

УДК 51-74:536.2

©2015. В. Н. Ткаченко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Предложена и исследована возможность использования метода наименьших квадратов для идентификации распределенных во времени параметров лучистого и конвективного теплообмена в граничных условиях третьего рода задачи теплопроводности. Разработано 2 метода: аппроксимация полиномом n -ой степени и использование сплайнов для аппроксимации функций с множеством локальных экстремумов. Устойчивость решения будет обеспечивать минимизация квадратичного функционала невязки, а для сплайн-аппроксимации также условия сопряжения в узлах сплайнов. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: идентификация, метод наименьших квадратов, сплайн-аппроксимация.

1. Нужны более простые методы идентификации распределенных параметров. Постановка задачи.

Для построения более точной математической модели теплофизического процесса необходимо некоторые параметры модели считать распределенными по координате либо во времени. Рассматривается обратная задача идентификации распределенных во времени параметров конвективного и лучистого теплообмена в граничных условиях третьего рода задачи теплопроводности [1, 2]. К настоящему времени наиболее популярным методом решения некорректных задач такого класса является метод регуляризации Тихонова [3]. Недостатком метода регуляризации является большой объем вычислений, связанный с процедурой поиска нужного значения параметра регуляризации, а также с овражностью регуляризирующего функционала. Другой существенный недостаток метода связан с самой идеей регуляризации: сглаживания в пределах погрешности измерений. Чем больше погрешность, тем можно получить более гладкую кривую, но при этом возрастает опасность получения хотя и более плавной кривой, но все более отклоняющейся от истинной [1, 6].

Предлагаются методы использующие идею МНК. Минимизация квадратичного функционала невязки уравнения третьего граничного условия, содержащего искомый параметр, повышает устойчивость к ошибкам во входных данных.

Предложенные методы идентификации представляют собой аппроксимацию функции параметра полиномом невысокой степени или сплайнами. Таким образом, задача сводится к нахождению неизвестных коэффициентов аппроксимирующих полиномов. Основная цель такой аппроксимации – получить устойчивое, достаточно точное представление функции искомого параметра, произведя небольшое количество вычислительных процедур по сравнению, например, с методом регуляризации.

Аппроксимация функции полиномом n -ой степени может быть проведена благодаря замене производной по координате в граничном условии конечной разностью и некоторым матричным преобразованиям над исходными данными задачи. Степень аппроксимирующих полиномов может быть подобрана на основании технологического, теплового и газодинамического анализа характера условия идентифицируемого технологического процесса, а также с учетом принципа невязки [3].

Второй предложенный метод – аппроксимация функции параметра отрезками полиномов невысокой степени. Такое представление искомой функции позволяет учесть все возможные локальные экстремумы функции параметра на рассматриваемом промежутке времени. Используя кубические сплайны, требуется выполнение условий сопряжения в узлах, а именно: непрерывность функции и первых двух ее производных во всех внутренних точках. В таком случае нет разрывов и резких перегибов функции.

Сама идея сплайн-аппроксимации не снимает проблему неустойчивости решения, т.е. отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных. Поэтому на каждом отрезке будет минимизироваться квадратичный функционал невязки. Количество измерений на одном отрезке времени значительно превышает количество неизвестных коэффициентов полинома на этом отрезке и выполнение условий сопряжения в узлах повышает устойчивость к ошибкам во входных данных. Следует заметить, что такая постановка является задачей на условный экстремум, которая в ходе решения сводится к задаче на безусловный экстремум с помощью использования метода неопределенных множителей Лагранжа (Lagrange).

2. Идентификация параметра конвективного теплообмена в граничных условиях третьего рода задачи теплопроводности.

Математическая модель процесса нагрева одномерного тела выглядит следующим образом

$$\frac{\partial T(\tau, x)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(\tau, x)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

с граничными условиями третьего рода

$$\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1(\tau) [T_{gr}(\tau) - T(\tau, 0)], \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_2(\tau) [T_{gr}(\tau) - T(\tau, l)], \quad (3)$$

и начальным условием

$$T(0, x) = t_0(x), \quad (4)$$

где $T(\tau, x)$ – температура тела, $^{\circ}\text{C}$, $T_{gr}(\tau)$ – температура греющей среды, $^{\circ}\text{C}$, a – коэффициент теплопроводности, $\text{м}^2/\text{с}$, λ – коэффициент теплопроводности среды, $\text{Вт}/\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}$, $\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$ – параметры конвективной теплоотдачи сверху и снизу, $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$, l – толщина тела, м .

Известна температура тела на границе с внешней средой в r моментах времени [3,4]:

$$T(\tau_k, 0) = f_k, \quad k = \overline{1, r}. \quad (5)$$

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\alpha_1(\tau) = \alpha_2(\tau) = \alpha(\tau)$.

Задача состоит в нахождении $\alpha = \alpha(\tau)$ как функции, зависящей от времени. Предполагая функцию $\alpha(\tau)$ непрерывной, с целью аппроксимации искомой функции воспользуемся полиномом n -ой степени

$$\alpha(\tau) = a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_n \cdot \tau^n, \quad (6)$$

степень полинома будет определяться по принципу невязки, с учетом априорной информации.

Задача моделирования сводится к идентификации неизвестных коэффициентов полиномов a_0, a_1, \dots, a_n .

Решив задачу Дирихле (Dirichlet) (1)–(5), получим поле температур $T(\tau_i, x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии. Для решения задачи Дирихле (Dirichlet) используем метод конечно-разностной аппроксимации.

В области $0 \leq x \leq l, 0 \leq \tau \leq \tilde{\tau}$ введем равномерную сетку ω_{ij} , т.е. будем рассматривать температуру в узлах сетки $T(i\Delta\tau, j\Delta x)$, где $\Delta x = \frac{l}{N}, j = \overline{0, N}, i = \overline{0, \tilde{\tau}}, \Delta\tau$ и Δx длина шага по времени и по пространственной координате соответственно, N – количество точек по толщине тела.

Применив явную конечно-разностную схему аппроксимации, получим представление уравнения теплопроводности в виде: $T_{i+1,j} = c_1 T_{i,j-1} + (1 - 2c_1) T_{i,j} + c_1 T_{i,j+1}$, где $c_1 = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$. Условие устойчивости явной схемы связывает шаги сетки следующим соотношением $c_1 \leq \frac{1}{2}$.

Расчет задачи Дирихле (определение температур во внутренних узлах сетки) позволяет рассчитать тепловой поток на поверхности тела [4]. Теперь в граничном условии $\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(\tau)[T_{gr}(\tau) - T(\tau, 0)]$ неизвестным является только функция конвективного теплообмена $\alpha(\tau)$.

Имеем систему уравнений, образованную граничными условиями в r моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T(\tau_k, x_1) - T(\tau_k, x_0)) = \alpha_k [T_{gr} - T(\tau_k, x_0)], \quad (7)$$

где α_k – значение полинома в момент времени k и $\alpha_k = a_0 + a_1 \cdot k \cdot \Delta\tau + \dots + a_n \cdot k^n \Delta\tau^n$, $k = \overline{1, r}, r \gg n$.

Или в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 (T_{gr} - T(\tau_1, x_0)) \\ \alpha_2 (T_{gr} - T(\tau_2, x_0)) \\ \vdots \\ \alpha_r (T_{gr} - T(\tau_r, x_0)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_1, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T_{gr} - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \\ + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix} = \\ = a_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \\ + \dots + a_n \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix}, \quad P = \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_1, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T_{gr} - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}.$$

P_k и H_k – k -тые элементы столбцов, A_{kk}^i – k -й элемент главной диагонали матрицы A^i . Тогда уравнение (8) в матричной форме будет иметь вид

$$P = \tilde{\alpha}H. \quad (9)$$

Для нахождения коэффициентов аппроксимирующего полинома методом МНК введем меру отклонения в виде суммы квадратов разности измеренных температур от расчетных по модели (1)–(5).

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^r (P_k - \alpha_k H)^2, \quad (10)$$

Используя введенные обозначения параметр $\alpha(\tau)$ можно записать как $\alpha(\tau) = a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n$, тогда квадратичный функционал будет иметь вид

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sum_{k=1}^r (P_k - \alpha_k H)^2 = (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H)^T (P - \\ &- (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H) = \\ &= P^T P - 2 \sum_{k=0}^n a_k H^T A^k P + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j H^T A^{i+j} H. \end{aligned}$$

Задача сводится к нахождению параметров полинома, которые бы минимизировали функционал $S(\alpha)$. Воспользуемся необходимым условием минимума. Пусть, например, минимум достигается при $\alpha' = \alpha(\tau')$. Тогда в этой точке должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial S(\alpha')}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (11)$$

Вычислим векторы первых производных суммы квадратов отклонений по компонентам a_0, a_1, \dots, a_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_i} &= \frac{\partial [(P - \alpha H)^T (P - \alpha H)]}{\partial a_i} = \\ &= 2a_0 H^T A^i H + 2a_1 H^T A^{i+1} H + \dots + 2a_n H^T A^{i+n} H - 2H^T A^i P = 0. \end{aligned}$$

Получили систему из $n + 1$ линейных алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i H^T A^i H = H^T A^0 P, \\ \sum_{i=0}^n a_i H^T A^{i+1} H = H^T A^1 P, \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n a_i H^T A^{i+n} H = H^T A^n P. \end{cases} \quad (12)$$

Из структуры строк матрицы этой системы видна их линейная независимость, следовательно, детерминант не обращается в ноль и решение системы единственное.

Из системы (12) получаем вектор неизвестных компонент параметра $\alpha(\tau)$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T A^0 H & H^T A^1 H & \dots & H^T A^n H \\ H^T A^1 H & H^T A^2 H & \dots & H^T A^{n+1} H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H^T A^n H & H^T A^{n+1} H & \dots & H^T A^{2n} H \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H^T A^0 P \\ H^T A^1 P \\ \vdots \\ H^T A^n P \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Проверим достаточное условие минимума.

Для того чтобы убедиться, что уравнения (11) определяют минимум, достаточно убедиться, что матрица вторых производных минимизируемого функционала матрица Гессе (Hesse) полуположительно определена. Для функционала среднеквадратичного отклонения матрица Гессе (Hesse) равна

$$G = \begin{pmatrix} H^T A^0 H & H^T A^1 H & \dots & H^T A^n H \\ H^T A^1 H & H^T A^2 H & \dots & H^T A^{n+1} H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H^T A^n H & H^T A^{n+1} H & \dots & H^T A^{2n} H \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для главных миноров этой матрицы введем такие обозначения:

G_1 -минор размерностью 1×1 , G_2 -минор размерностью 2×2 , G_i -минор размерностью $i \times i$.

Рассмотрим матрицу G : эта матрица не зависит от a_0, a_1, \dots, a_n , симметрична и все ее элементы положительны, каждый из них является суммой r слагаемых. Например,

$$H^T A^0 H = \sum_{k=1}^r H_k^2 A_{kk}^0, \quad H^T A^1 H = \sum_{k=1}^r H_k^2 A_{kk}^1, \quad H^T A^i H = \sum_{k=1}^r H_k^2 A_{kk}^i.$$

Заметим, что матрица G представима в виде произведения двух матриц, размерностями $n + 1 \times r$ и $r \times n + 1$. Причем эти матрицы будут транспонированными по отношению друг к другу.

Т.е. матрицу (14) можно записать в таком виде

$$G = \begin{pmatrix} H_1 A_{11}^0 & H_2 A_{22}^0 & \dots & H_r A_{rr}^0 \\ H_1 A_{11}^1 & H_2 A_{22}^1 & \dots & H_r A_{rr}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1 A_{11}^n & H_2 A_{22}^n & \dots & H_r A_{rr}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_1 A_{11}^0 & H_1 A_{11}^1 & \dots & H_1 A_{11}^n \\ H_2 A_{22}^0 & H_2 A_{22}^1 & \dots & H_2 A_{22}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_r A_{rr}^0 & H_r A_{rr}^1 & \dots & H_r A_{rr}^n \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Обозначим матрицы-множители как $Q(n+1 \times r)$ и соответственно $Q^T(r \times n+1)$.

Заметим, что любой из главных миноров $G_i (i = \overline{1, n+1})$ является произведением первых i строк матрицы Q и первых i столбцов матрицы Q^T .

Пусть первые i строк матрицы Q составляют матрицу Q_i размерностью $i \times r$, а первые i столбцов матрицы Q^T составляют матрицу Q_i^T , размерностью $r \times i$.

Тогда детерминант G_i равен сумме квадратов детерминантов всех $i \times i$ матриц, которые можно составить из столбцов матрицы Q_i . Т.е. $\det G_i = \sum_{k=1}^{C_r^i} (\det D_k)^2$, где $D_k - i \times i$ матрицы полученные всеми возможными сочетаниями из r столбцов по $i, k = \overline{1, C_r^i}, i = \overline{1, n+1}$. Из сказанного выше следует, что $\det G_i > 0, \forall i = \overline{1, n+1}$.

По критерию Сильвестра (Sylvester) для положительно определенных матриц, из того, что все главные миноры матрицы Гессе (Hesse) положительны, получаем положительную определенность матрицы G . Таким образом показали, что условия (11) определяют глобальный минимум функционала $S(\alpha)$.

Подставив найденные значения a_0, a_1, \dots, a_n (13) в уравнение (6) получаем полином, аппроксимирующий искомую функцию параметра конвективного теплообмена.

Необходимо заметить, что выбор слишком высокой степени полинома может привести к переносу ошибок измерения в решение [6]. Так, например, взяв полином степени, значение которой сравнимо с количеством измерений, получим фактически решение прямым обращением задачи (1)–(5), что выявляет всю неустойчивость поставленной задачи. Таким образом, следуя цели получить устойчивое решение, выбирать необходимо из полиномов невысоких степеней, учитывая априорную информацию о поведении функции, а также принцип невязки.

3. Идентификация распределенного параметра в нелинейных граничных условиях задачи теплопроводности.

Рассмотрим задачу нахождения распределенного во времени параметра лучистого теплообмена $\sigma(\tau)$ ($\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{с}^4$) в граничном условии третьего рода

$$\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma_1(\tau) [T_{gr}^4(\tau) - T(\tau, 0)], \quad (16)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=1} = \sigma_2(\tau) [T_{gr}^4(\tau) - T(\tau, l)], \quad (17)$$

модели теплового процесса (1), (4), (5).

Для простоты предполагаем $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma(\tau)$.

Задача состоит в нахождении $\sigma = \sigma(\tau)$ как функции, зависящей от времени. Для аппроксимации данной функции воспользуемся полиномом n -ой степени.

$$\sigma(\tau) = a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_n \cdot \tau^n, \quad (18)$$

Степень полинома будет определяться по принципу невязки, с учетом априорной информации. Задача сводится к нахождению коэффициентов аппроксимирующего полинома.

Схема (7) для случая аппроксимации параметра лучистого теплообмена принимает следующий вид

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T(\tau_k, x_1) - T(\tau_k, x_0)) = \sigma_k [T_{gr}^4 - T(\tau_k, x_0)],$$

где это значение полинома в момент времени k и $\sigma_k = \sigma_0 + \sigma_1 \cdot k \cdot \Delta\tau + \dots + \sigma_n \cdot k^n \cdot \Delta\tau^n$, $k = \overline{1, r}$, $r \gg n$.

Уравнение (9) записывается следующим образом

$$P = \tilde{\sigma} H, \quad (19)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} T_{gr}^4 - T^4(\tau_1, x_0) \\ T_{gr}^4 - T^4(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T_{gr}^4 - T^4(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}.$$

Используя введенные обозначения составляем квадратичный функционал невязки уравнения (19)

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^r (P_k - \sigma_k)^2. \quad (20)$$

Произведем некоторые преобразования для $S(\sigma)$

$$\begin{aligned} S(\sigma) &= \sum_{k=1}^r (P_k - \sigma_k)^2 = (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H)^T (P - \\ &- (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H) = \\ &= P^T P - 2 \sum_{k=0}^n a_k H^T A^k P + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j H^T A^{i+j} H. \end{aligned}$$

Дальнейшие действия минимизации квадратичного функционала полностью совпадают с вышеприведенными для случая конвективной теплоотдачи. Т.о. используя новое введенное значение столбца H , можем воспользоваться соотношением (13) для нахождения коэффициентов аппроксимирующего полинома (18).

4. Применение метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации неизвестного параметра.

Воспользуемся моделью процесса нагрева одномерного тела описанной уравнениями (1)–(5).

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\alpha_1(\tau) = \alpha_2(\tau) = F(\tau)$.

Временная область $0 \leq \tau \leq \tilde{\tau}$ разбивается на m равных отрезков, на каждом из которых содержится $z \gg 4$ измерений температуры тела на границе с внешней средой. Задача идентификации параметра теплообмена на поверхности тела состоит в нахождении функции $F(\tau)$, которая образована m кубическими полиномами

$$R_k(\tau) = A_k + B_k(\tau - \tau_{(k-1)z}) + C_k(\tau - \tau_{(k-1)z})^2 + D_k(\tau - \tau_{(k-1)z})^3, \quad k = \overline{1, m}. \quad (21)$$

Коэффициенты полиномов будем искать путем минимизации квадратичного функционала невязки уравнения (2), при выполнении условий сопряжения в узлах сплайна:

непрерывность функции $F(\tau)$

$$R_k(\tau_{kz}) = R_{k+1}(\tau_{kz}), \quad (22)$$

непрерывность ее производной

$$R'_k(\tau_{kz}) = R'_{k+1}(\tau_{kz}), \quad (23)$$

непрерывность второй производной

$$R''_k(\tau_{kz}) = R''_{k+1}(\tau_{kz}). \quad (24)$$

Таким образом, сформулированная задача (1)–(5), (20)–(24) является задачей нахождения условного экстремума квадратичного функционала невязки S с условиями (22)–(24). Минимизировать функционал необходимо по всем измерениям для всех отрезков сплайнов, составляющих искомую функцию. При этом желательно, чтобы количество измерений на каждом из отрезков превышало количество неизвестных коэффициентов сплайна на этом отрезке. Путем применения метода неопределенных множителей Лагранжа (Lagrange) задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум.

Решив задачу Дирихле (Dirichlet) (1)–(5), получим температуры $T(\tau_i, x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии. Для решения задачи Дирихле используем конечно-разностную схему.

Имеем систему уравнений граничных условий в $r = m z$ моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T(\tau_{(k-1)z+i}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+i}, x_0)) = R_k(\tau_{(k-1)z+i}) [T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+i}, x_0)]. \quad (25)$$

Или в матричной форме

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_{(k-1)z+1}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T(\tau_{(k-1)z+2}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ \vdots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} R_k(\tau_{(k-1)z+1}) \cdot (T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0)) \\ R_k(\tau_{(k-1)z+2}) \cdot (T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0)) \\ \vdots \\ R_k(\tau_{kz}) \cdot (T_{gr} - T(\tau_{kz}, x_0)) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} R_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_k(\tau_{(k-1)z+2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_k(\tau_{kz}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ \vdots \\ T_{gr} - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме [5]

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_k(\tau_{(k-1)z+2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_k(\tau_{kz}) \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \\ & + B_k \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z\Delta\tau \end{pmatrix} + C_k \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^2\Delta\tau^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^2\Delta\tau^2 \end{pmatrix} + \\ & + D_k \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^2\Delta\tau^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^3\Delta\tau^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_{(k-1)z+1}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T(\tau_{(k-1)z+2}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ \vdots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix}, \\ U^d &= \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^2\Delta\tau^d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^d\Delta\tau^d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{R}_k = \begin{pmatrix} R_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_k(\tau_{(k-1)z+2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_k(\tau_{kz}) \end{pmatrix},$$

$$H_k = \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ \vdots \\ T_{gr} - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix},$$

$P_{k,i}$ и $H_{k,i}$ — i -тые элементы столбцов, P_k и H_k , $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, z}$, $d = \overline{0, 3}$. Тогда уравнение (25) в матричной форме будет иметь вид

$$P_k = \widetilde{R}_k H_k. \quad (26)$$

Введем квадратичный функционал оценивающий невязку уравнения (26)

$$S = \sum_{k=1}^r \sum_{i=(k-1)z+1}^{zk} (P_{k,i-(k-1)z} - R_k(\tau_i) H_{k,i-(k-1)z})^2.$$

Используя введенные обозначения параметр \widetilde{R}_k можно записать как

$$\widetilde{R}_k = A_k U^0 + B_k U^1 + C_k U^2 + D_k U^3.$$

Тогда квадратичный функционал S будет иметь вид

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^m (P_k - \widetilde{R}_k H_k)^T (P_k - \widetilde{R}_k H_k) = \\ &= \sum_{k=1}^m (P_k - (A_k U^0 + B_k U^1 + C_k U^2 + D_k U^3) H_k)^T (P_k - \\ &- (A_k U^0 + B_k U^1 + C_k U^2 + D_k U^3) H_k). \end{aligned}$$

Для получения неизвестных коэффициентов сплайнов, необходимо найти условный экстремум функционала S относительно $3(m-1)$ условий (22)–(24). Для сведения задачи к поиску безусловного экстремума воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим условия сопряжения в узлах сплайнов. Продифференцировав 2 раза функцию R_k и подставив соответствующие выражения в (22)–(24) получим следующие условия:

$$\begin{cases} A_v + tB_v + t^2C_v + t^3D_v - A_{v+1} = 0, & v = \overline{1, m-1}; \\ B_v + 2tC_v + 3t^2D_v - B_{v+1} = 0, & v = \overline{m, 2(m-1)}; \\ C_v - C_{v+1} + 3tD_v = 0, & v = \overline{2m-1, 3(m-1)}. \end{cases} \quad (27)$$

Где $t = z\Delta$, Δ промежуток времени между измерениями температуры на поверхности тела.

Левые части равенств системы (27) обозначим функциями φ_v , $v = \overline{1, 3(m-1)}$.

Составим функцию Лагранжа в виде линейной комбинации функции S и функций φ_v , взятыми с коэффициентами, называемыми множителями Лагранжа λ_v

$$L = S + \sum_{v=1}^{3(m-1)} \lambda_v \varphi_v. \quad (28)$$

Решением будут являться те значения неизвестных коэффициентов сплайнов, в которых функция Лагранжа достигает своего минимума. Для минимизации функции Лагранжа воспользуемся необходимым условием существования экстремума. Составим систему из $4m + 3(m-1)$ уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа L по неизвестным $A_k, B_k, C_k, D_k, \lambda_v$, $k = \overline{1, m}$, $v = \overline{1, 3(m-1)}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial A_k} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial B_k} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial C_k} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial D_k} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_v} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Вычислим векторы первых производных функции L по неизвестным компонентам векторов $A_k, B_k, C_k, D_k, \lambda_v$ и приравняем их к нулю:

первая производная по A_k

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\sum_{v=1}^{3(m-1)} \lambda_v \varphi_v + \sum_{k=1}^m (P_k - \widetilde{R}_k H_k)^T (P_k - \widetilde{R}_k H_k) \right]}{\partial A_k} = 2A_k H_k^T U^0 H_k + \quad (30) \\ & + 2B_k H_k^T U^1 H_k + 2C_k H_k^T U^2 H_k + 2D_k H_k^T U^3 H_k - 2H_k^T U^0 P_k + \\ & + \begin{cases} \lambda_k, & k = 1, \\ -\lambda_{k-1}, & 1 < k < m, \\ -\lambda_{k-1}, & k = m; \end{cases} = 0, \end{aligned}$$

первая производная по B_k

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\sum_{v=1}^{3(m-1)} \lambda_v \varphi_v + \sum_{k=1}^m (P_k - \widetilde{R}_k H_k)^T (P_k - \widetilde{R}_k H_k) \right]}{\partial B_k} = 2A_k H_k^T U^1 H_k + \quad (31) \\ & + 2B_k H_k^T U^2 H_k + 2C_k H_k^T U^3 H_k + 2D_k H_k^T U^4 H_k - 2H_k^T U^1 P_k + \\ & + \begin{cases} t\lambda_k + \lambda_m, & k = 1, \\ t\lambda_k + \lambda_{m+k-2} + \lambda_{m+k-1}, & 1 < k < m, \\ -\lambda_{2k-2}, & k = m; \end{cases} = 0, \end{aligned}$$

первая производная по C_k

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\sum_{v=1}^{3(m-1)} \lambda_v \varphi_v + \sum_{k=1}^m (P_k - \widetilde{R}_k H_k)^T (P_k - \widetilde{R}_k H_k) \right]}{\partial C_k} = 2A_k H_k^T U^2 H_k + \quad (32) \\ & + 2B_k H_k^T U^3 H_k + 2C_k H_k^T U^4 H_k + 2D_k H_k^T U^5 H_k - 2H_k^T U^2 P_k + \\ & + \begin{cases} t^2 \lambda_k + 2t \lambda_m + \lambda_{2m-1}, & k = 1, \\ t^2 \lambda_k + 2t \lambda_{m+k-1} - \lambda_{2m+k-2}, & 1 < k < m, \\ -\lambda_{3(k-1)}, & k = m; \end{cases} = 0, \end{aligned}$$

первая производная по D_k

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\sum_{v=1}^{3(m-1)} \lambda_v \varphi_v + \sum_{k=1}^m (P_k - \widetilde{R}_k H_k)^T (P_k - \widetilde{R}_k H_k) \right]}{\partial D_k} = 2A_k H_k^T U^3 H_k + \quad (33) \\ & + 2B_k H_k^T U^4 H_k + 2C_k H_k^T U^5 H_k + 2D_k H_k^T U^6 H_k - 2H_k^T U^3 P_k + \\ & + \begin{cases} t^3 \lambda_k + 3t^2 \lambda_m + 3t \lambda_{2m-1}, & k = 1, \\ t^3 \lambda_k + 3t^2 \lambda_{m+k-1} + 3t \lambda_{2m+k-2}, & 1 < k < m, \\ 0, & k = m; \end{cases} = 0. \end{aligned}$$

Производными функции по неизвестным λ_v являются функции условий сопряжения в узлах сплайнов

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_v} = \varphi_v. \quad (34)$$

Получили систему из $4m + 3(m - 1)$ линейных алгебраических уравнений (30)–(34) с $4m + 3(m - 1)$ неизвестными. Матрица K системы (30)–(34) симметрична относительно главной диагонали и представима в виде блочной матрицы

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^T & K_3 \end{pmatrix}.$$

K_1 — это блочно-диагональная матрица размерности $4m \times 4m$, где на главной диагонали располагаются квадратные матрицы 4×4 вида \widetilde{K} . K_2 — это матрица размерностью $4m \times 3(m - 1)$, а K_3 нулевая $3(m - 1) \times 3(m - 1)$ матрица.

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} 2H_k^T U^0 H_k & 2H_k^T U^1 H_k & 2H_k^T U^2 H_k & 2H_k^T U^3 H_k \\ 2H_k^T U^1 H_k & 2H_k^T U^2 H_k & 2H_k^T U^3 H_k & 2H_k^T U^4 H_k \\ 2H_k^T U^2 H_k & 2H_k^T U^3 H_k & 2H_k^T U^4 H_k & 2H_k^T U^5 H_k \\ 2H_k^T U^3 H_k & 2H_k^T U^4 H_k & 2H_k^T U^5 H_k & 2H_k^T U^6 H_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Решив матричное уравнение, получаем вектор неизвестных коэффициентов сплай-

нов составляющих функцию $F(\tau)$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ \vdots \\ A_m \\ B_m \\ C_m \\ D_m \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{3m-1} \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} H_1^T U^0 P_1 \\ H_1^T U^1 P_1 \\ H_1^T U^2 P_1 \\ H_1^T U^3 P_1 \\ H_2^T U^0 P_1 \\ H_2^T U^1 P_1 \\ H_2^T U^2 P_1 \\ H_2^T U^3 P_1 \\ \vdots \\ H_m^T U^0 P_1 \\ H_m^T U^1 P_1 \\ H_m^T U^2 P_1 \\ H_m^T U^3 P_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Подставив найденные значения A_k, B_k, C_k, D_k в уравнение (20) получили m кубических полиномов, составляющих сплайн аппроксимирующий функцию неизвестного параметра.

5. Вычислительный эксперимент.

Предложенные методы и алгоритмы нахождения функции неизвестного параметра для всех рассмотренных задач идентификации были программно реализованы на языке C++ в среде C++Builder.

С целью проверки правильности полученных соотношений и для демонстрации работоспособности метода был проведен ряд вычислительных экспериментов. Для задачи идентификации (1)–(6) была подобрана тестовая функция $\alpha(\tau)$

$$\alpha(\tau) = 30 \cdot \cos(1.35 \cdot \tau) \exp(0.5 \cdot \tau) + 60 \cdot \tau \sin(1.35 \cdot \tau) \exp(0.5 \cdot \tau).$$

На рассматриваемом промежутке времени ($0 \leq \tau \leq 2$) нагрева тела данная функция параметра конвективного теплообмена имеет один экстремум и две точки перегиба. Для тестовой $\alpha(\tau)$ были использованы расчетные температуры на поверхности тела, которые будем считать входными данными или измерениями температуры поверхности нагреваемого тела.

С помощью соотношений (12) были получены аппроксимирующие полиномы от 0-ой до 4-ой степеней. На рис. 1 изображены тестовая функция и 5 полученных аппроксимирующих полиномов. Тестовая функция изображена сплошной серой линией. Как видно, начиная с четвертой степени полученные полиномы полностью повторяют искомую функцию.

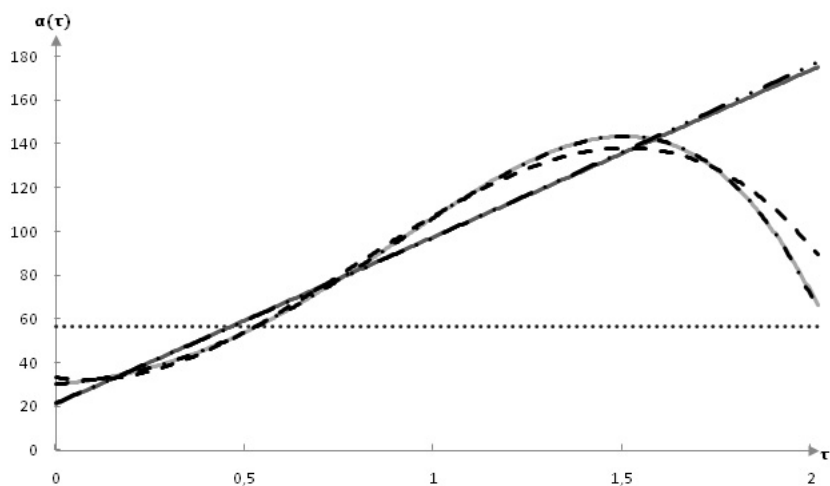


Рис. 1. Полученные аппроксимирующие полиномы и тестовая функция, τ -время, ч. $\alpha(\tau)$ -функция параметра конвективного теплообмена, $Вт/м^2 \cdot ^\circ C$

Все расчеты величины среднеквадратических отклонений коэффициентов теплообмена $СКО\alpha$ и температур $СКО_T$, характеризующей погрешность приведены в таблице 1 при погрешности измерений в диапазоне $\xi \in [-10^0 C, 10^0 C]$ и $СКО_{\xi} = 5.96^0 C$.

Таблица 1. Величины среднеквадратических отклонений коэффициентов теплообмена $СКО\alpha$ и температур $СКО_T$.

$\xi \in [-10^0 C, 10^0 C],$ $\xi_k = 5.96^0 C$	Степень апр. полинома для $\alpha(\tau)$	0	1	2	3	4
	$СКО\alpha, Вт/(м^2 \cdot ^\circ C)$	25,7	33,9	6,6	9,6	2,2
	$СКО_T, ^\circ C$	60,4	26,5	5,3	4,5	1,8

Аналогичным образом рассмотрен случай с погрешностью измерений на границе тела $\xi \in [-20; 20], E(\xi) = 0$ (таб. 2).

Таблица 2. Величины среднеквадратических отклонений коэффициентов теплообмена $СКО\alpha$ и температур $СКО_T$.

$\xi \in [-20^0 C, 20^0 C],$ $\xi_k = 11.91^0 C$	Степень апр. полинома для $\alpha(\tau)$	0	1	2	3	4
	$СКО\alpha, Вт/(м^2 \cdot ^\circ C)$	26,1	31,7	8,3	12,8	7,5
	$СКО_T, ^\circ C$	62,7	28,6	9,1	7,2	7,2

Идентификацию функции параметра лучистого теплообмена для задачи (1), (4), (5), (16), (17), (18) проведем используя в качестве тестовой функцию $\sigma(\tau)$

$$10^8 \cdot \sigma(\tau) = -3.019 \cdot \tau^4 + 11.959 \cdot \tau^3 - 14.332 \cdot \tau^2 + 5.779 \cdot \tau + 2.$$

Насчитав температуры на поверхности тела, будем считать их измерениями в реальном процессе. Воспользовавшись предложенным соотношением (13) для случая лучистого теплообмена получаем коэффициенты аппроксимирующего полинома (18). Полученные полиномы от 0-ой до 4-ой степеней и тестовая функция изображены разными серыми и штриховыми линиями на рис. 2. Тестовая функция изображена сплошной серой линией. Как видно, начиная с четвертой степени полученные полиномы полностью повторяют искомую функцию.

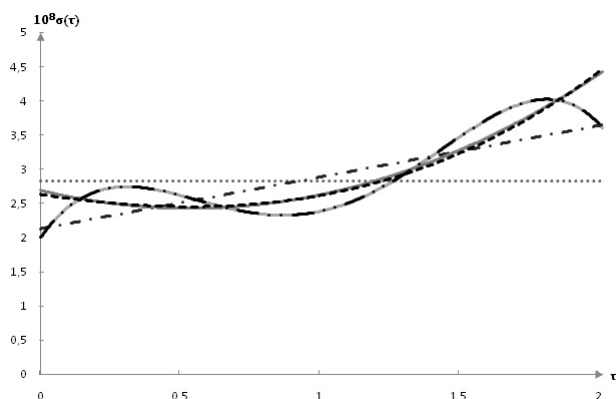


Рис. 2. Полученные аппроксимирующие полиномы и тестовая функция для идентификации функции параметра лучистого теплообмена

Расчет СКО найденных решений радиационного коэффициента $\sigma(\tau)$ и СКО измеренных температур от расчетных при погрешности измерений $\varepsilon_\xi = 5.96^0 C$ приведены в таблице 3.

Таблица 3. Величины среднеквадратических отклонений коэффициентов радиационного теплообмена $СКО_\alpha$ и температур $СКО_T$.

$\xi \in [-10^0 C, 10^0 C],$ $\xi_k = 5.96^0 C$	Степень аппр. полинома для $\alpha(\tau)$	0	1	2	3	4
	$СКО_\alpha, Вт/(м^2 K^4)$	0,63	0,43	0,14	0,08	0,07
	$СКО_T, ^0C$	46,40	23,71	21,42	21,01	21,01

Решим задачу идентификации параметра конвективного теплообмена модели процесса нагрева одномерного тела описанной уравнениями (1)–(5), (20). Тестовая функция подобрана используя априорную информацию, функция на рассматриваемом промежутке времени имеет 3 экстремума.

$$\sigma(\tau) = -224,94 \cdot \tau^4 + 914,52 \cdot \tau^3 - 1165,2 \cdot \tau^2 + 501,81 \cdot \tau + 30.$$

Временную область разбили на 5 равных отрезков, т.о. задача идентификации сводится к нахождению 20 неизвестных коэффициентов кубических полиномов.

Используя выражение (35) получаем численные значения $A_k, B_k, C_k, D_k, k = \overline{1,5}$. Подставив эти значения в выражение (20) имеем решение задачи изображенное на рис. 3. Тестовая функция изображена сплошной серой линией. При условии отсутствия ошибок измерений совпадение траекторий практически идеальное и абсолютная погрешность не превышает 0,1.

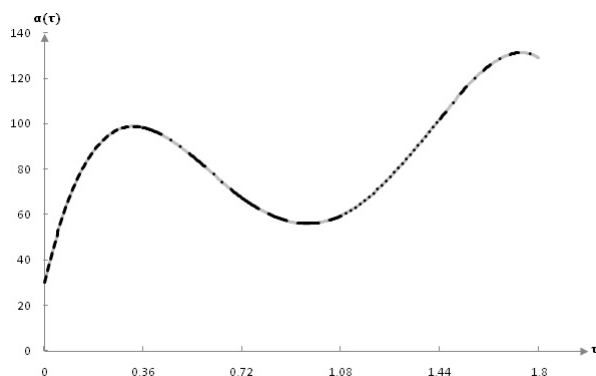


Рис. 3. Результаты идентификации неизвестных коэффициентов кубических полиномов на 5-ти отрезках

Выводы

В статье предложено использовать идею метода наименьших квадратов для идентификации распределенных параметров лучистого и конвективного теплообмена в граничных условиях третьего рода задачи теплопроводности. Разработан аналитический аппарат поиска минимума в общем виде для полинома n -ой степени, основанный на необходимых условиях экстремума квадратичного функционала невязки. Необходимые условия дают нормальную систему линейных алгебраических уравнений, размерность которой зависит от степени аппроксимирующего полинома, либо от свойств и числа аппроксимирующих сплайнов. Размерность получаемых алгебраических систем будет вполне приемлема для решения современными средствами вычислительной техники для широкого класса задач идентификации тепловых процессов в металлургии и энергетике. Для нелинейных граничных условий необходимые условия также дают линейную систему, если искомые параметры входят линейно, в противном случае необходимо решать нелинейную систему [7]. Необходимо также заметить, что трудность решения линейной системы практически не зависит от объема измеренной информации.

На основе ряд вычислительных экспериментов можно сделать вывод об эффек-

тивности предложенных методов идентификации распределенных параметров как по точности решения, так по объему затрачиваемых вычислительных ресурсов.

1. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. – К.: Наукова думка, 2003.
2. *Алифанов О.М.* О методах решения некорректных обратных задач // ИФЖ. – 1983. – Т. 45, № 5. – С. 742-752.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974.
4. *Бэж Дэс., Блакуэлл Б., Ч.Сент-Клэр мл.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966.
6. *Ткаченко В.Н.* Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. – Сер. "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". – Том 13. – К.: Наукова думка, 2008. – 243 с.
7. *Ткаченко В.Н., Тубольцева О.В.* Идентификация параметров нелинейной модели химического реактора // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – Вип. 25. – 2012. – С. 235-242.

V. Tkachenko

Identification of the distribution of the parameters of the external heat transfer based on the method of least squares.

The possibility of using the least squares method for the identification of distributed parameter in time radiant and convective heat transfer in the boundary conditions of the third kind of heat conduction problem is proposed and investigated. Two methods are developed: a polynomial approximation of the n -th degree and spline approximation for functions with many local extremes. Minimization of the quadratic residual functional and spline approximation and coupling conditions at the sites of splines will ensure stability of the solution.

The results of numerical calculations are presented.

Keywords: *identification, least squares method, spline.*

В. М. Ткаченко

Ідентифікація розподілених параметрів зовнішнього теплообміну на основі методу найменших квадратів.

Запропонована і досліджена можливість використання методу найменших квадратів для ідентифікації розподілених у часі параметрів променистого і конвективного теплообміну в граничних умовах третього роду задачі теплопроводності. Розроблено 2 методи: апроксимація поліномом n -го ступеня і використання сплайнів для апроксимації функцій з безліччю локальних екстремумів. Стійкість рішення буде забезпечувати мінімізація квадратичного функціонала нев'язки, а для сплайн-апроксимації також умови сполучення у вузлах сплайнів. Наведено результати чисельних розрахунків.

Ключові слова: *ідентифікація, метод найменших квадратів, сплайн-апроксимація.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
valeryi_dop@mail.ru

Получено 19.10.15