

УДК 621.314.58

СТАБІЛІЗАЦІЯ ВИХІДНОЇ НАПРУГИ ОДНОФАЗНОГО ДЖЕРЕЛА ЖИВЛЕННЯ З НЕЛІНІЙНИМ ВИХІДНИМ ТРАНСФОРМАТОРОМ

Т.В. Мисак, канд. техн. наук
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03057, Україна
e-mail: taras@igbt.com.ua

Об'єктом дослідження є джерело синусоїдальної напруги, яке має в своєму складі перетворювач частоти з ШІМ та вихідним LC-фільтром і нелінійний однофазний вихідний трансформатор з ємністю на виході. Отримано математичний опис цього джерела як нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, для якої проведено редукцію. Нелінійність приведено до вигляду, який дав змогу здійснити синтез закону керування з використанням методу функцій Ляпунова. Наведено результати моделювання, проведеного з врахуванням обмежень, які впливають на технічну можливість реалізації отриманого закону керування. Бібл. 14, рис. 6.
Ключові слова: перетворювач частоти, вихідний LC-фільтр, нелінійний однофазний трансформатор, сингулярно збурена система, метод функцій Ляпунова.

Вступ. Розвиток силової напівпровідникової елементної бази призвів до якнайширшого використання ШІМ-інверторів, силова частина яких побудована на новому поколінні IGBT-модулів. У першу чергу це відбулось у тих застосуваннях, де потрібне достатньо точне підтримання напруги на навантаженнях. Це також стосується великого класу технічних задач, які потребують безумовної наявності гальванічної розв'язки між входом і виходом. Зазвичай у таких схемах [12] не враховується те, що трансформатор має бути спеціально спроектованим для роботи з вихідною напругою ШІМ-інвертора. Трансформатори з осердям зі штампованої електротехнічної сталі, що випускаються серійно, є непридатними для роботи в схемах, в яких трансформатор підключено безпосередньо до виходу інвертора. У сформованій ШІМ-інвертором напрузі мають місце значні рівні dU/dt і, як наслідок, результатом є суттєве зниження надійності джерела. Для зниження амплітуди піків струму в первинній обмотці трансформатора вимушеним кроком є розміщення послідовно з вторинною [12] або первинною [14] обмоткою додаткової фільтрової індуктивності, величина якої є достатньо великою у порівнянні з індуктивністю класичної лінійної заступної схеми трансформатора. Для подавлення рівня високочастотних складових у вихідній напрузі застосовується окремий вихідний фільтровий конденсатор. Окрім стабільної та надійної роботи такі джерела мають забезпечувати мінімальні відхилення амплітуд вихідної напруги та частоти як у квазістаціонарних, так і в перехідних режимах за наявності гальванічної розв'язки між входом та виходом. Ці джерела мають також забезпечувати прийнятне значення коефіцієнта спотворень вихідної напруги у всьому діапазоні струмів навантаження, тому додатково можуть доповнюватись одно- або частіше багатоланковими фільтрами [8]. Прямий синтез регулятора вихідної напруги в таких випадках перетворюється на доволі складну задачу. Тому розповсюдженим є використання традиційного *PID*-регулятора [14]. Причому при синтезі регулятора не враховують параметри схеми заміщення лінійного трансформатора, що безпосередньо впливає на запас стійкості системи та на величину відхилень регульованої координати під час перехідних процесів. Оскільки більшість задач з модернізації існуючого обладнання не передбачає заміни вже встановленого розв'язуючого трансформатора, виникає необхідність, з одного боку, не допустити зниження рівня надійності внаслідок застосування ШІМ-інвертора напруги зі значним рівнем dU/dt , а з іншого боку, забезпечити зниження амплітуди відхилень напруги на навантаженні під час перехідних процесів та дотримання прийнятеного значення коефіцієнта спотворень.

Постановка задачі. Структурну схему системи, яка складається з однофазного інвертора з ШІМ вихідної напруги, LC -фільтра, однофазного трансформатора з додатковою ємністю на виході та навантаження, представлено на рис. 1.

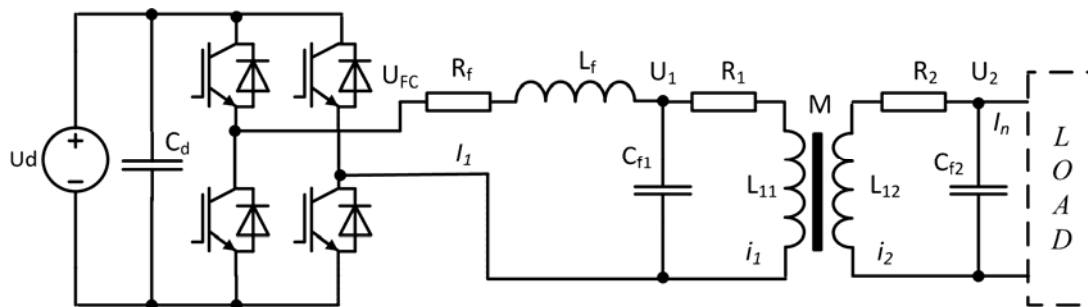


Рис. 1

Заступна схема системи за припущення ідеальності силових ключів ПЧ та мережі живлення може бути описана алгебраїчно-диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{Cf1} + i_1; & I_n &= -i_2 - I_{Cf2}; & L_f \frac{dI_1}{dt} &= U_{FC} - U_1 - R_f I_1; \\ \frac{dU_1}{dt} &= \frac{1}{C_{f1}}(I_1 - i_1); & \frac{dU_2}{dt} &= \frac{1}{C_{f2}}(-i_2 - I_n); \\ U_1 &= R_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}; & U_2 &= -R_2 i_2 - \frac{d\Psi_2}{dt}; & I_n &= X(U_2, I_n, t), \end{aligned} \quad (1)$$

де U_1, U_2 – миттєві значення напруг на фільтрових конденсаторах; Ψ_1, Ψ_2 – миттєві значення потокозчеплень обмоток трансформатора; U_{FC} – миттєве значення напруги на виході ПЧ; I_1, I_n – вихідний струм ПЧ та навантаження; R, L, C – активні опори, індуктивності та ємності відповідно до схеми на рис. 1.

У системах, від яких вимагається відносна точність стабілізації вихідної напруги, використання значного спрощення математичного опису трансформатора до рівня лінійної RL -передатної ланки призводить до виникнення значних статичних та динамічних похибок за наявності постійно діючих збурень [7]. Окрім цього, така математична модель абсолютно виключає врахування впливу нелінійності магнітної системи трансформатора, що призводить здебільшого до неможливості аналітичного синтезу керування вихідною напругою навіть у першому наближенні.

У трансформаторах з феромагнітним магнітопроводом магнітна проникність матеріалу осердя не є постійною. Тому протягом всього циклу перемагнічування не є константами також власні індуктивності L та взаємоіндуктивність M обмоток трансформатора. В результаті такої девіації магнітної проникності виникають спотворення струмів, а саме струму намагнічування. Зазвичай при побудові схем заміщення трансформаторів нехтують не тільки нелінійностями, які власне призводять до спотворення струмів, а й самим струмом намагнічування. Проте для багатьох задач керування вихідною напругою джерел живлення такий підхід не можна вважати коректним, оскільки в деяких режимах магнітопроводи можуть входити у стан насичення. Величина і форма струмів обмоток суттєво змінюються при насиченні магнітопровода трансформатора, яке проявляється як нелінійна залежність індукції від напруженості магнітного поля $B(H)$ (крива намагнічування). Виходячи з напрямків досліджень, застосовуються різні типи апроксимаційних кривих для аналітичного опису кривої намагнічування. Від найпростіших кусково-лінійних апроксимацій до гіперболічних функцій і "універсальної апроксимації" з комбінацій експонент, дробів та дробових показників степеня [9]. Для того щоб отримати в аналітичному вигляді вирази для індуктивностей схеми заміщення однофазного трансформатора, застосуємо перевірений спосіб апроксимування, який використовує представлення нелінійності у вигляді степеневого ряду з непарними показниками степенів:

$$B = B_m (\alpha_1 H + \alpha_3 H^3 + \alpha_5 H^5 + \dots) \quad (2)$$

де $\alpha_i, B_m > 0$ – сталі, які мають визначатись за реальною кривою намагнічування; B, H – індукція та напруженість магнітного поля.

Така апроксимація є непарною і може бути використана для розрахунку магнітних полів у схемах як з постійним, так і зі змінним полем. Коефіцієнти α_i та B_m для полінома можна визначити, вибравши $k+1$ точок на кривій намагнічування, де k – порядок полінома, якщо використати, наприклад, інтерполяційний поліном Лагранжа. Така апроксимація добре збігається з реальними кривими, хоча можуть бути значні відхилення для надто високих можливих значень напруженості. Застосування аналітичної апроксимації кривої намагнічування трансформатора дає змогу перейти від поточкозчеплення до індукції залежно від напруженості магнітного поля, з якої, в свою чергу, врахувавши диференціальну магнітну проникність $\mu(H)$, нескладно вивести з застосуванням двох передостанніх рівнянь у (1) диференціальні рівняння відносно незалежних струмів обмоток (або індукції та одного зі струмів) [2]:

$$U_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad U_2 = -R_2 i_2 - L_{22} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}, \quad (3)$$

де L_{11}, L_{22} – приведені значення індуктивностей; M – взаємоіндуктивність, які є нелінійними функціями, що залежать від напруженості магнітного поля H , геометричних параметрів обмоток та їх взаємного розташування на магнітному осерді, магнітних властивостей самого осердя. Загальноприйнятним є припущення, що індуктивності розсіювання можна вважати лінійними [2], тоді існує можливість представити нелінійні величини L_{11}, L_{22} та M , виразивши напруженість магнітного поля через струм намагнічування у такому вигляді:

$$L_{11} = L_{\sigma 1} + M; \quad L_{22} = L_{\sigma 2} + M; \quad M = M_0 \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{magn}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{magn}^4 + \dots \right)^{-1}, \quad (4)$$

де $L_{\sigma 1}, L_{\sigma 2}$ – деякі середні сталі значення паразитних індуктивностей; M_0 – початкове значення взаємоіндуктивності; $i_{magn} = i_1 + i_2$ – струм намагнічування; ρ, α_i, H_{am} – сталі, величини яких обумовлені властивостями матеріалу, геометричними параметрами обмоток та їх взаємним розташуванням на магнітному осерді.

Отже, вважаючи, що добуток $L_{\sigma 1} L_{\sigma 2}$ є величиною вищого порядку малості, якою можна далі знехтувати, рівняння (3) з урахуванням (4) можна звести до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{di_1}{dt} &= -R_1 i_1 + R_2 i_2 + U_1 + U_2 + \frac{V_m L_{\sigma 2}}{B_m \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{magn}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{magn}^4 + \dots \right)^{-1}} (-R_1 i_1 + U_1); \\ \varepsilon \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1 - R_2 i_2 - U_2 - U_1 + \frac{V_m L_{\sigma 1}}{B_m \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{magn}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{magn}^4 + \dots \right)^{-1}} (-R_2 i_2 - U_2), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varepsilon = (L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2})$ – достатньо мала величина; V_m – масштабний коефіцієнт.

З урахуванням наведених припущень та перетворень з (1) та (5) одержимо

$$\begin{aligned} L_f \frac{dI_1}{dt} &= U_{FC} - U_1 - R_f I_1; \quad \frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{C_{f1}} (I_1 - i_1); \\ \varepsilon \frac{di_1}{dt} &= -R_1 i_1 + R_2 i_2 + U_1 + U_2 + \frac{V_m L_{\sigma 2} \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{magn}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{magn}^4 + \dots \right)}{B_m} (-R_1 i_1 + U_1); \\ \varepsilon \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1 - R_2 i_2 - U_2 - U_1 + \frac{V_m L_{\sigma 1} \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{magn}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{magn}^4 + \dots \right)}{B_m} (-R_2 i_2 - U_2); \\ \frac{dU_2}{dt} &= \frac{1}{C_{f2}} (i_2 - I_n); \quad \frac{dI_n}{dt} = f_2(X_1, I_n, t) + U_2, \quad \frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, I_n, t), \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язання задачі. Для зручності виконаємо заміну змінних: $y_1 = -R_1 i_1 + U_1$, $y_2 = -R_2 i_2 - U_2$, продиференціювавши яку, матимемо $\frac{dy_1}{dt} = -R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt} = -R_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{dU_2}{dt}$.

Використавши підстановку $i_1 = -\frac{1}{R_1}(y_1 - U_1)$, $i_2 = -\frac{1}{R_2}(y_2 - U_2)$, перепишемо систему (6)

відносно нових змінних у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= u + d_2 U_1 + d_1 I_1; \quad \frac{dU_1}{dt} = d_3 \left(I_1 + \frac{1}{R_1}(y_1 - U_1) \right); \quad \frac{dU_2}{dt} = d_4 \left(-\frac{1}{R_2}(y_2 + U_2) - I_n \right); \\ \varepsilon \frac{dy_1}{dt} &= -R_1 y_1 + R_2 y_2 + \varepsilon d_3 \left(I_1 + \frac{1}{R_1}(y_1 - U_1) \right) - R_1 \xi_1(y_1, y_2, U_1, U_2) y_1; \\ \varepsilon \frac{dy_2}{dt} &= R_1 y_1 - R_2 y_2 - \varepsilon d_4 \left(-\frac{1}{R_2}(y_2 + U_2) - I_n \right) - R_2 \xi_2(y_1, y_2, U_1, U_2) y_2; \\ \frac{dI_n}{dt} &= w(U_2, I_n, t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де } \xi_{1,2}(y_1, y_2, U_1, U_2) = \frac{V_m L_{\sigma 2,1} (\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{mg}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{mg}^4 + \dots)}{B_m},$$

$$i_{mg} = -\frac{1}{R_1}(y_1 - U_1) - \frac{1}{R_2}(y_2 + U_2), \quad d_1 = -\frac{R_f}{L_f}, \quad d_2 = -\frac{1}{L_f}.$$

Рівняння (7) описують нелінійну сингулярно збурену динамічну систему з невідомим керуванням u , синтез якого значно ускладнює наявність малого параметра при похідних. Асимптотичне розкладення рішень сингулярно збурених рівнянь, застосоване в [13], дає можливість отримати вирази для аналізу перехідних процесів у трансформаторі в явному вигляді, проте не може бути використане для синтезу регулятора в загальному вигляді у просторі станів. Підхід, заснований на лінеаризації лише підсистеми з малими параметрами [4], є неможливим, оскільки в такому випадку система (7) повністю втрачає керованість. Хоча при деяких умовах для системи (7) може існувати така притягувальна інваріантна поверхня $y = h(I, U, \varepsilon)$, рух по якій буде описуватись укороченою (редукованою) системою рівнянь. Аналіз редукованої системи дає змогу вирішувати питання стійкості, наявності періодичних розв'язків та інші особливості власне для системи (7). Без окремого доведення вважатимемо апіорі, що така поверхня для системи (7) існує в деякій області простору змінних стану. Оскільки універсальних методів для пошуку опису цієї поверхні не існує, шукатимемо його для системи (7) у наближеній формі у вигляді ряду [11] за степенями ε :

$h(I_1, U_1, U_2, \varepsilon) = h_0(I_1, U_1, U_2, \varepsilon) + \varepsilon h_1(I_1, U_1, U_2, \varepsilon) + \varepsilon^2 h_2(I_1, U_1, U_2, \varepsilon) + \dots$, де h_i – вектор-функції розмірності 2.

Для спрощення подальших викладень з урахуванням (7) введемо вектор-функцію:

$$G(I_1, y_1, y_2, U_1, U_2) = \begin{pmatrix} -R_1 y_1 + R_2 y_2 + \varepsilon d_3 \left(I_1 + \frac{1}{R_1}(y_1 - U_1) \right) - R_1 \xi_1(y_1, y_2, U_1, U_2) y_1 \\ R_1 y_1 - R_2 y_2 - \varepsilon d_4 \left(-\frac{1}{R_2}(y_2 + U_2) - I_n \right) - R_2 \xi_2(y_1, y_2, U_1, U_2) y_2 \end{pmatrix},$$

прирівнявши яку до нуля та поклавши $\varepsilon = 0$, отримаємо нульове наближення $(y_1, y_2)^T = h_0$. Оскільки ε є досить малим, обмежимося першим наближенням, яке можна визначити, розв'язавши відносно h_1 рівняння:

$$B(I_1, U_1, U_2, y_1, y_2, \varepsilon) \cdot h_1(I_1, U_1, U_2, y_1, y_2, \varepsilon) + Z(I_1, U_1, U_2, y_1, y_2, \varepsilon) = 0,$$

$$\text{де } B(I_1, U_1, U_2, y_1, y_2, \varepsilon) = \left. \frac{\partial G_i}{\partial y_k} \right|_{i,k=1,2}; \quad Z(I_1, U_1, U_2, y_1, y_2, \varepsilon) = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}.$$

У результаті після підстановки h_0 та $\varepsilon = 0$ і врахувавши, що добуток $L_{\sigma 1} L_{\sigma 2}$ має той самий порядок за величиною, що й ε^2 , відкинемо його та виокремимо лінійну і нелінійну частини:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = b_{m0} \begin{pmatrix} -c_{12}V_m L_{\sigma 1} (R_1 I_1 - U_1) \\ c_{23}V_m L_{\sigma 2} (-U_2 - R_2 I_n) \end{pmatrix} + b_{m0} B_m \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{mg0}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{mg0}^4 + \dots \right)^{-1} f_O(I, U), \quad (8)$$

$$\text{де } i_{mg0} = i_{mg}(h_0) = \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}; \quad b_{m0} = \frac{M_0}{R_1 R_2 V_m}; \quad f_O(I, U) = \begin{pmatrix} c_{11}I_1 + c_{12}U_1 + c_{13}U_2 + c_{14}I_n \\ c_{21}I_1 + c_{22}U_1 + c_{23}U_2 + c_{24}I_n \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = d_3 R_2; \quad c_{12} = -\frac{R_2}{R_1} d_3; \quad c_{13} = d_4; \quad c_{14} = d_4 R_2; \quad c_{21} = d_3 R_1; \quad c_{22} = -d_3; \quad c_{23} = d_4 \frac{R_1}{R_2}; \quad c_{24} = d_4 R_1.$$

Після цього можемо підставити (8) в (7) і відкинути два рівняння з малою величиною ε при перших похідних. Провівши відповідні перетворення, матимемо систему диференціальних рівнянь (ДР) зниженого порядку відносно початкової (7):

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = d_1 I_1 + d_2 U_1 + u; \\ \frac{dU_1}{dt} = b_{11} I_1 + b_{12} U_1 + b_{13} U_2 + b_{14} I_n + \zeta_1(I_1, U_1, U_2, I_n); \\ \frac{dU_2}{dt} = b_{21} I_1 + b_{22} U_1 + b_{23} U_2 + b_{24} I_n + \zeta_2(I_1, U_1, U_2, I_n); \\ \frac{dI_n}{dt} = w(U_2, I_n, t), \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{де } b_{11} = d_3 + \frac{d_3^2}{R_1^2} \frac{M_0}{V_m} L_{\sigma 1}; \quad b_{12} = -\frac{d_3}{R_1} - \frac{d_3^2}{R_1^2} \frac{M_0}{V_m} \frac{L_{\sigma 1}}{R_1}; \quad b_{13} = b_{14} = 0, \quad b_{15} = \frac{d_3}{R_1} B_m b_{m0};$$

$$b_{21} = b_{22} = 0; \quad b_{23} = -\frac{d_4}{R_2} - \frac{d_4^2}{R_2^2} \frac{M_0}{V_m} \frac{L_{\sigma 2}}{R_2}; \quad b_{24} = -d_4 + \frac{d_4^2}{R_2^2} \frac{M_0}{V_m} L_{\sigma 2}; \quad b_{25} = \frac{d_4}{R_2} B_m b_{m0};$$

$$\zeta_1(I_1, U_1, U_2, I_n) = b_{15} \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{mg0}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{mg0}^4 + \dots \right)^{-1} (c_{11}I_1 + c_{12}U_1 + c_{13}U_2 + c_{14}I_n);$$

$$\zeta_2(I_1, U_1, U_2, I_n) = b_{25} \left(\rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{mg0}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{mg0}^4 + \dots \right)^{-1} (c_{21}I_1 + c_{22}U_1 + c_{23}U_2 + c_{24}I_n).$$

Зауважимо, що отримана після підстановки система зниженого порядку матиме лише динамічні властивості, еквівалентні початковій системі, проте кількісні характеристики матимуть відмінності. Змінні стану, які в початковій системі ДР (7) є струмами та напругами, в еквівалентній вже не будуть тими звичними струмами та напругами, по суті, це вже інші змінні стану, які зберігають „старе” позначення. Еквівалентність систем (7) та (9) означає, що немає необхідності проводити синтез керування u для повновимірної системи (7). Із стійкості або асимптотичної стійкості деякого рішення системи (9) впливає стійкість або асимптотична стійкість системи (7). Якщо задатись деякими якісними характеристиками при синтезі керування в системі (9), то отриманий закон керування для (9) забезпечить ті ж самі якісні властивості й в розширеній системі (7). Для стабілізації вихідної напруги використаємо загальноприйняте припущення, що напівпровідниковий інвертор напруги з ШІМ є практично ідеальним джерелом ЕРС, тобто знехтуємо падінням напруги на силових ключах у відкритому стані та запізненням системи керування при формуванні вихідної напруги за допомогою програмної ШІМ.

Розглянемо загальноприйнятий випадок з традиційним RL -навантаженням.

У системі ДР з нелінійністю виду ζ_i не можна проводити аналіз і синтез керуючої дії за допомогою першого (лінійного) наближення, оскільки для неї не виконуються умови теореми Пуанкаре-Ляпунова. Проте, якщо врахувати наявність фізичних обмежень у початковій системі, то у просторі станів можна виділити за допомогою нерівності

$$0 < \rho + 3\alpha_3 \alpha^2 H_{am}^2 i_{mg0}^2 + 5\alpha_5 \alpha^4 H_{am}^4 i_{mg0}^4 + \dots < 2U_m$$

деяку область D_x , у якій справедливою буде заміна функцій $\zeta_{1,2}$ на такі:

$$\begin{aligned}\zeta_1(I_1, U_1, U_2, I_n) &= b_{15} v_1(i_{mg0})(c_{11}I_1 + c_{12}U_1 + c_{13}U_2 + c_{14}I_n); \\ \zeta_2(I_1, U_1, U_2, I_n) &= b_{25} v_1(i_{mg0})(c_{21}I_1 + c_{22}U_1 + c_{23}U_2 + c_{24}I_n),\end{aligned}\quad (10)$$

$$\text{де } v_1(i_{mg0}) = \frac{B_m}{U_m} \left(\left(2 - \frac{\rho + 3\alpha_3\alpha^2 H_{am}^2 i_{mg0}^2 + 5\alpha_5\alpha^4 H_{am}^4 i_{mg0}^4 + \dots}{U_m} \right) + Z^2 + Z^3 + \dots \right);$$

$$Z = \left(1 - \frac{\rho + 3\alpha_3\alpha^2 H_{am}^2 i_{mg0}^2 + 5\alpha_5\alpha^4 H_{am}^4 i_{mg0}^4 + \dots}{U_m} \right);$$

U_m – довільна стала, величина якої вибирається такою, щоб забезпечити рівномірність розкладення по Z в області D_x .

Виділивши нелінійну частину функцій $\zeta_{1,2}$ та звівши подібні в лінійній, знехтуємо при цьому величинами вищого порядку малості і отримаємо систему ДР:

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = d_{01}I_1 + d_{02}U_1 + d_{03}U_2 + d_{04}I_n + u; \\ \frac{dU_1}{dt} = d_{21}I_1 + d_{22}U_1 + d_{23}U_2 + d_{24}I_n + \zeta_{11}(I_1, U_1, U_2, I_n); \\ \frac{dU_2}{dt} = d_{31}I_1 + d_{32}U_1 + d_{33}\delta + d_{34}I_n + \zeta_{12}(I_1, U_1, U_2, I_n); \\ \frac{dI_n}{dt} = d_{41}I_1 + d_{42}U_1 + d_{43}U_2 + d_{44}I_n, \end{cases}\quad (11)$$

$$\text{де } b_{m1} = \frac{B_m}{U_m} \left(2 - \frac{\rho}{U_m} \right); \quad b_2 = 3\alpha_3\alpha^2 H_{am}^2; \quad b_3 = 5\alpha_5\alpha^4 H_{am}^4; \quad \zeta_{10} = \frac{B_m}{U_m^2} i_{mg0}^2 (b_2 + b_3 i_{mg0}^2);$$

$$\zeta_{11}(I_1, U_1, U_2, I_n) = b_{15}\zeta_{10}(c_{11}I_1 + c_{12}U_1 + c_{13}U_2 + c_{14}I_n);$$

$$\zeta_{12}(I_1, U_1, U_2, I_n) = b_{25}\zeta_{10}(c_{21}I_1 + c_{22}U_1 + c_{23}U_2 + c_{24}I_n);$$

$$d_{01} = d_1; \quad d_{02} = d_2; \quad d_{03} = 0; \quad d_{04} = 0; \quad d_{25} = b_{m1}b_{15}; \quad d_{35} = b_{m1}b_{25};$$

$$d_{21} = b_{11} + d_{25}c_{11}; \quad d_{22} = b_{12} + d_{25}c_{12}; \quad d_{23} = b_{13} + d_{25}c_{13}; \quad d_{24} = b_{14} + d_{25}c_{14},$$

$$d_{31} = b_{21} + d_{35}c_{21}; \quad d_{32} = b_{22} + d_{35}c_{22}; \quad d_{33} = b_{23} + d_{35}c_{23}; \quad d_{34} = b_{24} + d_{35}c_{24},$$

$$d_{41} = 0; \quad d_{42} = 0; \quad d_{43} = -\frac{1}{L_n}; \quad d_{44} = -\frac{R_n}{L_n},$$

для якої тепер виконуються умови теореми Пуанкаре-Ляпунова. Тому синтез закону керування u можна проводити за рівняннями першого наближення. Отже, замість нелінійної системи (11) розглянемо лінійну систему ДР.

Якщо початок координат цієї системи є рівномірно асимптотично стійким, то рух буде стійким при постійно діючих збуреннях [15], тобто в системі (9). Отже, за допомогою вибору регулятора в лінеаризованій системі має забезпечуватись рівномірна асимптотична стійкість. Функція керування у загальному випадку є нелінійною непарною активаційною функцією координат збуреного руху. У деяких випадках ця функція являє собою суму зважених за коефіцієнтами функції Ляпунова координат збуреного руху [3]. Тому звернемося до другого методу Ляпунова. У такому випадку керуючий вплив u шукатимемо у вигляді лінійної комбінації координат системи (9) $u = C_1 I_1 + C_2 U_1 + C_3 U_2 + C_4 I_n$, підставивши яку в (11) та знехтувавши після цього нелінійністю, отримаємо систему ДР, в якій зміняться коефіцієнти в першому рівнянні:

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = d_{11}I_1 + d_{12}U_1 + d_{13}U_2 + d_{14}I_n; \\ \frac{dU_1}{dt} = d_{21}I_1 + d_{22}U_1 + d_{23}U_2 + d_{24}I_n; \\ \frac{dU_2}{dt} = d_{31}I_1 + d_{32}U_1 + d_{33}U_2 + d_{34}I_n; \\ \frac{dI_n}{dt} = d_{41}I_1 + d_{42}U_1 + d_{43}U_2 + d_{44}I_n, \end{cases} \quad (12)$$

де $d_{11} = d_1 + C_1$; $d_{12} = d_2 + C_2$; $d_{13} = C_3$; $d_{14} = C_4$; $d_{15} = 0$.

Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху в області D_x існує додатно-визначена функція $V(t, x, \dots)$, повна похідна за часом якої складена на основі рівнянь (12), і яка є функцією від'ємно-визначеною, якщо в цій області частинні похідні по координатах системи обмежені, то збурений рух є стійким при постійно діючих збуреннях [6].

Тому функцію Ляпунова $V(t, x, \dots)$, яка задовольняє обмеженню на деякій наперед заданій поверхні рівня $\max_{V=V_0} (dV/dt \cdot V^{-1}) = 2\tau$ ($\tau < 0$) [1], будемо шукати у вигляді такої квадратичної форми:

$$V = \frac{1}{2} (M_1 I_1^2 + M_2 U_1^2 + M_{23} U_1 U_2 + M_3 U_2^2 + M_4 I_n^2), \quad (13)$$

де M_1, \dots, M_4 – невідомі довільні параметри. Такі, що $M_1, \dots, M_4 > 0$.

Тоді її повна похідна, записана на основі системи рівнянь (12), матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V = & M_1 (d_{11} - \tau) I_1^2 + (M_2 (d_{22} - \tau) + M_{23} d_{32}) U_1^2 + (M_{23} d_{23} + M_3 (d_{33} - \tau)) U_2^2 + M_4 (d_{44} - \tau) I_n^2 + \\ & + (M_1 d_{13} + M_3 d_{31} + M_{23} d_{21}) I_1 U_2 + (M_2 d_{23} + M_3 d_{32} + M_{23} (d_{22} + d_{33} - \tau)) U_1 U_2 + \\ & + (M_1 d_{12} + M_2 d_{21} + M_{23} d_{31}) I_1 U_1 + (M_2 d_{24} + M_{23} d_{34}) U_1 I_n + \\ & + (M_3 d_{34} + M_4 d_{43} + M_{23} d_{24}) I_n U_2 + M_1 d_{14} I_1 I_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Отже, побудова керування полягає у знаходженні коефіцієнтів $C_1 \dots C_4$ та встановленні взаємозв'язків між параметрами системи та коефіцієнтами функції Ляпунова M_1, \dots, M_4 .

Перша група нерівностей $M_1, \dots, M_4 > 0$, яка впливає з додатної визначеності функції Ляпунова $V(t, x, \dots) > 0$, дає можливість за допомогою підстановки коефіцієнтів при I_1^2 в (14) одразу записати для визначення C_1 вираз $M_1 (d_1 + C_1 - \tau) < 0 \Rightarrow C_1 < R_f / L_f + \tau$. Для коефіцієнта при I_n^2 у виразі (14) маємо $M_4 (d_{44} - \tau) < 0$. Отже, величина τ не є довільною, а має задовольняти нерівності $(-R_n / L_n - \tau) < 0$, оскільки $M_4 > 0$.

Прирівняємо до нуля всі коефіцієнти при добутках у виразі (14), що дозволить встановити взаємозв'язок між коефіцієнтами із системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} M_1 d_{12} + M_2 d_{21} + M_{23} d_{31} = 0; \\ M_1 d_{13} + M_3 d_{31} + M_2 M_3 d_{21} = 0; \\ M_1 d_{14} = 0; \\ M_2 d_{23} + M_3 d_{32} + M_{23} (d_{22} + d_{33} + \tau) = 0; \\ M_2 d_{24} + M_{23} d_{34} = 0; \\ M_3 d_{34} + M_4 d_{43} + M_{23} d_{24} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

Оскільки $M_1 > 0$ та $d_{41} = 0$, то з третього рівняння отримуємо єдиний тривіальний розв'язок $d_{14} = C_4 = 0$, що дає змогу уникнути необхідності вимірювання струму в навантаженні.

Розглянувши останні три рівняння системи (15), записані у вигляді

$$\begin{cases} M_2 d_{23} + M_3 d_{32} + M_{23} (d_{22} + d_{33} + \tau) = 0; \\ M_2 d_{24} + M_{23} d_{34} = 0; \\ M_3 d_{34} + M_{23} d_{24} = -M_4 d_{43}, \end{cases} \quad (16)$$

можемо визначити коефіцієнти M_2, M_3, M_{23} :

$$M_2 = -M_{23} \frac{d_{34}}{d_{24}}; M_{23} = \frac{d_{23}d_{234} + M_4d_{43}d_{324}}{d_{22} + d_{33} - \tau - d_{24}d_{324}}; M_3 = -\frac{M_4d_{43} + M_{23}d_{24}}{d_{34}}, \quad (17)$$

де $d_{234}=d_{34}/d_{24}$, $d_{324}=d_{32}/d_{34}$.

Тоді з перших двох рівнянь системи (15) можна визначити коефіцієнти зворотного зв'язку C_2 та C_3 :

$$C_2 = -d_2 - \frac{M_2d_{21} + M_{23}d_{31}}{M_1}; C_3 = -\frac{M_3d_{31} + M_{23}d_{21}}{M_1}. \quad (18)$$

Для перевірки знаківизначеності функції Ляпунова можна використати критерій Сільвестра, оскільки знак коефіцієнта M_{23} залежить від співвідношення багатьох параметрів електричної силової схеми. Можна також застосувати інший підхід, щоб не проводити кожного разу перевірку V згідно з цим критерієм. Введемо два додаткові коефіцієнти M_{24} та M_{25} , що дасть змогу записати:

$$M_2 = M_{21}^2 + M_{24}; M_3 = M_{22}^2 + M_{25}; M_{23} = 2M_{21}M_{22}, \quad (19)$$

де $M_{21} = \pm\sqrt{M_{26} - M_{24}}$; $M_{22} = \mp\sqrt{M_{27} - M_{25}}$; $M_{26} = -d_{234} \frac{d_{23}d_{234} + M_4d_{43}d_{324}}{d_{22} + d_{33} - \tau - d_{24}d_{324}}$;

$$M_{27} = -\frac{1}{d_{34}} \left(M_4d_{43} + d_{24} \frac{d_{23}d_{234} + M_4d_{43}d_{324}}{d_{22} + d_{33} - \tau - d_{24}d_{324}} \right).$$

Вибираючи їх за умови додатності виразів під знаком квадратного кореня в (19), можна забезпечити умову $V(t, x...) > 0$ функції Ляпунова. Зауважимо, що довільний вибір власне величин M_1 , $M_4 > 0$ не впливає на стійкість системи, проте визначатиме характеристики перехідного процесу.

На рис. 2–5 представлено результати цифрового моделювання для таких параметрів системи, показаної на рис. 1: трифазна мережа живлення напругою $U_\phi = 220$ В (RMS) та частотою 50 Гц; завдання вихідної напруги $U_{2ref} = 115$ В (RMS) з частотою $f_2 = 400$ Гц; перший фільтр з дроселем індуктивністю $L_f = 0,385$ мГн, активним опором $R_f = 0,098$ Ом та ємністю $C_{f1} = 16,5$ мкФ, що має власну частоту $\omega_0 \approx 12500$ рад/с; однофазний трансформатор типу ОСВМ 4,0-0,4-220/115 з $L_k \approx 67,5$ мкГн, $R_k \approx 0,1$ Ом; магнітні властивості осердя, що відповідають листовій холоднокатаній сталі марки 3408 [10]; ємність на виході трансформатора $C_{f2} = 33$ мкФ; параметри (приведені до первинної обмотки) номінального RL -навантаження, які враховані виходячи з заданих величин $I_2 = 36$ А, $\cos\varphi = 0,866$ та вихідної частоти f_2 і дорівнюють $R^* = 7,75$ Ом, $L^* = 1,5$ мГн.

Для вибору параметрів фільтрів існують достатньо різні методики, які можна комбінувати залежно від мети і додаткових вимог. У нашому випадку величини індуктивностей та ємностей вибирались тільки виходячи з величини власних частот. Параметри трансформатора для моделювання виходили з каталогових даних (вони можуть суттєво відрізнятися у різних виробників трансформаторів), тому для конкретного випадку бажано провести додаткові вимірювання, як мінімум, струму холостого ходу та напруги короткого замикання на експериментальному зразку

На рис. 2 показано графіки для випадку розі-

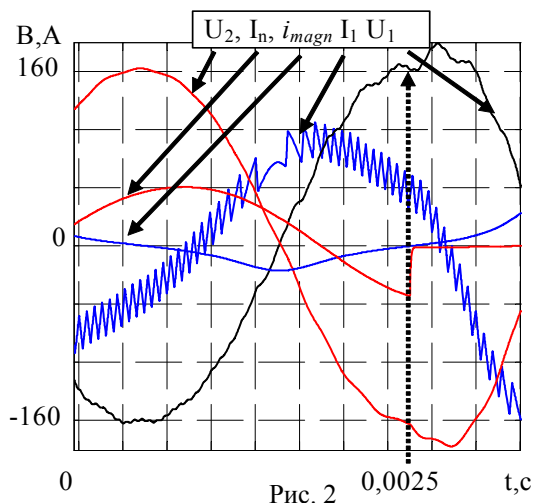


Рис. 2

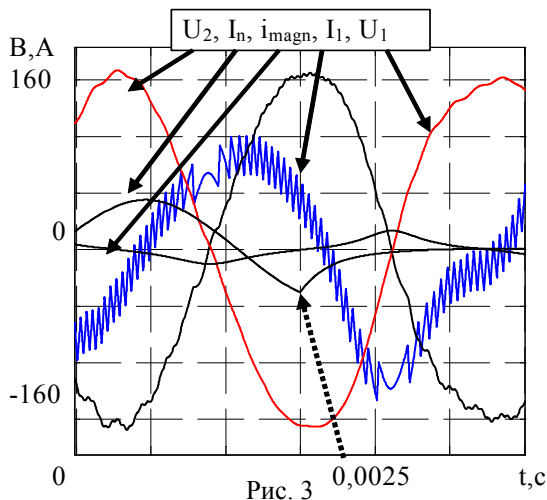


Рис. 3

мкненої системи ($C_1 \dots C_4 = 0$), вхідного струму та напруги на конденсаторі першого фільтра, струму та напруги навантаження U_2 , струму намагнічування у масштабі. На діаграмі перший відрізок часу відповідає роботі системи при номінальному струмі навантаження, а другий – при мінімальному струмі навантаження. У момент часу 0,0025 с відбувається стрибок навантаження від номінального $I_2 = 36$ А до мінімального, що призводить до стрибка напруги U_2 .

Рис. 2 дає змогу оцінити стрибок вихідної напруги при зникненні навантаження по амплітуді та тривалість перехідного процесу в розімкненій системі, налаштованій на робочу точку $U_2 = U_{ref}$ при номінальному навантаженні. Відношення миттєвого значення відхилення вихідної напруги від еталонної перевищує 14 %, а тривалість перехідного процесу – 3...4 періоди T_2 ($T_2 = 1/f_2$).

На рис. 3 наведено результати, отримані при цифровому експерименті при стабілізації вихідної напруги для випадку $M_1 = 2000$, $M_2 = 0,3464$, $M_3 = 0,4983$, $M_4 = 1,6$, $M_{23} = -0,1177$, $M_{24} = 0$, $M_{25} = 0,4883$, $C_1 = R_{f1}/L_{f1}$, $C_4 = 0$, $Tau = -210$. Наведено діаграми вхідного струму та напруги на конденсаторі першого фільтра, струму та напруги навантаження U_2 , струму намагнічування у масштабі. На діаграмі перший відрізок часу відповідає роботі системи при номінальному, а другий – при мінімальному струмі навантаження. В момент часу 0,0025 с відбувається стрибок навантаження від номінального $I_2 = 36$ А до мінімального.

Рис. 3 дає змогу оцінити стрибок вихідної напруги при зникненні навантаження за амплітудою та тривалість перехідного процесу в замкненій системі. Відношення миттєвого значення відхилення вихідної напруги від еталонної не перевищує 4 %, а тривалість перехідного процесу – 2...3 періоди T_2 . Форма вхідного струму фільтра показує значний вплив нелінійності намагнічування при малих навантаженнях. Також погіршується спектральний склад вихідної напруги за рахунок збільшення амплітуд непарних гармонік, виникнення яких обумовлено характером нелінійності типу „насичення”.

Додатковою складністю побудови керування є те, що в реальній системі не можна довільно вибирати амплітуду модуля керування $|U_{FC}|$, оскільки вона обмежена можливостями мережі живлення. Для високої швидкодії в процесі керування величина $|U_{FC}|$ має бути досить великою порівняно з напругою мережі. Тому в реальній системі вимоги щодо наперед призначеного характеру процесу, точності відпрацювання завдання та максимальної швидкодії можна послабити, врахувавши наявне обмеження на величину модуля вихідної напруги перетворювача частоти. У такому випадку характер керування буде визначатися співвідношеннями коефіцієнтів. Єдиного розв'язання задачі пошуку коефіцієнтів у випадку, який розглядається (в аналітичному вигляді), на жаль, не існує, тому коефіцієнти функції Ляпунова, які визначають коефіцієнти зворотного зв'язку C_2 та C_3 , можна визначити шляхом цифрового експерименту, порівнюючи отриману похибку вихідної напруги з наперед заданим допустимим значенням.

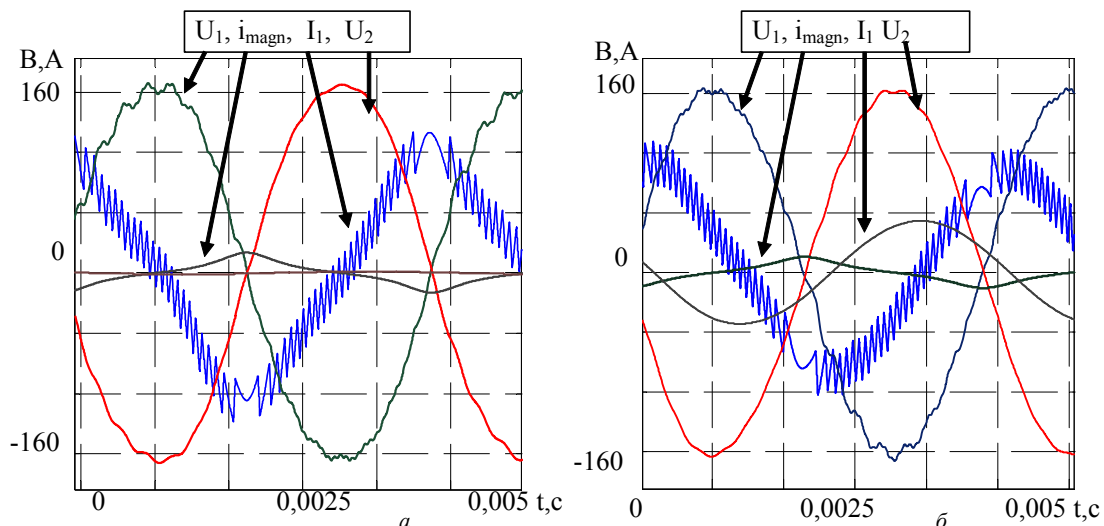


Рис. 4

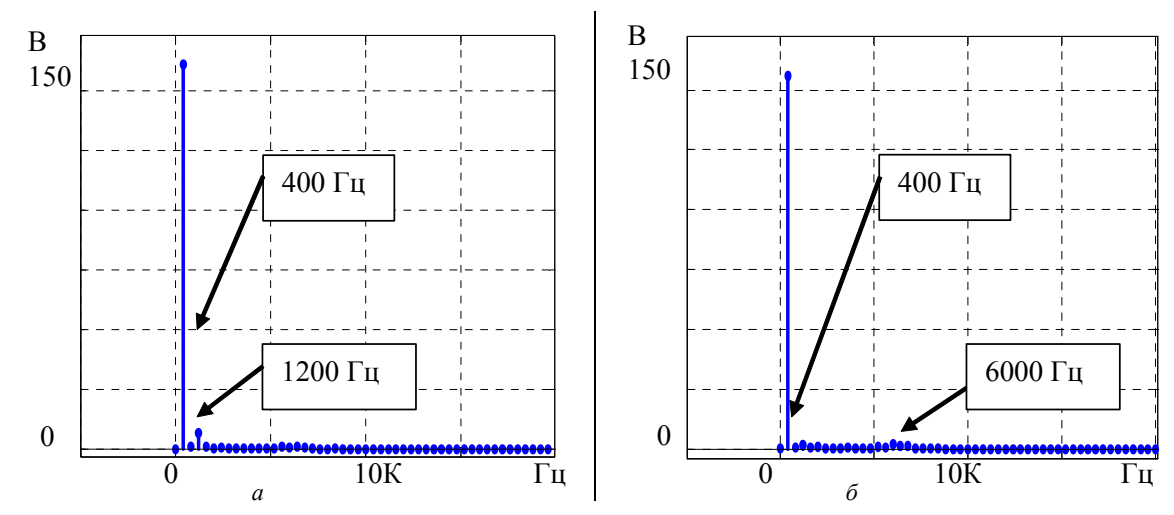


Рис. 5

На рис. 4 показано результати моделювання: *a* – квазіусталений режим (холостий хід); *б* – при номінальному навантаженні.

На рис. 5 *a*, *б* представлено результати для порівняння спектрів: *a* – квазіусталений режим (холостий хід) та *б* – при номінальному навантаженні.

Аналізуючи наведені діаграми, можна зробити такий висновок: форма напруги на виході джерела залишається синусоїдальною при зміні режиму з майже холостого ходу до номінального струму і навпаки, тобто неприйнятні сплески та провали, характерні для розімкненої системи, відсутні. Відношення миттєвого значення відхилення вихідної напруги від еталонної не перевищує 4 %, що відповідає наперед заданому допустимому значенню. Спектральний склад вихідної напруги показує незначне зростання канонічних гармонік при переході від номінального навантаження до мінімального. Для коригування спектрального складу вихідної напруги треба вживати додаткових заходів, оскільки в класі гладеньких регуляторів з наявним фізичним обмеженням модуля вектора вихідної напруги цю задачу вирішити вважається неможливим.

Висновки. Показано можливість формування вихідної напруги спеціального джерела живлення, яке описано нелінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь, з достатнім рівнем точності. Встановлена відповідність коефіцієнтів зворотного зв'язку коефіцієнтам функції Ляпунова для системи диференціальних рівнянь зниженого порядку, яку отримано шляхом редукції початкової нелінійної сингулярно збуреної системи. Така однозначна відповідність дає змогу спростити пошук необхідної комбінації коефіцієнтів зворотного зв'язку, оскільки не потребує окремого аналізу стійкості системи ДР після кожної ітерації. За допомогою цифрового моделювання наведено можливість забезпечення зниження впливу стрибків навантаження на форму вихідної напруги з урахуванням обмежень, характерних для реальних систем.

Окрім того, отримані результати показують, що модернізація вже встановленого обладнання не потребує заміни наявних трансформаторів, які забезпечують гальванічний розв'язок.

1. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. О выборе параметров квадратичной функции Ляпунова при решении динамических задач // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – Вып. 3(1). – С. 103–108.
2. Байков А.В. Математические модели трансформаторов при анализе силовой части электроприводов // Тр. Нижегородского гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. Электротехника и электроэнергетика. – 2013. – № 5(102). – С. 316–327.
3. Волянський Р., Послайко І., Садовой О. Визначення бажаного характеристичного поліному для узагальненої електромеханічної системи оптимального керування // Electric Power Engineering & Control Systems 2013” (EPECS-2013), 21–23 November 2013, Lviv, Ukraine. – P. 18–19.
4. Державин О.М., Сидорова Е.Ю. Об одном подходе к исследованию нелинейной неавтономной сингулярно возмущенной модели динамической системы // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18, № 2(3). – С. 888–890.

5. *Калитин Б.С.* Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений: Научн. изд. – Минск, БГУ, 2013. – 264 с.
6. *Малкин И.Г.* Устойчивость при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, Вып. 3. – С. 241–245.
7. *Мисак Т.В.* Формування синусоїдальної вихідної напруги джерела живлення з вихідним трансформатором у ковзному режимі // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАНУ, 2016. – Вип. 43. – С. 91–96.
8. *Михальський В.М.* Засоби підвищення якості електроенергії на вході та виході перетворювачів частоти та напруги з широтно-імпульсною модуляцією. – К.: Ін-т електродинаміки НАН України, 2013. – 340 с.
9. *Пентегов И.В., Красножон А.В.* Универсальная аппроксимация кривых намагничивания электротехнических сталей // Электротехника і Електромеханіка. – 2006. – № 1. – С. 66–70.
10. *Прокат* холоднокатаный тонколистовой. Каталог // НЛМК, Липецк. – 2009. – 42 с.
11. *Стрыгин В.В., Соболев В.А., Горлова Е.Я., Фридман Е.Я.* Интегральные многообразия сингулярно возмущенных систем и некоторые их применения // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. XXI, № 10. – С. 1723–1726.
12. *Ming-Shi Huang, Po-Yi Yeh, U-Ting Yeh, Meng-Gu Huang.* Digital-Controlled Single-Phase Transformer-Based Inverter for Non-Linear Load Applications // IEEE Transactions On Industrial Informatics, Vol. 9, No. 2, May 2013. – P. 1084–1093.
13. *Naidu D.S., Sen S.* Singular perturbation method for the transient analysis of a transformer // Electric Power Systems Research. – 1982. – Vol. 5, Iss. 4. – P. 307–313.
14. *Ramesh R., A.John Dhanaseely, R.Malar,* Design of Single phase inverter using PID controller For nonlinear load application // International Journal of Innovative Research in Technology & Science, Volume-2 Issue-5:Published On September 30, 2014. – P. 55–60.

УДК 621.314.58

Т.В. Мысак, канд. техн. наук

Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03057, Украина

Формирование синусоидального выходного напряжения источника питания с нелинейным выходным трансформатором

Объектом исследования является источник синусоидального напряжения, который состоит из мостового преобразователя частоты с ШИМ, выходным LC-фильтром и однофазным нелинейным выходным трансформатором с конденсатором на выходе. Получено математическое описание нелинейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений, для которой проведена редукция. Нелинейность приведена к виду, который позволил выполнить синтез закона управления с использованием метода функций Ляпунова. Представлены результаты моделирования, проведенного с учетом ограничений, влияющих на возможность технической реализации полученного закона управления. Библ. 14, рис. 6.

Ключевые слова: преобразователь частоты, выходной LC-фильтр, нелинейный однофазный трансформатор, сингулярно возмущенная система, метод функций Ляпунова.

T.V. Mysak

Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Peremohy, 56, Kyiv-57, 03057, Ukraine

The formation of the sinusoidal output voltage of the power supply unit with an nonlinear output transformer

The object of study is the sinusoidal voltage source that is composed of a PWM frequency converter with an output LC-filter and single-phase nonlinear output transformer. The mathematical description of nonlinear singularly perturbed system of differential equations for which the reduction has been performed. The nonlinearity is given to the form, which the synthesis control law using the method of Lyapunov functions will perform. The simulation results carried out within the limitations affecting the possibility of technical implementation of the resulting control law are presented. References 14, figures 6.

Key words: frequency converter, output LC-filter, one phase nonlinear transformer, singular perturbed system, Lyapunov functions method.

Надійшла 10.03.2017

Received 10.03.2017