{i,s} - \psi_i) \right] \exp\left(-\frac{p_{1,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \frac{\exp p_{1,i} t_{i,s}}{p_{1,i} - p_{2,i}} - \right.$$

$$\left. + \bar{I}_{0,i}(\mu'_{21,i} p_{1,i} + \mu'_{20,i}) + \bar{U}_{0,i}(\mu''_{21,i} p_{1,i} + \mu''_{20,i}) \right\}$$

$$- \left\{ K_i \left[p_{1,i} h_{2,i} \sin(\theta_{i,s} - \psi_i) - \omega h_{2,i} \cos(\theta_{i,s} - \psi_i) \right] \exp\left(-\frac{p_{2,i}}{\omega} \theta_{i,s}\right) + \frac{\exp p_{2,i} t_{i,s}}{p_{1,i} - p_{2,i}}. \right. \quad (8)$$

$$\left. + \bar{I}_{0,i}(\mu'_{21,i} p_{2,i} + \mu'_{20,i}) + \bar{U}_{0,i}(\mu''_{21,i} p_{2,i} + \mu''_{20,i}) \right\}$$

Чтобы найти мгновенные значения этих переменных в квазиустановившемся режиме, воспользуемся методом двойного матричного припасовывания, осуществляемого в два этапа и обусловленного двойным индексированием временных интервалов.

Первый этап состоит в рекурсивной подстановке начальных значений переменных состояния от ступени к ступени по параметру i в пределах одного (s -го) интервала регулирования.

Для начала в полученные формулы для тока и напряжения подставим время окончания первой (i -й) и начала второй $[(i+1)$ -й] ступеней s -го интервала $\omega t_{i+1,s} = \theta_{i+1,s} = \theta_{i,s} + \beta_i / k$. В результате получим систему *рекуррентных* уравнений для начальных значений на второй ступени в о.е. в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_{0,(i+1),s} &= I_{0,(i+1),s} / U_m = G_{1,i,s} + \bar{I}_{0,i,s} H_{11,i} + \bar{U}_{0,i,s} H_{12,i} \\ \bar{U}_{0,(i+1),s} &= U_{0,(i+1),s} / U_m = G_{2,i,s} + \bar{I}_{0,i,s} H_{21,i} + \bar{U}_{0,i,s} H_{22,i} \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Запишем эту систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{0,(i+1),s} \\ \bar{U}_{0,(i+1),s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1,i,s} \\ G_{2,i,s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{11,i} & H_{12,i} \\ H_{21,i} & H_{22,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_{0,i,s} \\ \bar{U}_{0,i,s} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

или сокращенно

$$\mathbf{X}_{i+1,s} = \mathbf{G}_{i,s} + \mathbf{H}_i \mathbf{X}_{i,s}. \quad (11)$$

Далее, заменив в (10) индекс i на $(i+1)$,

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{0,(i+2),s} \\ \bar{U}_{0,(i+2),s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1,i+1,s} \\ G_{2,i+1,s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{11,i+1} & H_{12,i+1} \\ H_{21,i+1} & H_{22,i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_{0,i+1,s} \\ \bar{U}_{0,i+1,s} \end{pmatrix} \quad (12)$$

и в полученное выражение подставив (9), получим начальные значения для третьей ступени

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{0,(i+2),s} \\ \bar{U}_{0,(i+2),s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1,i+1,s} \\ G_{2,i+1,s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{11,i+1} & H_{12,i+1} \\ H_{21,i+1} & H_{22,i+1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} G_{1,i,s} \\ G_{2,i,s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{11,i} & H_{12,i} \\ H_{21,i} & H_{22,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_{0,i,s} \\ \bar{U}_{0,i,s} \end{pmatrix} \right], \quad (13)$$

или

$$\mathbf{X}_{i+2,s} = \mathbf{G}_{i+1,s} + \mathbf{H}_{i+1} \mathbf{G}_{i,s} + \mathbf{H}_{i+1} \mathbf{H}_i \mathbf{X}_{i,s} \quad (14)$$

Действуя так и далее, получаем формулу для конечных значений последней q -й ступени первого интервала, равных начальным значениям первой ступени второго интервала ($s=2$):

$$\mathbf{X}_{i+q,s} = \mathbf{X}_{i,s+1} = \left[\mathbf{G}_{i+q-1,s} + \sum_{n=1}^{q-1} \left(\prod_{m=1}^n \mathbf{H}_{i+q-m} \right) \mathbf{G}_{i+q-n-1,s} \right] + \left(\prod_{j=1}^q \mathbf{H}_{i+q-j} \right) \mathbf{X}_{i,s}, \quad (15)$$

или

$$\mathbf{X}_{i,s+1} = \left[\mathbf{G}_{i-1,s} + \sum_{n=1}^{q-1} \left(\prod_{m=1}^n \mathbf{H}_{i-m} \right) \mathbf{G}_{i-n-1,s} \right] + \left(\prod_{j=1}^q \mathbf{H}_{i-j} \right) \mathbf{X}_{i,s}. \quad (16)$$

Это уравнение является исходным для второго этапа припасовывания.

Второй этап припасовывания выполняем по номерам интервалов в пределах $[s \dots (s+k)]$, исходя из формулы (16), которую с целью упрощения дальнейших процедур перепишем в более компактном виде:

$$\mathbf{X}_{i,s+1} = \mathbf{A}_{i,s} + \mathbf{B} \mathbf{X}_{i,s}, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{A}_{i,s} = \mathbf{G}_{i-1,s} + \sum_{n=1}^{q-1} \left(\prod_{m=1}^n \mathbf{H}_{i-m} \right) \mathbf{G}_{i-n-1,s}; \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \prod_{j=1}^q \mathbf{H}_{i-j}. \quad (19)$$

В результате второго этапа припасовывания получим систему уравнений для начальных условий в конце k -го интервала, т.е. в конце периода сети (периода повторяемости, если k – дробное число):

$$\mathbf{X}_{i,s} = (\mathbf{1} - \mathbf{B}^k)^{-1} \left(\mathbf{A}_{s-1} + \sum_{n=1}^{k-1} \mathbf{B}^n \mathbf{A}_{s-n-1} \right), \quad (20)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица второго порядка.

Изложенные методика и математическая модель являются *базовыми* для различных *модификаций схем* и *особенностей их расчета*. Причем модификация базовой методики касается только коэффициентов матриц *первого этапа припасовывания*. Формулы же второго этапа остаются неизменными.

На практике в однофазных преобразователях наиболее часто применяются более простые, двухступенчатые ($q=2$) алгоритмы изменения параметров и конфигураций схем двухполюсников. Поэтому особенности расчета покажем на примере двухступенчатого алгоритма в преобразователях рис. 2-4, помня о том, что многоступенчатые процессы описываются по аналогии с двухступенчатыми.

При изменении индуктивности, например, в результате переключения отводов дросселя (см. рис. 2), его потокосцепление до коммутации и после нее остается неизменным, т.е. $L_{-0}I_{-0} = L_{+0}I_{+0}$, а ток, чтобы это уравнение удовлетворялось, мгновенно изменяется до величины $I_{+0} = (L_{-0}/L_{+0})I_{-0}$. Матричные коэффициенты на первой и второй ступенях при этом определяются выражениями

$$\mathbf{G}_{i,s} = \begin{Bmatrix} (L_i/L_{i+1})G_{1,i,s} \\ G_{2,i,s} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{i+1,s} = \begin{Bmatrix} (L_{i+1}/L_i)G_{1,i+1,s} \\ G_{2,i+1,s} \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{Bmatrix} (L_i/L_{i+1})H_{11,i} & (L_i/L_{i+1})H_{12,i} \\ H_{21,i} & H_{22,i} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{H}_{i+1} = \begin{Bmatrix} (L_{i+1}/L_i)H_{11,i+1} & (L_{i+1}/L_i)H_{12,i+1} \\ H_{21,i+1} & H_{22,i+1} \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

На рис. 6 представлены диаграммы входного тока и выходного напряжения в схеме рис. 2, полученные в результате расчета по изложенной методике для режима переключения отводов дросселя. Относительная величина скачка тока зависит только от соотношения индуктивностей на границе ступеней, до и после коммутации, и не зависит от частоты коммутации. Качество же выходного напряжения зависит от емкости конденсатора, величины нагрузки и частоты коммутации.

Расчет выполнен для частоты коммутации, некратной частоте сети, $k=10,5$. При этом на диаграммах рис. 6 видно, что период повторяемости составил два периода сети, что подтверждает возможность использования предлагаемой методики расчета для случаев с дробным числом k . Этот же вывод касается и других модификаций расчета, в том числе и приведенных далее.

При реверсе дросселя (рис. 3) ток в нем не изменяется ни по величине, ни по направлению, а начальные значения тока изменяют свой знак на противоположный. Поэтому матричные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\mathbf{G}_{i,s} = \begin{Bmatrix} -G_{1,i,s} \\ G_{2,i,s} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{i+1,s} = \begin{Bmatrix} -G_{1,i+1,s} \\ G_{2,i+1,s} \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{Bmatrix} -H_{11,i} & -H_{12,i} \\ H_{21,i} & H_{22,i} \end{Bmatrix};$$

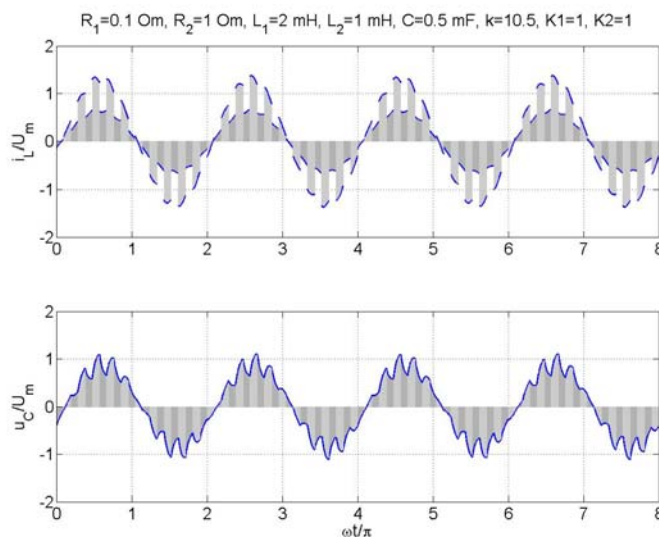


Рис. 6

$$\mathbf{H}_{i+1} = \begin{vmatrix} -H_{11,i+1} & -H_{12,i+1} \\ H_{21,i+1} & H_{22,i+1} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

При реверсе конденсатора (рис. 4) начальные значения напряжения на каждой ступени меняют знак на противоположный, а матричные коэффициенты определяются формулами

$$\mathbf{G}_{i,s} = \begin{vmatrix} G_{1,i,s} \\ -G_{2,i,s} \end{vmatrix}; \mathbf{G}_{i+1,s} = \begin{vmatrix} G_{1,i+1,s} \\ -G_{2,i+1,s} \end{vmatrix}; \mathbf{H}_i = \begin{vmatrix} H_{11,i} & H_{12,i} \\ -H_{21,i} & -H_{22,i} \end{vmatrix}; \mathbf{H}_{i+1} = \begin{vmatrix} H_{11,i+1} & H_{12,i+1} \\ -H_{21,i+1} & -H_{22,i+1} \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Выводы. Полученные по предложенной методике и ее модификациям граничные значения инерциальных переменных для каждой ступени и каждого интервала коммутации позволяют рассчитывать мгновенные значения токов и напряжений в цепях второго порядка различной конфигурации в квазиустановившемся режиме работы системы сеть–преобразователь–нагрузка при регулировании параметров линейных или изменении параметров нелинейных элементов схемы.

На каждой ступени может быть одновременно несколько изменений, но они должны происходить с одинаковой частотой, синхронно. Причем частота коммутации (изменений) может быть нецелым числом по отношению к частоте сети, а период повторяемости – неравным периоду сети.

Приведенные примеры схем преобразователей (двухполюсников) и особенности их расчета не являются исчерпывающими, ибо каждая модификация структуры требует своего подхода.

1. Голубев В.В. Импульсное преобразование переменного напряжения – К.: Наук. думка, 1914. – 248 с.
2. Голубев В.В. Расчет цепей переменного тока с изменяющимися параметрами // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – 2012. – Вип. 31. – С. 126–133.
3. Шидловский А.К., Федий В.С. Электрические цепи с вентильными коммутаторами. – К.: Ін-т електродинаміки НАН України. 2010. – 270 с.

УДК 621.314

В.В. Голубев, канд. техн. наук

Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

Особенности расчета кил переменного тока с периодически изменяющимися параметрами

Запропоновано готове аналітичне рішення для перехідних і квазістатичних електромагнітних процесів у колах змінного струму другого порядку з періодично змінними за часом параметрами елементів та методика його одержання. Визначено різні модифікації математичної моделі залежно від характеру параметрів і змін конфігурації схеми. Бібл. 3, рис. 6.

Ключові слова: змінний струм, усталений процес, імпульсне регулювання, змінні параметри, висока частота, аналітичне рішення, математична модель.

V.V. Golubev

Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine

Features calculation of circuits of the alternating current with periodically changing parameters

Are offered the ready analytical decision for the transitive and quasistatic electromagnetic processes in circuits of an alternating current of the second order with parameters of elements periodically varying in time and a technique of its reception. Different modifications of mathematical model are certain depending on character of parameters and changes of configuration of chart. References 3, figures 6.

Key words: alternating current, installed process, pulse regulation, variable parameters, high frequency, analytical decision, mathematical model.

Надійшла 29.04.2015

Received 29.04.2015