

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

УДК 621.3

DOI: <https://doi.org/10.15407/publishing2020.56.005>ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО ПОЛЯ В РОЗРАХУНКАХ
ПЛОСКОМЕРИДІАННИХ ПОЛІВ ПОБЛИЗУ ПЛОСКОЇ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕРХНІ**В.М. Михайлов***, докт. техн. наук, **М.П. Петренко****Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
вул. Кирпичова, 2, Харків, 61002, Україна,
e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Розглянуто плоскомеридіанні та плоскопаралельні магнітні і електростатичні поля над плоскою границею провідного півпростору. Магнітні поля утворюються провідним кільцем або прямолінійним провідником того ж перетину з високочастотним або імпульсним струмом при різкому поверхневому ефекті, а електростатичні поля – такими ж, але зарядженими провідниками. Кільце та прямолінійний провідник представлено сукупностями елементарних кільцевих струмів, або зарядів та осей зі струмами, або рівномірно заряджених осей. Описано формулювання та розв'язки задач для векторного потенціалу плоскомеридіанного та плоскопаралельного магнітного поля систем «елементарний струм – ідеально надпровідний півпростір». Розраховано струми і заряди, індуковані у провідному півпросторі. Зроблено порівняння розподілів індукції магнітних і напруженості електростатичних полів на граничній поверхні. Запропоновано критерій наближення плоскопаралельного поля при розрахунку магнітних та електростатичних плоскомеридіанних полів поблизу плоскої граничної поверхні та визначено його припустимі значення. Встановлено значення цього критерію, за яких розподіл осьової проекції напруженості електростатичного поля на границі провідного півпростору наближається до розподілу радіальної проекції індукції магнітного поля на границі ідеально надпровідного півпростору. Бібл. 9, рис. 4.

Ключові слова: магнітне поле, різкий поверхневий ефект, електростатичне поле, плоскомеридіанне поле, плоскопаралельне поле, наближення плоскопаралельного поля, критерій наближення.

Вступ. Обґрунтована заміна плоскомеридіанного поля деяких електрофізичних пристроїв плоскопаралельним (плоским) на окремих ділянках розрахункової області (наближення плоскопаралельного поля) суттєво спрощує розрахунки. Таке наближення імпульсного магнітного поля осесиметричної системи одновиткового соленоїду прямокутного або трапецеїдального перетину при різкому поверхневому ефекті дало змогу врахувати крайові ефекти на гострих та округлених крайках соленоїда за допомогою методу конформних відображень [1, 2]. У розглянутих задачах соленоїд мав відносно просту форму, а гранична поверхня поблизу нього була циліндричною. Наближення плоскопаралельного поля для тіл обертання довільної форми над плоскою граничною поверхнею досліджено недостатньо.

Мета роботи – визначення критерію наближення плоскопаралельного поля в розрахунках плоскомеридіанних полів, що утворюються поблизу плоскої граничної поверхні провідників високочастотними, а також імпульсними струмами або зарядами у провідних тілах довільної форми, та області його значень, в якій це наближення припустиме.

Методика порівняння полів і критерій наближення плоскопаралельного поля. Спочатку розглянемо в циліндричних координатах r , ψ , z провідне, довільного меридіанного перетину кільце з високочастотним або імпульсним струмом, розташоване в непровідному і немагнітному півпросторі $z > 0$ над плоскою границею провідного і немагнітного півпростору $z < 0$ (рис. 1, *a*). Під впливом магнітного поля кільця в нижньому півпросторі індуються вихрові струми. Нехай виконуються умови квазістаціонарності, а у провідниках системи, що розглядається, різко проявляється поверхневий ефект і струми протікають у

тонких поверхневих шарах. Тому в подальшому приймаємо допущення ідеального поверхневого ефекту, за яким нижній півпростір вважаємо ідеально надпровідним.

У системі провідників, що розглядається, мають місце ще два ефекти: ефект близькості та кільцевий ефект [3,4]. Внаслідок ефекту близькості струми прагнуть протікати на відносно невеликих ділянках кільця та нижнього півпростору, що знаходяться на мінімальних відстанях. Під дією кільцевого ефекту струми в тілах обертання прагнуть протікати елементарними кільцевими ділянками, що мають мінімальні радіуси [4], чим послаблюють ефект близькості.

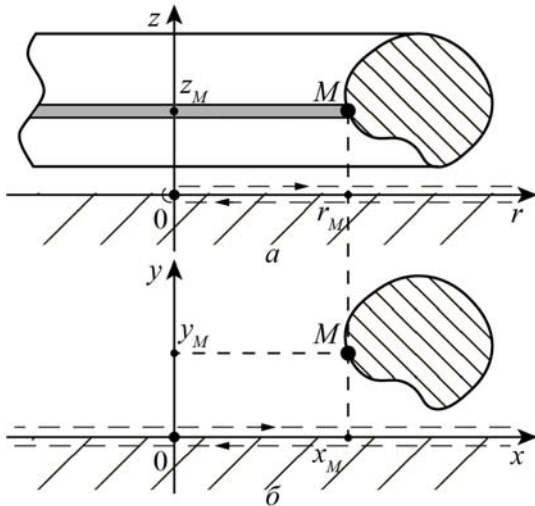


Рис. 1

Порівняємо описане проскомеридіанне магнітне поле поблизу провідного півпростору з відповідним плоскопаралельним полем, котре утворюється прямолінійним провідником необмеженої довжини, перетин якого такий же, як і меридіанний перетин кільця в декартових координатах x, y, z (рис. 1, б). Провідником протікає височастотний або імпульсний струм, мають місце поверхневий ефект і ефект близькості, а також справедливі прийняті допущення. Методика дослідження полягає в порівнянні магнітних полів, що утворюються на плоскій границі півпростору відповідними елементарними струмами кільця та прямолінійного провідника, та визначенні умови, за якої ці поля достатньо близькі. Представляючи кільце і прямолінійний провідник у вигляді сукупностей елементарних струмів,

розповсюджуємо отриману умову і на ці сукупності або на вихідні системи провідників, що розглядаються.

Елементарні струми протікають кільцем і прямолінійним провідником достатньо малих перетинів, що дає змогу замінити їх нескінченно тонким кільцем та віссю зі струмом.

Очевидно, що критерієм наближення плоскопаралельного поля є співвідношення r_M/z_M , $M \in l$ (r_M, z_M – циліндричні координати точки M ; l – контур меридіанного перетину тіла обертання (рис. 1, а)). Можна очікувати, що зі збільшенням r_M/z_M перше із двох полів, що порівнюються, наближується до другого. Однак невідомо які значення має приймати критерій наближення.

Формулювання задач для векторного потенціалу магнітного поля та їх розв'язки. Формулювання задачі для векторного потенціалу магнітного поля $A_\psi(r, z)$ системи кільцевий струм – ідеально надпровідний півпростір в області $z > 0$ (рис. 1, а) містить [5,6] рівняння і граничну умову на поверхні півпростору

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$A_\psi(r, 0) = 0, \quad (2)$$

а також умову на нескінченності, згідно з якою $A_\psi(r, z)$ прямує до нуля. Розв'язок задачі (1), (2) з урахуванням умови на нескінченності отримаємо за допомогою функції Гріна для векторного потенціалу магнітного поля $G_{A_\psi}(r, z)$ [6] ($A_\psi(r, z) = I G_{A_\psi}(r, z)$). Маємо (μ_0 – магнітна стала)

$$A_\psi(r, z) = \mu_0 r_M I \int_0^\infty J_1(kr_M) J_1(kr) \text{sh}(kz) e^{-kz_M} dk, \quad 0 \leq z \leq z_M. \quad (3)$$

Використовуючи (3), визначаємо радіальну проекцію індукції магнітного поля \vec{B} [5] на граничній поверхні півпростору:

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\psi}{\partial z}, \quad (4)$$

$$B_r(r, 0) = -\mu_0 r_M I \int_0^\infty k J_1(k r_M) J_1(k r) e^{-k z_M} dk. \quad (5)$$

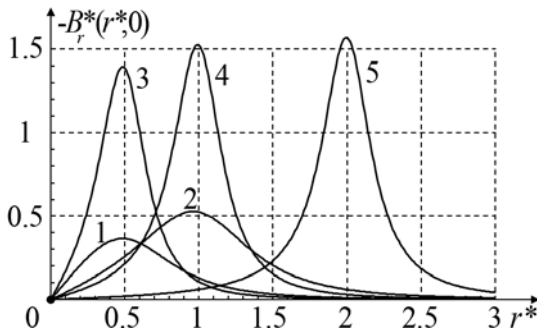


Рис. 2

На рис. 2 показано розподіли $B_r^*(r^*; 0)$, розраховані за формулою (5) для різних значень r_M^* и z_M^* (для кривої 1 $r_M^*=0.5$, $z_M^*=0.5$, $r_M/z_M=1$, 2 – 1.0; 0.5; 2, 3 – 0.5; 0; 2; 2.5, 4 – 1.0; 0.2; 5, 5 – 2.0; 0.2; 10). Величини, позначені зірочками, є безрозмірними: $B^* = B/B_0$, $r^* = r/l_0$, $r_M^* = r_M/l_0$, $z_M^* = z_M/l_0$, l_0 – базисна довжина, $B_0 = \mu_0 I/l_0$. Величина l_0 вибирається довільно, оскільки безрозмірні значення $B_r^*(r^*; 0)$ від неї не залежать. Крім цього, $r_M/z_M = r_M^*/z_M^*$. За малих значень r_M/z_M розподіли асиметричні відносно положення максимуму $r^* \approx r_M^*$ (криві 1 – 3). Зі збільшенням r_M/z_M асиметрія зменшується, а при $r_M/z_M = 10$ вона незначна (криві 4, 5).

Формулювання задачі для модуля векторного потенціалу \vec{A} плоскопаралельного магнітного поля системи осей зі струмом – ідеально надпровідний півпростір в області $y > 0$ (рис. 1, б) складається з рівняння [5] та граничної умови на осі x

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

$$A(x, 0) = 0. \quad (7)$$

Умова на нескінченності така ж, як і для $A_\psi(r, z)$. За допомогою відомого розв'язку задачі продовження плоскопаралельного магнітного поля з осі x [7] знаходимо

$$A(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(x-x_M)^2 + (y+y_M)^2}{(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2}. \quad (8)$$

При $I = 1$ з (8) отримуємо модуль відповідної функції Гріна $\vec{G}_A(x, y)$. Згідно з (8) та структурою векторів \vec{A} і \vec{B} визначаємо індукцію магнітного поля на границі півпростору:

$$B_x(x, 0) = \mu_0 I y_M / \left[\pi \left((x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 \right) \right]. \quad (9)$$

Струм I_i , що індукується в нижньому півпросторі, знаходимо за допомогою закону повного струму в інтегральній формі [3] для контуру, що охоплює вісь r або вісь x (пунктирні лінії на рис. 1, а, б). Враховуючи відсутність поля при $z < 0$ і $y < 0$, для плоскомеридіанного і плоскопаралельного поля маємо

$$I_i = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty B_r(r, 0) dr, \quad (10)$$

$$I_i = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^\infty B_x(x, 0) dx. \quad (11)$$

Після підстановки в (10) формули (5) за допомогою табличних інтегралів [8] отримуємо

$$I_i = - \left[1 - \left(1 + \left(\frac{r_M}{z_M} \right)^2 \right)^{-1/2} \right] I. \quad (12)$$

Підстановка (9) у (11) призводить до результату: $I_i = -I$. Бачимо, що струм I_i у випадку плоскомеридіанного поля залежить від обраного нами критерію наближення: збільшення або зменшення r_M/z_M призводить до таких же змін $|I_i|$, що має фізичний зміст. Якщо в формулі (12) прийняти $r_M/z_M \rightarrow \infty$, то $I_i \rightarrow -I$, що відповідає плоскопаралельному полю та підтверджує

правильність формули (12). Сказане ілюструється кривими рис. 3 (для кривої 1 $z_M^* = 0.05$, 2 – 0.1, 3 – 0.2, 4 – 0.5).

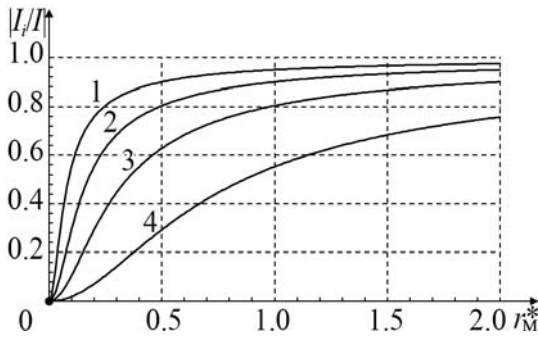


Рис. 3

Розрахункові формули для електростатичного поля над провідним півпростором. Відома електростатична аналогія плоскопаралельного магнітного поля при різкому поверхневому ефекті у провідниках [9]. Тому можна припустити, що наближення, що розглядається, має місце і для електростатичних полів. Водночас вважаємо, що на рис. 1, а зображено заряджене кільце довільного перетину та елементарний кільцевий заряд, а на рис. 1, б – рівномірно заряджені прямолінійний провідник того ж перетину

та вісь. Знайдемо $E_z(r,0)$ і $E_y(x,0)$ – проєкції векторів напруженості електричного поля \vec{E} на границі провідного півпростору. Використовуючи функцію Гріна для потенціалу $\phi(r,z)$ плоскомеридіанного електростатичного поля $G_\phi(r,z)$ [6] ($\phi(r,z) = \tau G_\phi(r,z)$) і співвідношення $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ [3], маємо

$$E_z(r,0) = -\frac{\tau r_M}{\varepsilon} \int_0^\infty k J_0(kr_M) J_0(kr) e^{-kz_M} dk, \tag{13}$$

де τ – лінійна густина електричного заряду, ε – абсолютна діелектрична проникність верхнього півпростору.

У формулах (13) та (3), (5) J_0, J_1 – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку. Потенціал плоскопаралельного електростатичного поля $\phi(x,y)$ та $E_y(x,0)$ відрізняється від $A(x,y)$ та $B_x(x,0)$ (формули (8) і (9)) тільки множником τ/ε замість $\mu_0 I$ (при $\tau = 1$ маємо функцію Гріна $G_\phi(x,y)$). Електричний заряд, що індукується в провідному півпросторі, на одиницю довжини елементарного кільця та осі знаходимо за допомогою постулату Максвелла в інтегральній формі [3]

$$\tau_i = \frac{\varepsilon}{r_M} \int_0^\infty E_z(r,0) r dr, \tag{14}$$

$$\tau_i = \varepsilon \int_{-\infty}^\infty E_y(x,0) dx. \tag{15}$$

Аналітичне інтегрування за формулою (15) призводить до очевидного результату:

$\tau_i = -\tau$. Чисельне інтегрування за формулою (14) з урахування (13) при $r_M/z_M \in [0.5; 20]$ дає такий самий результат з погрешністю не вищою 10^{-4} .

Порівняння розподілів плоскомеридіанних та плоскопаралельних полів. На рис. 4, а показано розподіли $B_r(r,0)$ (криві 1, 3) і $E_z(r,0)$ (криві 2, 4), а на рис. 4, б відносні розбіжності ξ_1 між $B_r(r,0)$ та $B_x(x,0)$ по відношенню до $B_x(x,0)$ (криві 1,3) і ξ_2 між $E_z(r,0)$ і $E_y(x,0)$ по відношенню до $E_y(x,0)$ (криві 2, 4). Для кривих 1, 2 на рис. 4, а, б $r_M/z_M = x_M/y_M = 5, 3, 4 - 10$. Безрозмірні величини $x^* = x/l_0, E^* = E/E_0, E_0 = \tau/(\varepsilon l_0)$. При розрахунках $\xi_{1,2}$ знаки величин, що порівнюються, мають бути однакові (знак можна змінити зміною напрямку струму або знаку заряду). З даних рис. 4, б витікає, що при $r_M/z_M = 10$ розбіжності $\xi_{1,2}$ у середніх ділянках розподілів не перевищують декількох відсотків та дещо збільшуються на краях з відносно малими

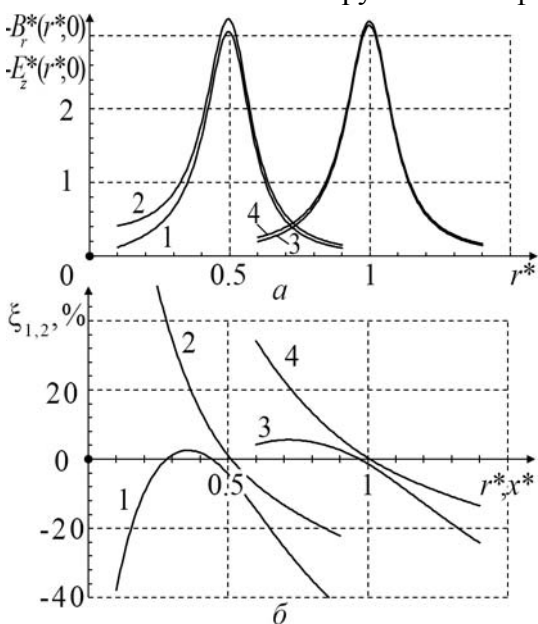


Рис. 4

значеннями функцій, що порівнюються (криві 3, 4). При $r_M/z_M = 5$ розбіжності $\xi_{1,2}$ помітно збільшуються (криві 1, 2).

Отримані результати відображають наближену подібність полів, що порівнюються, та їх математичних описів на певній ділянці розрахункової області. При відносно великих значеннях r_M векторний потенціал $A_\psi(r, z)$ за фізичним смыслом наближається до $A(x, y)$, а граничні умови (2) та (7) однакові. Можна показати, що при відносно великих r поблизу границі провідного півпростору рівняння (1) наближається до рівняння (6), а рівняння для потенціалу $\varphi(r, z)$ – до рівняння відносно $\varphi(x, y)$.

Висновки. 1. Наближення плоскопаралельного поля при розрахунку плоскомеридіанних магнітних та електростатичних полів, що утворюються тілами обертання з високочастотним або імпульсним струмом при різкому поверхневому ефекті або електричними зарядами, припустимо поблизу плоскою поверхні провідників, якщо для усіх точок M контуру l меридіанного перетину тіла виконується умова $r_M/z_M \geq 10$, $M \in l$. При цьому розбіжності між величинами, що порівнюються, на ділянках розподілів під тілом обертання не перевищують декількох відсотків.

2. На плоскій граничній поверхні провідника при $r_M/z_M \geq 5$, $M \in l$ розподіл осової проекції $E_z(r, 0)$ напруженості плоскомеридіанного електростатичного поля, що утворюється зарядженим провідним тілом обертання, наближається до розподілу радіальної проекції $V_r(r, 0)$ плоскомеридіанного магнітного поля тіла обертання, таких же форми та розташування, з високочастотним або імпульсним струмом при різкому поверхневому ефекті.

1. Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат. 1981. 200 с.
2. Михайлов В.М., Мовмыга И.Н. Распределение тока на кромках отверстия соленоида с соосным цилиндром при резком поверхностном эффекте. *Техническая электродинамика*. 1988. № 4. С. 16–19.
3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т2. Л.: Энергоиздат. 1981. 416 с.
4. Бабат Г.И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. М.-Л.: Энергия. 1965. 552 с.
5. Тозони О.В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. Киев: Техніка, 1967. 252 с.
6. Михайлов В.М. Функції Гріна плоскомеридіанних електричних та магнітних полів над плоскою граничною поверхнею. *Технічна электродинамика*. 2018. №4. С. 5–9. DOI: <https://doi.org/10.15407/techmed2018.04.005>
7. Васецкий Ю.М., Власов Д.И., Коновалов О.Я., Михайлов В.М. Некоторые решения задачи продолжения плоского поля в элементарных функциях. Збірник праць конференції SIMULATION 2012. К.: ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України. 2012. С. 212–216.
8. Градштейн И.С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. Cockroft J.D. Skin effect in rectangular conductors at high frequencies. *Proceeding of Royal Society of London*. ser. A. vol. 122. 1929. Pp. 533–542.

УДК 621.3

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОЛЯ В РАСЧЕТАХ ПЛОСКОМЕРИДИАННЫХ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В.М. Михайлов, докт. техн. наук, **Н.П. Петренко**

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Кирпичева, 2, Харьков, 61002, Украина,
e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Рассмотрены плоскомеридианные и плоскопараллельные магнитные и электростатические поля над плоской границей проводящего полупространства. Магнитные поля создаются проводящим кольцом или прямолинейным проводником такого же сечения с высокочастотным или импульсным током при резком поверхностном эффекте, а электростатические поля – такими же, но заряженными проводниками. Кольцо и прямолинейный проводник представлены совокупностями элементарных кольцевых токов, или зарядов и осей с токами, или равномерно заряженных осей. Описаны формулировки и решения задач для векторного

потенциала плоскомеридианного магнитного поля систем «элементарный ток – идеально сверхпроводящее полупространство». Рассчитаны токи и заряды, индуктированные в проводящем полупространстве. Сделано сравнение распределений индукции магнитных и напряженности электростатических полей на граничной поверхности. Предложен критерий приближения плоскопараллельного поля при расчете плоскомеридианных полей и определены его допустимые значения. Установлены значения этого критерия, при которых распределение осевой проекции напряженности электростатического поля на границе проводящего полупространства приближается к распределению радиальной проекции индукции магнитного поля на границе идеально сверхпроводящего полупространства. Библ. 9, рис. 4.

Ключевые слова: магнитное поле, резкий поверхностный эффект, электростатическое поле, плоскопараллельное поле, плоскопараллельное поле, приближение плоскопараллельного поля, критерий приближения.

ABOUT PLANE FIELD APPROXIMATION IN CALCULATIONS OF THE AXISYMMETRIC FIELD NEAR A PLANE BOUNDARY SURFACE

V.M. Mikhailov, M.P. Petrenko

National technical university Kharkiv polytechnic institute,
2, Курпучова Str., Kharkiv, 61002, Ukraine,
e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Axisymmetric and plane magnetic and electrostatic fields over plane boundary of conductive half-space are considered. Conductive ring or straight conductor of the same section with high frequency or pulse current creates magnetic fields. There is sharp skin-effect in conductor. The same, but charged, conductors create electrostatic field. The ring and straight conductor are represented by assemblages of elementary current-carrying or charged rings and axes. Formulation of axisymmetric and plane magnetic field vector potential problems for elementary currents over perfectly superconductive half-space and its solutions are described. Currents and charges inducted in conductive half-space are calculated. The comparison of magnetic field induction and electrostatic field strength distributions on boundary surface is made. The criterion of plane field approximation for calculation of axisymmetric magnetic and electrostatic fields is proposed and its allowable values are defined. It's established that for some values of this criterion the axisymmetric electrostatic field strength distribution of boundary of conductive half-space approach to the axisymmetric magnetic field induction distribution on boundary of perfectly superconductive half-space. References 9, figures 4.

Keywords: magnetic field, sharp skin-effect, electrostatic field, axisymmetric field, plane field, plane field approximation, criterion of plane field approximation.

1. Shneerson G.A. Fields and transients in ultra high current equipment. Leningrad: Energoizdat. 1981. 200 p. (Rus)
2. Mikhaylov V.M., Movmyga I.N. Current distribution at the edges of the hole of a solenoid with a coaxial cylinder with a sharp surface effect. *Tekhnicheskaya elektrodinamika*. 1988. No4. Pp. 16–19. (Rus)
3. Neyman L.R., Demirchyan K.S. Theoretical foundations of electrical engineering. Leningrad: Energoizdat. 1981. Vol. 2. 416 p. (Rus)
4. Babat G.I. Induction heating of metals and its industrial application. Moskva, Leningrad.: Energiya. 1965. 552 p. (Rus)
5. Tozoni O.V. Calculation of electromagnetic fields on computers. Kiev: Tekhnika, 1967. 252 p.
6. Mikhaylov V.M. Green's functions of axisymmetric electric and magnetic fields above flat boundary surface. *Tekhnichna Elektrodinamika*. 2018. No4. Pp. 5–9. (Ukr) DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.005>
7. Vasetskiy Yu.M., Vlasov D.I., Kononov O.Ya., Mikhaylov V.M. Some solutions to the problem of continuation of a plane field in elementary functions. *Zbirnyk prats konferentcii. SIMULATION* 2012. K.: Instytut problem modeliuвання v enerhetytsi im. H.Ye. Pukhova NAN Ukrainy. 2012. Pp. 212–216. (Rus)
8. Gradshteyn I.S. Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. Moskva: Nauka. 1971. 1108 p. (Rus)
9. Cockroft J.D. Skin effect in rectangular conductors at high frequencies. *Proceeding of Royal Society of London*. ser. A. 1929. vol. 122. Pp. 533–542. (Eng)

Надійшла: 28.02.2020

Received: 28.02.2020