УДК 517.9

©2015. **С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба**

ПРО РЕГУЛЯРИЗАЦІЮ МАТРИЧНОГО РІВЯННЯ СИЛЬВЕСТРА

Знайдено конструктивні умови регуляризації лінійного матричного рівняння Сильвестра. Побудовано лінійне збурення матричного рівняння Сильвестра, а також розв'язки збуреного матричного рівняння Сильвестра.

Ключові слова: *матричне рівняння Сильвестра, псевдообернені за Муром–Пенроузом матриці, умови регуляризації.*

1. Постановка задачі. Припустимо задачу про знаходження розв'язків матричного рівняння Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i \; C \; R_i = B \tag{1}$$

некоректно поставленою [1, 2, 3], а саме: припустимо, що рівняння Сильвестра (1) не має розв'язків для довільної неоднорідності $B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. Нами досліджено умови регуляризації [1, 2, 3] матричного рівняння Сильвестра (1), відомого численними застосуваннями у теорії стійкості руху [4, с. 245], а також при розв'язанні диференціальних ріавнянь Ріккаті [5]. Тут $Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ — визначені матриці, $C \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ — невідома матриця.

2. Умови регуляризації матричного рівняння Сильвестра. Загальний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді суми

$$C = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j c_j, \; \Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}, \; c_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут $\{\Theta_j\}$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Позначимо матриці

$$\Lambda_j := \sum_{i=1}^{k} Q_i \Theta_j R_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}, \; j = 1, 2, \; ... \; \beta\cdot\gamma.$$

Таким чином, приводимо рівняння (1) до вигляду

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Lambda_j c_j = B.$$

Визначимо оператор $\mathcal{M}[A] \; : \; \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор [7, 8], який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, складений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]: \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$. Визначимо також матриці

$$\left[E_n^m\right]_j := \left[E_1^m\right]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \ \left[E_1^m\right]_j := \left\{\delta_{ij}\right\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

тут δ_{ij} — символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} := \left\{ \begin{array}{l} 1, \ j = i, \\ 0, \ j \neq i \end{array} \right. , \ i = 1, \ 2, \ ... \ m.$$

Рівняння (1) рівнозначне рівнянню

$$\mathcal{Q}\ c = \mathcal{M}[B] \tag{2}$$

відносно вектора $c \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$; тут

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \left\{ \left[E_1^{\alpha\beta}\right]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$

Рівняння (2) розв'язне за умови $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = 0$; тут [1]

$$P_{\mathcal{Q}^*}: \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{Q}^*$. Припустимо, що умова розв'язності матричного рівняння Сильвестра (1) не виконується для довільної неоднорідності:

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0.$$

Інакше кажучи, припустимо, що для матричного рівняння Сильвестра (1) має місце критичний випадок: $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$. Поставимо наступну задачу: чи існують матриці $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$, для яких збурення матричного рівняння Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i + \varepsilon\,\mathcal{E}C\mathcal{F} = B \tag{3}$$

розв'язне для довільної неоднорідності? Припустимо матрицю $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ невідомою, а матрицю $\mathcal{F}$ фіксованою. Розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (3) шукатимемо у вигляді суми

$$C = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j, \ x_j \in \mathbb{R}^1.$$

Рівняння (1) можна регуляризувати лише за умови $\alpha\delta \leq \beta\gamma$. Дійсно, будь-яка матриця $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ може бути зображена у вигляді [9]

$$Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi, \ \mathrm{rank}\ Q := r; \tag{4}$$

тут $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці,

$$J_r := \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = V_r \cdot W_r,\; V_r := \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix},\; W_r := \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}.$$

Збурення матриці Q будемо шукати у вигляді $\mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R}$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathcal{Q}c = b,\; \mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R},\; \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m\times n},\; 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{5}$$

являє некритичний випадок за умови $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Позначимо матрицю

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},\; \text{rank}\, C := m - r.$$

Лема. *Задача про регуляризацію системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5) за умови $m \le n$ має сім'ю розв'язків (5), де $\mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi$. Тут $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці, $Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi$ — стандартне розвинення $(m \times n)-$ матриці Q.*

Позначимо

$$P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^*}:\; \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^*$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1$, де

$$\mathcal{Q}_1 := \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \left\{ \left[E_1^{\alpha\beta} \right]_j \otimes \mathcal{M}[\mathcal{E}\Theta_j\mathcal{F}] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$

Збурення матричного рівняння Сильвестра (3) розв'язне для довільної неоднорідності B у випадку $P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^*} = 0$. Покладемо

$$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi_j\, y_j,\; \left\{ \Xi_j \right\}_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\; y_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут $\{\Xi_j\}$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Позначимо $(\alpha \times \delta)$ – матриці

$$\Omega_{1,i} := \Xi_i\Theta_1\mathcal{F},\; \Omega_{2,i} := \Xi_i\Theta_2\mathcal{F},\; \dots,\; \Omega_{\beta\gamma,i} := \Xi_i\Theta_{\beta\gamma}\mathcal{F}.$$

Для знаходження вектора $y \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, компоненти якого визначають матрицю $\mathcal{E}$, приходимо до рівняння

$$\mathfrak{Q} \cdot y = \mathcal{M}[\mathcal{Q}_1],$$

для розв'язності якого необхідно і достатньо, щоб

$$P_{\mathfrak{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1] = 0; \tag{6}$$

тут

$$\mathfrak{Q} := \left\{\mathcal{M}\left[\mathcal{M}(\Omega_{1,1}),\ \dots\ ,\ \mathcal{M}(\Omega_{1,\beta\gamma})\right],\ \dots\ ,\ \mathcal{M}\left[\mathcal{M}(\Omega_{\alpha\beta,1}),\ \dots\ ,\ \mathcal{M}(\Omega_{\alpha\beta,\beta\gamma})\right]\right\}$$

— стала $(\alpha\beta\delta\gamma \times \alpha\beta)$ – матриця,

$$P_{\mathfrak{Q}^*}:\ \mathbb{R}^{\alpha\beta\delta\gamma\times\alpha\beta\delta\gamma} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*)$$

— ортопроектор матриці $\mathfrak{Q}^*$. Покладемо для визначеності

$$\alpha > 1,\ \beta > 1,\ \gamma > 1,\ \delta > 1,$$

при цьому за умови повноти рангу матриці $\mathcal{F}$

$$\text{rank}\ \Omega_{i,j} > 0,\ i = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\beta,\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \beta\gamma,$$

отже, мають місце нерівності

$$\alpha\beta\gamma\delta > \text{rank}\ P_{\mathfrak{Q}^*} \geq \alpha\beta(\gamma\delta - 1) > 0.$$

Умову (6) задовольняє серія матриць

$$\mathcal{Q}_1(c_\varrho) := \mathcal{M}^{-1}[P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}} c_\varrho],\ c_\varrho \in \mathbb{R}^\varrho;$$

тут $P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}}$ — матриця, складена з ϱ лінійно незалежних стовпців ортопроектора

$$P_{P_{\mathfrak{Q}^*}}:\ \mathbb{R}^{\alpha\beta\delta\gamma\times\alpha\beta\delta\gamma} \to \mathbb{N}(P_{\mathfrak{Q}^*}).$$

Зазначимо, що $0 < \text{rank}\ P_{P_{\mathfrak{Q}^*}} \leq \alpha\beta$, тому $\rho > 0$. Згідно лемі матриця $Q \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}$ може бути зображена у вигляді $Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi$; тут $\Phi \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma}$ — невироджені матриці rank $Q := r$. Зафіксуємо вектор $c_\varrho \in \mathbb{R}^\varrho$; у випадку $\alpha\delta \leq \beta\gamma$ матричне рівняння Сильвестра (1) можна регуляризувати за умови

$$\text{rank}\ (J_r + \Pi_{J_r}) = \alpha\delta \leq \beta\gamma; \tag{7}$$

тут

$$\Pi_{J_r} := \Phi^{-1} \cdot \mathcal{M}^{-1}\left[P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}} c_\varrho\right] \cdot \Psi^{-1}.$$

Оскільки умову (6) при цьому виконано, знаходимо вектор

$$y(c_\nu) = \mathfrak{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1] + P_{\mathfrak{Q}_\nu} c_\nu,\ c_\nu \in \mathbb{R}^\nu$$

а, отже, і матрицю

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, c_\nu) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi_j\ y_j(\mathcal{F}, c_\nu),\ y_j(\mathcal{F}, c_\nu) \in \mathbb{R}^1.$$

Тут $P_{\mathfrak{Q}}: \ \mathbb{R}^{\alpha\beta\times\alpha\beta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q})$ — ортопроектор матриці $\mathfrak{Q}$; матриця $P_{\mathfrak{Q}_\nu}$ складена з ν лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}}$.

3. Розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (3). За умови $\alpha\delta \leq \beta\gamma$ у випадку (7) розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (3)

$$C(\mathcal{F}, c_\mu) = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(\mathcal{F}, c_\mu), \ x_j(\mathcal{F}, c_\mu) \in \mathbb{R}^1$$

визначає вектор

$$x(\mathcal{F}, c_\mu) := (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)^+ \mathcal{M}[B] + P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu, \ c_\mu \in \mathbb{R}^\mu.$$

Тут

$$P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)}: \ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1$; матриця $P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu}$ складена з μ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)}$. Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. *Лінійне матричне рівняння Сильвестра (1) у критичному випадку* ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) *не розв'язне для довільної неоднорідності* B, *однак за умови*

$$\alpha > 1, \ \beta > 1, \ \gamma > 1, \ \delta > 1,$$

у випадку (7) для фіксованої матриці повного рангу $\mathcal{F}$ *розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (3) визначає матриця*

$$C(\mathcal{F}, c_\mu) = Y[\mathcal{F}] + Z[c_\mu], \ c_\mu \in \mathbb{R}^\mu,$$

та вектор

$$y(\mathcal{F}, c_\nu) = y(\mathcal{F}) + y(c_\nu), \ y(\mathcal{F}) := \mathfrak{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{Q}_1], \ y(c_\nu) := P_{\mathfrak{Q}_\nu} c_\nu,$$

де

$$Y[\mathcal{F}] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(\mathcal{F}), \ Z[c_\mu] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(c_\mu);$$

тут

$$x(\mathcal{F}) := (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)^+ \mathcal{M}[B], \ x(c_\mu) := P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu.$$

Зазначимо, що матричне рівняння Сильвестра (1) можна регуляризувати за умови (7). Якщо для фіксованої матриці повного рангу $\mathcal{F}$ ця умова не виконується, матричне рівняння (1) можна регуляризувати для іншої матриці повного рангу $\mathcal{F}$. Доведена теорема узагальнює відповідне твердження [17] на випадок матричного рівняння Сильвестра (1).

Наведена техніка регуляризації значно спрощує відповідну схему регуляризації [17], оскільки виконання умови (7) передбачає знаходження $\rho \ll \alpha\beta\gamma\delta$ параметрів навідміну від схеми регуляризації [17], яка для матричного рівняння Сильвестра (1) передбачає розв'язання нелінійного рівняння відносно $\alpha\beta\gamma\delta$ параметрів.

Приклад. *Матричне рівняння Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i\ C\ R_i = B \tag{8}$$

не розв'язне для довільної неоднорідності B *для*

$$Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що для рівняння Сильвестра (8) умови

$$\alpha = 2 > 1,\ \beta = 3 > 1,\ \gamma = 3 > 1,\ \delta = 2 > 1,\ \alpha\delta = 6 \le \beta\gamma = 6$$

виконуються. Позначимо $\Theta_1,\ \Theta_2,\ \dots,\ \Theta_9$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 3}$, при цьому матриця

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

визначає ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \ne 0$, то для матричного рівняння Сильвестра (8) має місце критичний випадок, отже, рівняння (8) не розв'язне для довільної неоднорідності B. Покладемо

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\left\{\Xi_j\right\}_{j=1}^{6} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

— природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 3}$, при цьому

$$\mathfrak{Q} := \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1^* & \mathfrak{Q}_2^* & \mathfrak{Q}_3^* & \mathfrak{Q}_4^* \end{pmatrix}^*,$$

де

$$\mathfrak{Q}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{Q}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{Q}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{Q}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно лемі матриця $Q \in \mathbb{R}^{4\times 9}$ може бути зображена у вигляді

$$Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi, \ r := \operatorname{rank} Q = 3;$$

тут

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці. Умову (6) задовольняє серія матриць

$$\mathcal{Q}_1(c_\varrho) = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 2\,c_1 & 2\,c_3 & 2\,c_5 \\ c_2 & c_4 & c_6 & 0 & 0 & 0 & 2\,c_2 & 2\,c_4 & 2\,c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 3\,c_1 & 3\,c_3 & 3\,c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\,c_2 & 3\,c_4 & 3\,c_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут $c_\varrho \in \mathbb{R}^6$. Зокрема, умови (6) та (7) задовольняє матриця

$$\mathcal{Q}_1(c_\varrho) := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\,\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут

$$\Pi_{J_r} = \Phi^{-1}\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{P_{\mathfrak{Q}_\varrho^*}} c_\varrho\Big]\Psi^{-1} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{24}\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & -12 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 12 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (6) при цьому виконано, однозначно ($\nu = 0$) знаходимо вектор

$$y(c_\nu) = \mathfrak{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1],$$

а, отже, і матрицю

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яка регуляризує матричне рівняння Сильвестра (8). Покладемо для визначеності

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому розв'язок збурення для матричного рівняння Сильвестра (8) визначає матриця

$$C(\mathcal{F}, c_\mu) = Y[\mathcal{F}] + Z[c_\mu],\ c_\mu \in \mathbb{R}^5,$$

де

$$Y[\mathcal{F}] = \begin{pmatrix} \frac{2-5\varepsilon+3\varepsilon^2}{12-8\varepsilon+16\varepsilon^2} & 0 & \frac{6-7\varepsilon-3\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} \\ \frac{4-3\varepsilon+11\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} & 0 & -\frac{3+\varepsilon^2}{6-4\varepsilon+8\varepsilon^2} \\ \frac{4-3\varepsilon+11\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} & 0 & \frac{6+7\varepsilon+7\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} \end{pmatrix}$$

та

$$Z[c_\mu] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(c_\mu),\ x(c_\mu) := P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu;$$

тут

$$P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} & P^{(2)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} & P^{(3)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} \end{pmatrix},$$

$$P^{(1)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} 4\left(4-4\varepsilon+5\varepsilon^2\right) & -8+4\varepsilon-6\varepsilon^2 \\ -8+4\varepsilon-6\varepsilon^2 & 16-8\varepsilon+21\varepsilon^2 \\ -8+4\varepsilon-6\varepsilon^2 & -8+8\varepsilon-11\varepsilon^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -10\varepsilon^2 & 3(-2+\varepsilon)\varepsilon \\ 8(-1+\varepsilon)\varepsilon & 4\varepsilon(1+\varepsilon) \\ 2\varepsilon(4+\varepsilon) & -\varepsilon(-2+7\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 8\left(3-2\varepsilon+4\varepsilon^2\right) & 0 \\ 0 & 8\left(3-2\varepsilon+4\varepsilon^2\right) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^{(3)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} -10\varepsilon^2 \\ 3(-2+\varepsilon)\varepsilon \\ 3(-2+\varepsilon)\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12+4\varepsilon+5\varepsilon^2 \\ -4\varepsilon(3+\varepsilon) \\ -12+8\varepsilon-\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що перевірка виконання умови (7) у випадку матричного рівняння Сильвестра (8) передбачає знаходження $\rho = 6$ параметрів навідміну від схеми регуляризації [17], яка для матричного рівняння Сильвестра (8) передбачає розв'язання нелінійного рівняння відносно $\alpha\beta\gamma\delta = 36$ невідомих.

Запропонована у статті техніка регуляризації матричного рівняння Сильвестра (1) може бути перенесена на узагальнені матричні рівняння Сильвестра [10], аналогічно [1, 11] — на матричні крайові задачі з запізненням, нетерові крайові задачі [1, 12, 13, 14], а також аналогічно [15, 16] матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
2. *Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
3. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. – 104 с.

4. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука. – 1978. – 280 с.
5. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464-471.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука. – 1984. – 318 с.
7. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вісник Одеського національного університету. Сер. математика та механіка. – 2014. – **19**, Вип. 1 (21). – С. 49-57.
8. *Чуйко С.М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика та механіка. – № 1120. – 2014. – С. 85-94.
9. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений, 3 изд. – М.: Изд. МЦНМО. – 2009. – 672 с.
10. *Чуйко С.М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. – 2015. – **16**, Вып. 1. – С. 52-66.
11. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 4. – С. 435-446.
12. *Чуйко С.М., Чуйко О.В.* Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу // Буковинский математичний журнал. – 2013. – **1**, № 3-4. – С. 158-161.
13. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка. – 1990. – 96 с.
14. *Chuiko S.M.* On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – **197**, № 1. – P. 138-150.
15. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9-21.
16. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – **56**, № 4. – P. 752-760.
17. *Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V.* On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. – 2014. – **1**. – P. 12-14.

S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, M. V. Dzyba

On a regularization method for solving matrix Sylvester equation.

Constructive conditions for the regularization and regularization method for solving of linear matrix Sylvester equation has been constructed.

Keywords: *matrix Sylvester equation, pseudo inverse by Moore–Penrose matrices, conditions for the regularization.*

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, М. В. Дзюба

О регуляризации матричного уравнения Сильвестра.

Найдены конструктивные условия регуляризации линейного матричного уравнения Сильвестра. Построено линейное возмущение матричного уравнения Сильвестра, а также решения возмущенного матричного уравнения Сильвестра.

Ключевые слова: *матричное уравнение Сильвестра, псевдообратные по Муру–Пенроузу матрицы, условия регуляризации.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
`chujko-slav@inbox.ru`

Получено 30.11.2015