УДК 517.929

©2015. **Д. Я. Хусаинов, Й. Диблик, Я. Баштинец, А. С. Сиренко**

УСТОЙЧИВОСТЬ, НЕРАВНОМЕРНАЯ ПО ЗАПАЗДЫВАНИЮ, ОДНОЙ СЛАБОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается система дифференциальных уравнений с асимптотически устойчивой диагональной частью и нелинейностью, представляющей сумму нелинейных функций одного аргумента, удовлетворяющих условиям Липшица. Система имеет положение равновесия в первом квадранте. Исследование устойчивости положения равновесия проводится с использованием метода функций Ляпунова. Функция Ляпунова строится в виде суммы квадратов фазовых переменных. Получены конструктивные условия устойчивости. Рассматриваются системы с запаздыванием. Получены достаточные условия устойчивости, зависящие от величины запаздывания.

Ключевые слова: *нелинейные системы, устойчивость, положение равновесия, метод функций Ляпунова, системы с запаздыванием, условие Б.С. Разумихина.*

1. Система на плоскости без запаздывания.

Рассматривается следующая модель, описываемая системой двух нелинейных дифференциальных уравнений.

$$\dot{y}_1(t) = -a_{11}y_1(t) + f_{11}(y_1(t)) + f_{12}(y_2(t)) + b_1,$$
$$\dot{y}_2(t) = -a_{22}y_2(t) + f_{21}(y_1(t)) + f_{22}(y_2(t)) + b_2. \tag{1.1}$$

Здесь $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ постоянные, функции $f_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1,2}$ удовлетворяют условию Липшица, т.е.

$$|f_{ij}(y + \Delta y) - f_{ij}(y)| \le L_{ij}|\Delta|, i, j = \overline{1,2}.$$

Предположим, что система уравнений

$$-a_{11}y_1 + f_{11}(y_1) + f_{12}(y_2) + b_1 = 0,$$
$$-a_{22}y_2 + f_{21}(y_1) + f_{22}(y_2) + b_2 = 0. \tag{1.2}$$

имеет решением точку $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$. Произведем замену

$$y_1(t) = x_1(t) + y_1^0, y_2(t) = x_2(t) + y_2^0.$$

После подстановки в систему (1.1) получаем

$$\dot{x}_1(t) = -a_{11}\left(x_1(t) + y_1^0\right) + f_{11}\left(x_1(t) + y_1^0\right) + f_{12}\left(x_2(t) + y_2^0\right) + b_1,$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_{22}\left(x_2(t) + y_2^0\right) + f_{21}\left(x_1(t) + y_1^o\right) + f_{22}\left(x_2(t) + y_2^0\right) + b_2.$$

The second and the third authors has been supported by the Grant FEKT-S-14-2200 of Faculty of Electrical Engineering and Communication, Brno University of Technology.

Перепишем полученную систему в виде

$$\dot{x}_1(t) = -a_{11}x_1(t) + f_{11}\left(x_1(t) + y_1^0\right) - f_{11}\left(y_1^0\right) + f_{12}\left(x_2(t) + y_2^0\right) - f_{12}\left(y_2^0\right),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_{22}x_2(t) + f_{21}\left(x_1(t) + y_1^o\right) - f_{21}\left(y_1^0\right) + f_{22}\left(x_2(t) + y_2^0\right) - f_{22}\left(y_2^0\right).$$

Обозначим

$$F_{11}(x_1(t)) = f_{11}\left(x_1(t) + y_1^0\right) - f_{11}\left(y_1^0\right), F_{12}(x_2(t)) = f_{12}\left(x_2(t) + y_2^0\right) - f_{12}\left(y_2^0\right),$$

$$F_{21}(x_1(t)) = f_{21}\left(x_1(t) + y_1^o\right) - f_{21}\left(y_1^0\right), F_{22}(x_2(t)) = f_{22}\left(x_2(t) + y_2^0\right) - f_{22}\left(y_2^0\right).$$

Тогда система примет вид

$$\dot{x}_1(t) = -a_{11}x_1(t) + F_{11}(x_1(t)) + F_{12}(x_2(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_{22}x_2(t) + F_{21}(x_1(t)) + F_{22}(x_2(t)). \tag{1.3}$$

После этой замены исследование устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ системы (1.1) свелось к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (1.3). Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

Теорема 1.1. *Пусть система уравнений* (1.2) *имеет решение* $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$ *и существуют* $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, *при которых выполняются неравенства*

$$2a_{11} > 2L_{11} + L_{12} + L_{21}\frac{h_{22}}{h_{11}}, 2a_{22} > 2L_{22} + L_{21} + L_{12}\frac{h_{11}}{h_{22}}. \tag{1.4}$$

Тогда положение равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ *является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Для исследования устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ воспользуемся функцией Ляпунова квадратичного вида

$$V(x_1, x_2) = h_{11}x_1^2 + h_{22}x_2^2.$$

Ее полная производная в силу системы (1.3) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) = -2\left[a_{11}h_{11}x_1^2(t) + a_{22}h_{22}x_2^2(t)\right] +$$

$$+2h_{11}x_1(t)\left[F_{11}(x_1(t)) + F_{22}(x_2(t))\right] + 2h_{22}x_2(t)\left[F_{21}(x_1(t)) + F_{22}(x_2(t))\right].$$

Используя условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \le -2\left[a_{11}h_{11}x_1^2(t) + a_{22}h_{22}x_2^2(t)\right] +$$

$$+2h_{11}x_1(t)\left\{L_{11}|x_1(t)| + L_{12}|x_2(t)|\right\} + 2h_{22}x_2(t)\left\{L_{21}|x_1(t)| + L_{22}|x_2(t)|\right\}.$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)\le -2\left\{\left(a_{11}-L_{11}\right)h_{11}x_1^2\left(t\right)-\right.$$

$$\left.-\left(L_{12}h_{11}x_1\left(t\right)\left|x_2\left(t\right)\right|+L_{21}h_{22}\left|x_1\left(t\right)\right|x_2\left(t\right)\right)+\left(a_{22}-L_{22}\right)h_{22}x_2^2\left(t\right)\right\}.$$

Используя неравенство

$$2AB\le\left(A^2+B^2\right),$$

получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)\le -\left[2\left(a_{11}-L_{11}\right)h_{11}-L_{12}h_{11}-L_{21}h_{22}\right]x_1^2\left(t\right)-$$

$$-\left[2\left(a_{22}-L_{22}\right)h_{22}-L_{12}h_{11}-L_{21}h_{22}\right]x_2^2\left(t\right).$$

И условие отрицательной определенности функции Ляпунова, т.е. условие асимптотической устойчивости положения равновесия имеет вид (1.4). □

Замечание 1.1. Учитывая однородность неравенства (1.4) и положительность величин h_{11}, h_{22}, условия асимптотической устойчивости можно переписать в виде

$$2a_{11}-2L_{11}-L_{12}>0, 2a_{22}-2L_{22}-L_{21}>0.$$

Действительно, перепишем неравенства (1.4) в виде

$$\frac{h_{11}}{h_{22}}>\frac{L_{21}}{2a_{11}-2L_{11}-L_{12}},\frac{2a_{22}-2L_{22}-L_{21}}{L_{12}}>\frac{h_{11}}{h_{22}}.$$

Если будут выполнены неравенства

$$\frac{2a_{22}-2L_{22}-L_{21}}{L_{12}}>\frac{L_{21}}{2a_{11}-2L_{11}-L_{12}},$$

то величины h_{11}, h_{22} будем выбирать из условия

$$\frac{2a_{22}-2L_{22}-L_{21}}{L_{12}}>\frac{h_{11}}{h_{22}}>\frac{L_{21}}{2a_{11}-2L_{11}-L_{12}}$$

Если будет выполняться

$$\frac{2a_{22}-2L_{22}-L_{21}}{L_{12}}<\frac{L_{21}}{2a_{11}-2L_{11}-L_{12}},$$

то величины h_{11}, h_{22} будем выбирать из условия

$$\frac{2a_{22}-2L_{22}-L_{21}}{L_{12}}<\frac{h_{22}}{h_{11}}<\frac{L_{21}}{2a_{11}-2L_{11}-L_{12}}.$$

Получим условия устойчивости, основанные на ином подходе к оценке квадратичных форм.

Теорема 1.2. *Пусть система* (1.2) *имеет решение* $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$ *и существуют постоянные* $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, *при которых выполняются условия*

$$\left(a_{11} - L_{11}\right) h_{11} > 0, 4\left(a_{11} - L_{11}\right)\left(a_{22} - L_{22}\right) h_{11} h_{22} - \left(L_{12} h_{11} + L_{21} h_{22}\right)^2 > 0. \quad (1.5)$$

Тогда положение равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ *является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Для исследования устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ воспользуемся функцией Ляпунова квадратичного вида

$$V\left(x_1, x_2\right) = h_{11} x_1^2 + h_{22} x_2^2.$$

Ее полная производная в силу системы (1.3) имеет вид

$$\frac{d}{dt} V\left(x_1(t), x_2(t)\right) = -2\left[a_{11} h_{11} x_1^2(t) + a_{22} h_{22} x_2^2(t)\right] +$$

$$+2 h_{11} x_1(t)\left\{F_{11}\left(x_1(t)\right) + F_{12}\left(x_2(t)\right)\right\} + 2 h_{22} x_2(t)\left\{F_{21}\left(x_1(t)\right) + F_{22}\left(x_2(t)\right)\right\}.$$

Используя условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt} V\left(x_1(t), x_2(t)\right) \leq -2\left[a_{11} h_{11} x_1^2(t) + a_{22} h_{22} x_2^2(t)\right] +$$

$$+2 h_{11} x_1(t)\left\{L_{11}\left|x_1(t)\right| + L_{12}\left|x_2(t)\right|\right\} + 2 h_{22} x_2(t)\left\{L_{21}\left|x_1(t)\right| + L_{22}\left|x_2(t)\right|\right\}.$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{d}{dt} V\left(x_1(t), x_2(t)\right) \leq -2\left[\left(a_{11} - L_{11}\right) h_{11} x_1^2(t) - \left(L_{12} h_{11} + L_{21} h_{22}\right)\left|x_1(t)\right|\left|x_2(t)\right| +\right.$$

$$\left. + \left(a_{22} - L_{22}\right) h_{22} x_2^2(t)\right]$$

Как следует из критерия Сильвестра [3], условием отрицательной определенности полной производной является выполнение неравенств

$$\left(a_{11} - L_{11}\right) h_{11} > 0, \left(a_{11} - L_{11}\right)\left(a_{22} - L_{22}\right) h_{11} h_{22} - \frac{1}{4}\left(L_{12} h_{11} + L_{21} h_{22}\right)^2 > 0,$$

т.е. получаем условия (1.5). □

Замечание 1.2. Второе из неравенств (1.5), обеспечивающее асимптотическую устойчивость положения равновесия, можно уточнить и переписать в виде

$$\left(a_{11} - L_{11}\right)\left(a_{22} - L_{22}\right) - L_{12} L_{21} > 0.$$

Действительно, второе неравенство является однородным по элементам $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$. Разделив его на $h_{22} > 0$, получим

$$g(h) = (a_{11} - L_{11})(a_{22} - L_{22})h - \frac{1}{4}(L_{12}h + L_{21})^2 > 0, \quad h = \frac{h_{11}}{h_{22}} > 0.$$

Взяв производную по переменной $h > 0$ функции $g(h)$, получим

$$g'(h) = (a_{11} - L_{11})(a_{22} - L_{22}) - \frac{1}{2}(L_{12}h + L_{21})L_{12}.$$

Экстремум функции $g(h)$ будет выполняться при

$$h = h_0 = \frac{2(a_{11} - L_{11})(a_{22} - L_{22}) - L_{12}L_{21}}{L_{12}^2}.$$

Таким образом, если $g(h_0) > 0$, то положение равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ будет асимптотически устойчивым. Подставив полученное значение h_0 в функцию $g(h)$, получим условие замечания.

2. Система на плоскости с запаздыванием.

В этом разделе будем рассматривать системы со слабой нелинейностью с запаздыванием. Условия устойчивости будут зависеть от величины запаздывания. Рассмотрим систему с запаздыванием на плоскости

$$\dot{y}_1(t) = -a_{11}y_1(t) + f_{11}(y_1(t - \tau_{11})) + f_{12}(y_2(t - \tau_{12})) + b_1.$$

$$\dot{y}_2(t) = -a_{22}y_2(t) + f_{21}(y_1(t - \tau_{21})) + f_{22}(y_2(t - \tau_{22})) + b_2. \tag{2.1}$$

Считаем, что $\tau_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, а функции $f_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1, 2}$ удовлетворяют условию Липшица. Произведем замену $y_1(t) = x_1(t) + y_1^0$, $y_2(t) = x_2(t) + y_2^0$. Система (2.1) сведется к системе

$$\dot{x}_1(t) = -a_{11}x_1(t) + F_{11}(x_1(t - \tau_{11})) + F_{12}(x_2(t - \tau_{12})),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_{22}x_2(t) + F_{21}(x_1(t - \tau_{21})) + F_{22}(x_2(t - \tau_{22})), \tag{2.2}$$

где

$$F_{11}(x_1(t - \tau_{11})) = f_{11}\left(x_1(t - \tau_{11}) + y_1^0\right) - f_{11}\left(y_1^0\right),$$

$$F_{12}(x_2(t - \tau_{12})) = f_{12}\left(x_2(t - \tau_{12}) + y_2^0\right) - f_{12}\left(y_2^0\right),$$

$$F_{21}(x_1(t - \tau_{21})) = f_{21}(x_1(t - \tau_{21}) + y_1^o) - f_{21}\left(y_1^0\right),$$

$$F_{22}(x_2(t - \tau_{22})) = f_{22}\left(x_2(t - \tau_{22}) + y_2^0\right) - f_{22}\left(y_2^0\right).$$

И исследование устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ системы (2.1) сведется к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы

(2.2). Исследование будем также проводить методом функций Ляпунова квадратичного вида $V(x_1,x_2) = h_1x_1^2 + h_2x_2^2$. Обозначим поверхность уровня функции Ляпунова $V(x_1,x_2) = \alpha$ и область, которую она содержит, через

$$V^\alpha = \{(x_1,x_2) : V(x_1,x_2) < \alpha\}, \partial V^\alpha = \{(x_1,x_2) : V(x_1,x_2) = \alpha\}.$$

$$h_{\min} = \min\{h_{11},h_{22}\}, h_{\max} = \max\{h_{11},h_{22}\}, \varphi(h) = h_{\max}/h_{\min}.$$

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Пусть при* $s = t$ *решение* $(x_1(t), x_2(t))$ *системы* (2.2) *находится на поверхности уровня функции Ляпунова, а при* $t - 2\tau \le s < t$ *внутри ее, т.е.* $(x_1(t), x_2(t)) \in \partial V^\alpha$*, а при* $t - 2\tau \le s < t$*:* $(x_1(s), x_2(s)) \in V^\alpha$*. Тогда справедливы неравенства*

$$|x_1(t) - x_1(t-\tau)| \le [|a_{11}| + L_{11} + L_{12}] \sqrt{\varphi(h)}\tau \|x(t)\|.$$

$$|x_2(t) - x_2(t-\tau)| \le [|a_{22}| + L_{21} + L_{22}] \sqrt{\varphi(h)}\tau \|x(t)\|, \|x(t)\| = \left\{x_1^2(t) + x_2^2(t)\right\}^{1/2}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Как следует из условий леммы 2,1, и вида функции Ляпунова, справедливы неравенства

$$h_{\min}\left[x_1^2(s) + x_2^2(s)\right] \le h_1x_1^2(s) + h_2x_2^2(s) = V(x_1(s), x_2(s)) <$$

$$< V(x_1(t), x_2(t)) = h_1x_1^2(t) + h_2x_2^2(t) \le h_{\max}\left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right].$$

Поэтому, при $s < t$ будет, выполняться

$$|x_1(s)| \le \sqrt{\varphi(h)}\left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right]^{1/2}, |x_2(s)| \le \sqrt{\varphi(h)}\left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right]^{1/2}. \tag{2.4}$$

Перепишем первое из уравнений (2.2) в интегральном виде

$$x_1(t) = x_1(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} [-a_{11}x_1(s) + F_{11}(x_1(s-\tau_{11})) + F_{12}(x_2(s-\tau_{12}))]\,ds.$$

Используя ограничения, накладываемые на функции $F_{11}(x_1)$, $F_{12}(x_2)$, получаем следующее соотношение

$$|x_1(t) - x_1(t-\tau)| \le \int_{t-\tau}^{t} [|a_{11}|\,|x_1(s)| + L_{11}\,|x_1(s-\tau_{11})| + L_{12}\,|x_2(s-\tau_{12})|]\,ds.$$

Учитывая предположения леммы 2.1. о нахождении в момент t решения $(x_1(t), x_2(t))$ на поверхности ∂V^α, а при $t - 2\tau \le s < t$ внутри, и, исходя из (2.4), получаем следующее неравенство

$$|x_1(t) - x_1(t-\tau)| \le \int_{t-\tau}^{t} [|a_{11}|\,|x_1(s)| + L_{11}\,|x_1(s-\tau_{11})| + L_{12}\,|x_2(s-\tau_{12})|]\,ds \le$$

$$\leq [|a_{11}| + L_{11} + L_{12}] \sqrt{\varphi(h)}\tau \left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right]^{1/2}.$$

Для второго уравнения аналогично имеем

$$|x_2(t) - x_2(t-\tau)| \leq \int_{t-\tau}^{t} [|a_{22}| |x_2(s)| + L_{21} |x_1(s-\tau_{12})| + L_{22} |x_2(s-\tau_{22})|] \, ds \leq$$

$$\leq [|a_{22}| + L_{21} + L_{22}] \sqrt{\varphi(h)}\tau \left[x_1^2(t) + x_2^2(t)\right]^{1/2}.$$

Таким образом, получаем утверждение (2.3) леммы 2.1. □

Введем следующие обозначения $\tau_0 = \min\limits_{i,j=1,2} \{\tau_{ij}\}$, $\tau_i = \min\limits_{i=1,2} \{\tau_{ij}\}$, $N_i = [\tau_i/\tau_0]+1$, $i = 1,2$, $[\bullet]$ — функция целой части числа. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть при* $-\tau_i \leq t \leq 0$, $i = 1,2$ *для решений* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *системы* (2.3) *выполняется* $|x_1(t)| < \delta_0$, $|x_2(t)| < \delta_0$. *Тогда при* $0 \leq t \leq N_i\tau_0$, $i = 1,2$ *будет справедливым*

$$|x_1(t)| \leq \delta_1^{N_1}, \delta_{N_1}^1 = [1 + (L_{11} + L_{12})\tau]^{N_1} \delta_0 e^{N_1|a_{11}|\tau}, N_1 = [\tau_1/\tau_0] + 1,$$

$$|x_2(t)| \leq \delta_{N_2}^2, \delta_{N_2}^2 = [1 + (L_{21} + L_{22})\tau]^{N_2} \delta_0 e^{N_2|a_{22}|\tau_0}, N_2 = [\tau_2/\tau_0] + 1. \qquad (2.5)$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы в интегральном виде

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t [-a_{11}x_1(s) + F_{11}(x_1(s-\tau_{11})) + F_{12}(x_2(s-\tau_{12}))] \, ds.$$

Отсюда получаем следующее соотношение

$$|x_1(t)| < \delta_0 + \int_0^t [|a_{11}| |x_1(s)| + |F_{11}(x_1(s-\tau_{11}))| + |F_{12}(x_2(s-\tau_{12}))|] \, ds \leq$$

$$\leq \delta_0 + \int_0^t |a_{11}| |x_1(s)| \, ds + L_{11} \int_0^t |x_1(s-\tau_{11})| \, ds + L_{12} \int_0^t |x_2(s-\tau_{12})| \, ds.$$

Для промежутка $0 \leq t \leq \tau_0$ получаем

$$|x_1(t)| \leq \delta_0 + |a_{11}| \int_0^t |x_1(s)| \, ds + (L_{11} + L_{12}) \delta_0 \tau_0 =$$

$$= [1 + (L_{11} + L_{12})\tau_0] \delta_0 + |a_{11}| \int_0^t |x_1(s)| \, ds.$$

Используя неравенство Гроноула–Беллмана, для промежутка $0 \leq t \leq \tau_0$ получаем неравенство

$$|x_1(t)| \leq [1 + (L_{11} + L_{12})\tau] \delta_0 e^{|a_{11}|\tau_0}.$$

Обозначив

$$\delta_1^1 = [1 + (L_{11} + L_{12})\tau] \delta_0 e^{|a_{11}|\tau_0},$$

получим
$$|x_1(t)| \le \delta_1^1, 0 \le t \le \tau_0.$$

Рассмотрим следующий промежуток $\tau_0 \le t \le 2\tau_0$. Для него аналогично получим неравенство

$$|x_1(t)| \le \delta_1^2, \tau_0 \le t \le 2\tau_0, \delta_2^2 = [1 + (L_{11} + L_{12})\tau]\, \delta_1^1 e^{|a_{11}|\tau_0} =$$
$$= [1 + (L_{11} + L_{12})\tau]^2 \delta_0 e^{2|a_{11}|\tau_0}.$$

Проделав процедуру N_1 раз, получим

$$|x_1(t)| \le \delta_1^{N_1}, \delta_{N_1}^1 = [1 + (L_{11} + L_{12})\tau]^{N_1} \delta_0 e^{N_1|a_{11}|\tau}.$$

Для второго уравнения получаем соотношение

$$|x_2(t)| < \delta_0 + \int_0^t [|a_{22}|\, |x_2(s)| + |F_{21}(x_1(s - \tau_{21}))| + |F_{22}(x_2(s - \tau_{22}))|]\, ds \le$$
$$\le \delta_0 + \int_0^t |a_{22}|\, |x_2(s)|\, ds + L_{21}\int_0^t |x_1(s - \tau_{21})|\, ds + L_{22}\int_0^\tau |x_2(s - \tau_{22})|\, ds.$$

Для промежутка $0 \le t \le \tau_0$ получаем

$$|x_2(t)| \le \delta_0 + |a_{22}| \int_0^t |x_2(s)|\, ds + (L_{21} + L_{22})\,\delta\tau =$$
$$= [1 + (L_{21} + L_{22})\tau_0]\,\delta_0 + |a_{22}| \int_0^t |x_2(s)|\, ds.$$

Используя неравенство Гронуола–Беллмана, получаем

$$|x_2(t)| \le \delta_2^2, \tau_0 \le t \le 2\tau_0, \delta_2^2 = [1 + (L_{21} + L_{22})\tau]\, \delta_1^2 e^{|a_{22}|\tau_0} =$$
$$= [1 + (L_{21} + L_{22})\tau]^2 \delta_0 e^{2|a_{22}|\tau_0}.$$

Повторяя процесс дальше, будем иметь

$$|x_2(t)| \le \delta_{N_2}^2, 0 \le t \le N_2\tau_0, \delta_{N_2}^2 = [1 + (L_{21} + L_{22})\tau]^{N_2} \delta_0 e^{N_2|a_{22}|\tau_0}.$$

Таким образом, получаем утверждение (2.5). Обозначим

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2h_{11}(a_{11} - L_{11}) & -h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} \\ -h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} & 2h_{22}(a_{22} - L_{22}) \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

□

Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

Теорема 2.1. *Пусть существуют постоянные $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, при которых матрица C_0 (2.6) является положительно определенной. Тогда при $\tau < \tau_0$,*

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\sqrt{(h_{11}K_1)^2 + (h_{22}K_2)^2} \times \sqrt{\varphi(h)}} \tag{2.7}$$

положение равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0\right)$ является асимптотически устойчивым. Причем для произвольного решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы с запаздыванием (2.2) при $t > 0$, будет выполняться $|x(t)| < \varepsilon$, лишь только

$$|x_1(t)| < \frac{1}{\sqrt{\varphi(h)}}\left[1 + (L_{11} + L_{12})\tau\right]^{-N_1} \delta_0 e^{-N_1|a_{11}|\tau},$$

$$|x_2(t)| < \frac{1}{\sqrt{\varphi(h)}}\left[1 + (L_{21} + L_{22})\tau\right]^{-N_2} \delta_0 e^{-N_2|a_{22}|\tau_0}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Как следует из неравенств (2.5) леммы 2.1, если для решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (2.2) выполняется $|x_1(t)| < \delta_0$, $|x_2(t)| < \delta_0$, то при $0 \le t \le \tau_i$, $i = 1, 2$ будет справедливым

$$|x_1(t)| < \left[1 + (L_{11} + L_{12})\tau\right]^{N_1} \delta_0 e^{N_1|a_{11}|\tau}, |x_2(t)| < \left[1 + (L_{21} + L_{22})\tau\right]^{N_2} \delta_0 e^{N_2|a_{22}|\tau_0}.$$

Поэтому, для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{e^{-N_1|a_{11}|\tau}}{\left[1 + (L_{11} + L_{12})\tau\right]^{N_1}}, \frac{e^{-N_2|a_{22}|\tau}}{\left[1 + (L_{21} + L_{22})\tau\right]^{N_2}}\right\} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(h)}}.$$

Отсюда следует следующее. Если $|x_1(t)| < \delta_0$ $|x_2(t)| < \delta_0$, $-\tau_0 \le s \le 0$ то при $0 \le s \le \tau_i$, $i = 1, 2$ решение $(x_1(s), x_2(s))$ системы (2.2) находится внутри области, ограниченной поверхностью уровня функции Ляпунова т.е. $(x_1(s), x_2(s)) \in V^{\alpha}$, $\alpha = \varepsilon/\varphi(h)$. Покажем, что это сохранится и при $s > \tau_i$, $i = 1, 2$.

Пусть, от противного, решение $(x_1(t), x_2(t))$ вышло на границу поверхности уровня, т.е. $(x_1(t), x_2(t)) \in \partial V^{\alpha}$. Тогда будут справедливыми неравенства (2.3) леммы 2.1.

Вычислим полную производную квадратичной функции $V(x_1, x_2)$ в силу системы без запаздывания. Имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) = 2h_{11}x_1(t)\left\{-a_{11}x_1(t) + F_{11}(x_1(t)) + F(x_2(t))\right\} +$$

$$+2h_{22}x_2(t)\left\{-a_{22}x_2(t) + F_{21}(x_1(t)) + F_{22}(x_2(t))\right\}.$$

Используя условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \le -2\left[h_{11}a_{11}x_1^2(t) + h_{22}a_{22}x_2^2(t)\right] +$$

$$+2h_{11}\left|x_1(t)\right|\left\{L_{11}\left|x_1(t)\right|+L_{12}\left|x_2(t)\right|\right\}+2h_{22}\left|x_2(t)\right|\left\{L_{21}\left|x_1(t)\right|+L_{22}\left|x_2(t)\right|\right\}=$$

$$=-\left(\left|x_1(t)\right|,\left|x_2(t)\right|\right)\left[\begin{array}{cc} 2h_{11}\left(a_{11}-L_{11}\right) & -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} \\ -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} & 2h_{22}\left(a_{22}-L_{22}\right)\end{array}\right]\left(\begin{array}{c}\left|x_1(t)\right| \\ \left|x_2(t)\right|\end{array}\right).$$

Поскольку, по условию теоремы, матрица

$$C_2=\left[\begin{array}{cc} 2h_{11}\left(a_{11}-L_{11}\right) & -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} \\ -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} & 2h_{22}\left(a_{22}-L_{22}\right)\end{array}\right]$$

является положительно определенной, то

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)\le-\lambda_{\min}\left(C_2\right)\left\|x(t)\right\|^2,\ \left\|x(t)\right\|^2=x_1^2(t)+x_2^2(t).$$

Таким образом, нулевое решение системы без запаздывания асимптотически устойчиво. И, в силу непрерывности, асимптотическая устойчивость сохранится и при достаточно малых запаздываниях $\tau_{ij},\ i,j=1,2$. Для получения условий устойчивости нулевого решения системы с запаздыванием вычислим полную производную функции Ляпунова $V\left(x_1,x_2\right)$ в силу системы с запаздыванием (2.2). Она имеет вид

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)=2h_{11}x_1(t)\left\{-a_{11}x_1(t)+F_{11}\left(x_1\left(t-\tau_{11}\right)\right)+F_{12}\left(x_2\left(t-\tau_{12}\right)\right)\right\}+$$

$$+2h_{22}x_2(t)\left\{-a_{22}x_2(t)+F_{21}\left(x_1\left(t-\tau_{21}\right)\right)+F_{22}\left(x_2\left(t-\tau_{22}\right)\right)\right\}.$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)=2h_{11}x_1(t)\left\{-a_{11}x_1(t)+F_{11}\left(x_1(t)\right)+F_{12}\left(x_2(t)\right)\right\}+$$

$$+2h_{22}x_2(t)\left\{-a_{22}x_2(t)+F_{21}\left(x_1(t)\right)+F_{22}\left(x_2(t)\right)\right\}+$$

$$+2h_{11}x_1(t)\left[F_{11}\left(x_1\left(t-\tau_{11}\right)\right)-F_{11}\left(x_1(t)\right)\right]+$$

$$+2h_{11}x_1(t)\left[F_{12}\left(x_2\left(t-\tau_{12}\right)\right)-F_{12}\left(x_2(t)\right)\right]+$$

$$+2h_{22}x_2(t)\left[F_{21}\left(x_1\left(t-\tau_{21}\right)\right)-F_{21}\left(x_1(t)\right)\right]+$$

$$+2h_{22}x_2(t)\left[F_{22}\left(x_2\left(t-\tau_{22}\right)\right)-F_{22}\left(x_2(t)\right)\right]+$$

Учитывая условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)\le-2\left[a_{11}h_{11}x_1^2(t)+a_{22}h_{22}x_2^2(t)\right]+$$

$$+2h_{11}x_1(t)\left\{L_{11}\left|x_1(t)\right|+L_{12}\left|x_2(t)\right|\right\}+2h_{22}x_2(t)\left\{L_{21}\left|x_1(t)\right|+L_{22}\left|x_2(t)\right|\right\}+$$

$$+2h_{11}\left|x_1(t)\right|L_{11}\left|x_1(t)-x_1\left(t-\tau_{11}\right)\right|+2h_{11}\left|x_1(t)\right|L_{12}\left|x_2(t)-x_2\left(t-\tau_{12}\right)\right|+$$

$$+2h_{22}\left|x_2(t)\right|L_{21}\left|x_1(t)-x_1\left(t-\tau_{21}\right)\right|+2h_{22}\left|x_2(t)\right|L_{22}\left|x_2(t)-x_2\left(t-\tau_{22}\right)\right|+$$

Или

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)\leq$$

$$\leq-\left(\left|x_1\left(t\right)\right|,\left|x_2\left(t\right)\right|\right)\left[\begin{array}{cc}2h_{11}\left(a_{11}-L_{11}\right) & -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21}\\ -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} & 2h_{22}\left(a_{22}-L_{22}\right)\end{array}\right]\left(\begin{array}{c}\left|x_1\left(t\right)\right|\\ \left|x_2\left(t\right)\right|\end{array}\right)+$$

$$+2h_{11}\left|x_1\left(t\right)\right|L_{11}\left|x_1\left(t\right)-x_1\left(t-\tau_{11}\right)\right|+2h_{11}\left|x_1\left(t\right)\right|L_{12}\left|x_2\left(t\right)-x_2\left(t-\tau_{12}\right)\right|+$$

$$+2h_{22}\left|x_2\left(t\right)\right|L_{21}\left|x_1\left(t\right)-x_1\left(t-\tau_{21}\right)\right|+2h_{22}\left|x_2\left(t\right)\right|L_{22}\left|x_2\left(t\right)-x_2\left(t-\tau_{22}\right)\right|+$$

Используя результаты леммы 2.1., запишем

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)\leq$$

$$\leq-\left(\left|x_1\left(t\right)\right|,\left|x_2\left(t\right)\right|\right)\left[\begin{array}{cc}2h_{11}\left(a_{11}-L_{11}\right) & -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21}\\ -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} & 2h_{22}\left(a_{22}-L_{22}\right)\end{array}\right]\left(\begin{array}{c}\left|x_1\left(t\right)\right|\\ \left|x_2\left(t\right)\right|\end{array}\right)+$$

$$+2h_{11}\left|x_1\left(t\right)\right|L_{11}\left[\left|a_{11}+L_{11}+L_{12}\right|\right]\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau\left\|x\left(t\right)\right\|+$$

$$+2h_{11}\left|x_1\left(t\right)\right|L_{12}\left[\left|a_{22}\right|+L_{21}+L_{22}\right]\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau\left\|x\left(t\right)\right\|+$$

$$+2h_{22}\left|x_2\left(t\right)\right|L_{21}\left[\left|a_{11}\right|+L_{11}+L_{12}\right]\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau\left\|x\left(t\right)\right\|+$$

$$+2h_{22}\left|x_2\left(t\right)\right|L_{22}\left[\left|a_{22}\right|+L_{21}+L_{22}\right]\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau\left\|x\left(t\right)\right\|. \qquad (2.9)$$

Поскольку по условию матрица C_2 положительно определенная, то перепишем выражение (2.9) в виде

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)\leq-\lambda_{\min}\left(C_2\right)\left\|x\left(t\right)\right\|^2+$$

$$+2h_{11}\left\|x\left(t\right)\right\|\left|x_1\left(t\right)\right|\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau\left[L_{11}\left(\left|a_{11}\right|+L_{11}+L_{12}\right)+L_{12}\left(\left|a_{22}\right|+L_{21}+L_{22}\right)\right]+$$

$$+2h_{22}\left\|x\left(t\right)\right\|\left|x_2\left(t\right)\right|\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau\left[L_{21}\left(\left|a_{11}\right|+L_{11}+L_{12}\right)+L_{22}\left(\left|a_{22}\right|+L_{21}+L_{22}\right)\right]$$

Обозначим

$$K_1=\left[L_{11}\left(\left|a_{11}\right|+L_{11}+L_{12}\right)+L_{12}\left(\left|a_{22}\right|+L_{21}+L_{22}\right)\right],$$

$$K_2=\left[L_{21}\left(\left|a_{11}\right|+L_{11}+L_{12}\right)+L_{22}\left(\left|a_{22}\right|+L_{21}+L_{22}\right)\right].$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right)\leq$$

$$\leq-\lambda_{\min}\left(C_2\right)\left\|x\left(t\right)\right\|^2+2\left(h_{11}K_1\left|x_1\left(t\right)\right|+h_{22}K_2\left|x_2\left(t\right)\right|\right)\left\|x\left(t\right)\right\|\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau.$$

Используя неравенство

$$a\left|x_1\left(t\right)\right|+b\left|x_2\left(t\right)\right|\leq\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{x_1^2\left(t\right)+x_2^2\left(t\right)},$$

получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right)\right) \le -\lambda_{\min}\left(C_2\right)\left\|x\left(t\right)\right\|^2 + 2\sqrt{\left(h_{11}K_1\right)^2 + \left(h_{22}K_2\right)^2}\left\|x\left(t\right)\right\|^2\sqrt{\varphi\left(H\right)}\tau.$$

И при $\tau < \tau_0$, где τ_0 определено в (2.7), полная производная функции Ляпунова на поверхности ее уровня является отрицательно определенной, что доказывает противоречивость предположения о достижении решением поверхности уровня. Таким образом, предположение неверно и решение находится внутри области, ограниченной поверхностью уровня функции Ляпунова. □

3. Системы с запаздыванием в R^n.

Рассмотрим систему с запаздыванием в $n-$мерном пространстве. Получим аналогичные условия равномерной устойчивости. Система имеет вид

$$\dot{y}_i\left(t\right) = -a_{ii}y_i\left(t\right) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(y_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right) + b_i. \tag{3.1}$$

Как и ранее, считаем, что $\tau_{ij} > 0$, $a_{ii} > 0$, $i,j = \overline{1,n}$, а функции $f_{ij}\left(y\right)$, $i,j = \overline{1,n}$ удовлетворяют условию Липшица с показателями L_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$. Предполагаем, что система уравнений

$$-a_{ii}y_i + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(y_j\right) + b_i = 0, i = \overline{1,n}$$

имеет решением точку $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^o\right)$. Произведем замену $y_i\left(t\right) = x_i\left(t\right) + y_1^0$, и система (3.1) сведется к системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_i\left(t\right) &= -a_{ii}x_i\left(t\right) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_{ij}\left(t-\tau_{ij}\right)\right), F_{ij}\left(x_{ij}\left(t-\tau_{ij}\right)\right) = \\ &= f_{ij}\left(x_{ij}\left(t-\tau_{ij}\right) + y_j^0\right) - f_{ij}\left(y_j^0\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, исследование устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^o\right)$ свелось к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (3.2).

Как и для системы на плоскости, приведем следующие вспомогательные утверждения. Обозначим поверхность уровня функции Ляпунова $V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \alpha$ и область, которую она содержит,

$$V^\alpha = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) : V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) < \alpha\right\}, \partial V^\alpha =$$

$$= \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) : V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \alpha\right\}.$$

Обозначим

$$h_{\min} = \min\left\{h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}\right\}, h_{\max} = \max\left\{h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}\right\}, \varphi\left(h\right) = h_{\max}/h_{\min},$$

$$\|x(t)\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \tau_0 = \min_{i,j=1,2} \{\tau_{ij}\}, \tau_i = \min_{i=1,2} \{\tau_{ij}\},$$

$$N_i = [\tau_i / \tau_0] + 1, i = 1, 2, \ldots, n,$$

$[\bullet]$ — функция целой части числа. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть в момент времени t решение $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ системы (3.1) находится на поверхности уровня функции Ляпунова, а при $t - 2\tau \leq s < t$ внутри ее, т.е. $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \partial V^{\alpha}$, а при $t - 2\tau \leq s < t$: $(x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)) \in V^{\alpha}$. Тогда справедливы неравенства*

$$|x_i(t) - x_i(t-\tau)| \leq \left[|a_{ii}| + \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \right] \sqrt{\varphi(h)} \tau \|x(t)\|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Как следует из условий леммы 3,1, для произвольного $i = \overline{1, n}$ справедливы неравенства

$$h_{ii} x_i^2(s) \leq \sum_{k=1}^{n} h_{kk} x_k^2(s) = V(x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s)) <$$

$$< V(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} h_{kk} x_k^2(t), s < t.$$

Отсюда следует, что

$$|x_i(s)| < \sqrt{\frac{1}{h_{ii}} \sum_{k=1}^{n} h_{kk} x_k^2(t)}, s < t, i = \overline{1, n}. \tag{3.4}$$

Перепишем каждое из уравнений системы (3.4) в интегральном виде

$$x_i(t) = x_i(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} \left[-a_{ii}(s) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x_j(t - \tau_{ij})) \right] ds.$$

Используя ограничения, накладываемые на функции $F_{ij}(x_1)$, $i, j = \overline{1, n}$, получаем следующее соотношение

$$|x_i(t) - x_i(t-\tau)| \leq \int_{t-\tau}^{t} \left[|a_{ii}| |x_1(s)| + \sum_{j=1}^{n} L_{ij} |x_j(t - \tau_{ij})| \right] ds \leq$$

$$\leq \left[|a_{ii}| + \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \right] \sqrt{\varphi(H)} \tau \|x(t)\|.$$

Таким образом, получаем утверждение леммы 3.1. □

Лемма 3.2. *Пусть при* $-\tau_i \le t \le 0$, $i = \overline{1,n}$ *для решения* $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *системы* (3.4) *выполняется* $|x_i(t)| < \delta_0$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда при* $0 \le t \le N_i\tau_0$, $i = \overline{1,n}$ *будет справедливым*

$$|x_i(t)| \le \delta_1^{N_i}, \delta_{Ni}^1 = \left[1 + \tau \sum_{j=1}^n L_{ij}\right]^{N_i} \delta_0 e^{N_{i1}|a_{ii}|\tau_i}, i = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (3.2) в интегральном виде

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t \left[-a_{11}x_1(s) + \sum_{j=1}^n F_{1j}(x_j(t - \tau_{1j}))\right] ds.$$

Отсюда получаем следующее соотношение

$$|x_1(t)| < \delta_0 + \int_0^t \left[|a_{11}|\,|x_1(s)| + \sum_{j=1}^n |F_{1j}(x_j(s - \tau_{1j}))|\right] ds \le$$

$$\le \delta_0 + \int_0^t \left[|a_{11}|\,|x_1(s)| + \sum_{j=1}^n L_{1j}|x_j(s - \tau_{1j})|\right] ds.$$

Для промежутка $0 \le t \le \tau_0$ получаем

$$|x_1(t)| \le \delta_0 + |a_{11}| \int_0^t |x_1(s)|\, ds + \tau_0 \sum_{j=1}^n L_{1j}\delta_0 = \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^n L_{1j}\right] \delta_0 + |a_{11}| \int_0^t |x_1(s)|\, ds.$$

Используя неравенство Гронуола–Беллмана, для промежутка $0 \le t \le \tau_0$ получаем неравенство

$$|x_1(t)| \le \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^n L_{ij}\right] \delta_0 e^{|a_{11}|\tau_0}.$$

Обозначив

$$\delta_1^1 = \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^n L_{ij}\right] \delta_0 e^{|a_{11}|\tau_0},$$

получим

$$|x_1(t)| \le \delta_1^1, 0 \le t \le \tau_0.$$

Рассмотрим следующий промежуток $\tau_0 \le t \le 2\tau_0$. Для него аналогично получим неравенство

$$|x_1(t)| \le \delta_1^2, \tau_0 \le t \le 2\tau_0, \delta_2^2 = \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^n L_{1j}\right] \delta_1^1 e^{|a_{11}|\tau_0} = \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^n L_{ij}\right]^2 \delta_0 e^{2|a_{11}|\tau_0}.$$

Проделав процедуру N_1 раз, получим

$$|x_1(t)| \le \delta_1^{N_1}, \delta_{N_1}^1 = \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^{n} L_{1j}\right]^{N_1} \delta_0 e^{N_1 |a_{11}| \tau}.$$

Для остальных уравнений получаем аналогичные соотношения

$$|x_i(t)| \le \delta_i^{N_i}, \delta_{N_1}^1 = \left[1 + \tau_0 \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\right]^{N_i} \delta_0 e^{N_i |a_{ii}| \tau}, i = \overline{2, n}.$$

Обозначим

$$C_n = \begin{bmatrix} 2h_{11}(a_{11} - L_{11}) & -h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} & \dots & -h_{11}L_{1n} - h_{nn}L_{n1} \\ -h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} & 2(h_{22} - L_{22}) & \dots & -h_{22}L_{2n} - h_{nn}L_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ -h_{11}L_{1n} - h_{nn}L_{n1} & -h_{22}L_{2n} - h_{nn}L_{n2} & \dots & 2(h_{nn} - L_{nn}) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

□

Теорема 3.1. *Пусть существуют постоянные $h_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$, при которых матрица C является положительно определенной. Тогда при $\tau < \tau_0$, где*

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C_n)}{2\sqrt{\sum_{i-1}^{n} (h_{ii}K_i)^2 \varphi(h)}}, \quad K_i = \sum_{j-1}^{n} L_{ij} \left(|a_{jj}| + \sum_{s=1}^{n} L_{js}\right), \quad (3.7)$$

положение равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right)$ является асимптотически устойчивым. Причем для произвольного решения $(x_1(t), x_2(t), \dots, x(t))$ системы (3.2) при $t > 0$, будет выполняться $|x(t)| < \varepsilon$, лишь только $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$, где

$$\delta(\varepsilon, \tau) = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\exp\{-N_i |a_{ii}| \tau\}}{\left[1 + \tau \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\right]^{N_i}} \right\} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(h)}}, \|x(0)\|_\tau = \max_{-\tau \le s \le 0} \{\|x(s)\|\}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Для исследования устойчивости положения равновесия $M_0\left(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right)$ будем использовать функцию Ляпунова

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{n=1}^{n} h_{ii} x_i^2. \quad (3.9)$$

При вычислении полной производной функции Ляпунова в силу системы с запаздыванием (3.2) будем использовать условие Б.С. Разумихина. Для функции Ляпунова (3.9) оно имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_{ii}^{2}\left(s\right) = V\left(x_1\left(s\right), x_2\left(s\right), \ldots, x_n\left(s\right)\right) < V\left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_{i}^{2}\left(t\right), s < t.$$

Отсюда следует, что

$$\left|x_i\left(s\right)\right| < \sqrt{\frac{1}{h_{ii}}\sum_{k=1}^{n} h_{kk}x_k^2\left(t\right)}, s < t, i = \overline{1, n}.$$

Полная производная функции Ляпунова (3.9) в силу системы с запаздыванием (3.2) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} 2h_{ii}x_i\left(t\right)\left\{-a_{ii}x_i\left(t\right) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x\left(t-\tau_{ij}\right)\right)\right\}.$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) = -2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}h_{ii}x_i^2\left(t\right) + 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i\left(t\right)\left[\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_j\left(t\right)\right)\right] +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i\left(t\right)\left[\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right) - F_{ij}\left(x_j\left(t\right)\right)\right].$$

Используя условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) \leq -2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}h_{ii}x_i^2\left(t\right) + 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i\left(t\right)\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\left|x_j\left(t\right)\right| +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i\left(t\right)\left[\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\left|x_j\left(t\right) - x_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right|\right] = S_1\left[x\left(t\right)\right] + S_2\left[x\left(t\right)\right] + S_3\left[x\left(t\right)\right].$$

Рассмотрим каждую из сумм в отдельности. Запишем вторую сумму следующим образом

$$S_2 \le 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i(t)\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\left|x_j(t)\right| =$$
$$= 2h_{11}\left|x_1(t)\right|\left[L_{11}\left|x_1(t)\right| + L_{12}\left|x_2(t)\right| + \ldots + L_{1n}\left|x_n(t)\right|\right] +$$
$$+2h_{22}\left|x_2(t)\right|\left[L_{21}\left|x_1(t)\right| + L_{22}\left|x_2(t)\right| + \ldots + L_{2n}\left|x_n(t)\right|\right] + \ldots$$
$$+2h_{nn}\left|x_n(t)\right|\left[L_{n1}\left|x_1(t)\right| + L_{n2}\left|x_2(t)\right| + \ldots + L_{nn}\left|x_n(t)\right|\right] =$$
$$= 2h_{11}L_{11}\left|x_1(t)\right|^2 + 2\left(h_{11}L_{12} + h_{22}L_{21}\right)\left|x_1(t)\right|\left|x_2(t)\right| + \ldots +$$
$$+2\left(h_{11}L_{1n} + h_{nn}L_{n1}\right)\left|x_1(t)\right|\left|x_n(t)\right| +$$
$$+2h_{22}L_{22}\left|x_2(t)\right|^2 + 2\left(h_{22}L_{23} + h_{33}L_{32}\right)\left|x_2(t)\right|\left|x_3(t)\right| + \ldots +$$
$$+2\left(h_{22}L_{2n} + h_{nn}L_{n2}\right)\left|x_2(t)\right|\left|x_n(t)\right| + \ldots + 2h_{nn}L_{nn}\left|x_n(t)\right|^2.$$

Поэтому можно записать

$$S_1\left[x(t)\right] + S_2\left[x(t)\right] = -\left(\left|x_1(t)\right|, \left|x_2(t)\right|, \ldots, \left|x_n(t)\right|\right) \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 2h_{11}\left(a_{11} - L_{11}\right) & -h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} & \ldots & -h_{11}L_{1n} - h_{nn}L_{n1} \\ -h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} & 2\left(h_{22} - L_{22}\right) & \ldots & -h_{22}L_{2n} - h_{nn}L_{n2} \\ . & . & \ldots & . \\ -h_{11}L_{1n} - h_{nn}L_{n1} & -h_{22}L_{2n} - h_{nn}L_{n2} & \ldots & 2h_{nn}\left(a_{nn} - L_{nn}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left|x_1(t)\right| \\ \left|x_2(t)\right| \\ \ldots \\ \left|x_n(t)\right| \end{pmatrix} \le$$
$$-\lambda_{\min}\left(C_2\right)\left\|x(t)\right\|^2.$$

Рассмотрим третью сумму. Используя неравенство (3.3) леммы 3.1, получаем

$$S_3 = 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i(t)\left[\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\left|x_j(t) - x_j\left(t - \tau_{ij}\right)\right|\right] \le$$
$$\le 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\left\{\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\left(\left|a_{jj}\right| + \sum_{s=1}^{n} L_{js}\right)\right\}\left|x_i(t)\right|\left\|x(t)\right\|\sqrt{\varphi(h)}\tau.$$

Обозначим

$$K_i = \sum_{j-1}^{n} L_{ij}\left(\left|a_{jj}\right| + \sum_{s=1}^{n} L_{js}\right).$$

Тогда для полной производной функции Ляпунова получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right) \le -\lambda_{\min}\left(C_n\right)\left\|x(t)\right\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left\{h_{ii}K_i\left|x_i(t)\right|\right\}\sqrt{\varphi(h)}\tau.$$

И при $\tau < \tau_0$ полная производная функции Ляпунова будет отрицательно определенной, что доказывает асимптотическую устойчивость положения равновесия.

Оценка величины начального возмущения устанавливается, как и для системы на плоскости. □

1. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
2. *Gopalsamy K.* Leakage Delays in BAM // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 325. – P. 1117–1132.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости движения. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эридитарных систем. – М.: Наука, 1988. – 112 с.
5. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.

D. Ya. Khusainov, J. Diblik, J. Bashtinec, A. S. Sirenko

Stability, unevenly with delay, one of weak linear system with an aftereffect.

We consider system of differential equations with asymptotically stable diagonal part and the non-linearity, representing the sum of non-linear functions one of the variable, which satisfying Lipschitz conditions. The system has a position of equilibrium in the first quadrant. Studying of the stability of the equilibrium position is conducted with using the method of Lyapunov functions. The Lyapunov function is building as sum of the squares of the phase variables. We get constructive conditions of stability. We considering systems with delay. We obtain sufficient conditions of stability, which depends on the magnitude of the delay.

Keywords: *nonlinear systems, stability, the equilibrium position, the method of Lyapunov functions, system with delay, condition B. S. Razumikhin.*

Д. Я. Хусаінов, Й. Діблік, Я. Баштинець, А. С. Сіренко

Стійкість, нерівномірна за запізненням, однієї слабколінійної системи з післядією.

Розглядається система диференціальних рівнянь з асимптотично стійкою діагональною частиною та нелінійністю, що являє собою суму нелінійних функцій одного аргументу, які задовольняють умовам Ліпшиця. Система має стан рівноваги в першому квадранті. Дослідження стійкості стану рівноваги проводиться з використанням методу функцій Ляпунова. Функція Ляпунова будується у вигляді суми квадратів фазових змінних. Отримані конструктивні умови стійкості. Розглядаються системи із запізненням. Отримані достатні умови стійкості, що залежать від величини запізнення.

Ключові слова: *нелінійні системи, стійкість, стан рівноваги, метод функцій Ляпунова, системи із запізненням, умова Б.С. Разуміхіна.*

Киевский национальный университета имени Тараса Щевченко,
Киев,
Брненский технологический университет,
Brno
dkh@unicyv.kiev.ua, diblik@feec.vutbr.cz,
bastinec@feec.vutbr.cz, sandew@online.ua

Получено 26.11.15