

УДК 517.5

©2015. Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ МЕТРИКАМИ

Развивая технику p -модулей применительно к семействам кривых в евклидовом пространстве (\mathbb{R}^n, μ, d) с локально конечной борелевой мерой μ и метрикой d , авторы устанавливают конечную лишивость и гельдеровость Q -гомеоморфизмов, действующих из (\mathbb{R}^n, μ, d) в евклидово пространство \mathbb{R}^n со стандартной метрикой и мерой Лебега.

Ключевые слова: евклидовы пространства с мерами, Q -гомеоморфизмы, p -модули.

1. Введение.

В последнее время активно развивается теория так называемых Q -гомеоморфизмов. В препринте [1], а затем в статье [2], для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения Q -гомеоморфизмов, введенных О. Мартио. Основной целью теории Q -гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f и свойств функции $Q(x)$ в модульном неравенстве. Развитие этой теории начиналось в работах [13, 14]. Высокий уровень абстракции теории Q -отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удается установить оценку модуля с подходящей функцией $Q(x)$, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе, к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [9] и [12].

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [12], [19]. Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство X с метрикой d и локально конечной борелевской мерой μ . Борелеву функцию $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$, называем *допустимой* для семейства кривых Γ в X , пишем $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho ds \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (1)$$

Тогда p -модулем семейства кривых Γ , $p \in (0, \infty)$, в пространстве (X, d, μ) называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^p(x) d\mu(x), \quad (2)$$

где D – область в X .

Пространство (X, d, μ) называется α -регулярным по Альфорсу, если существует постоянная $C \geq 1$, такая что

$$C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_r) \leq Cr^\alpha \quad (3)$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \text{diam } X$. Как известно, α -регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α , см., напр., [7], с. 61. Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α -регулярно для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α -регулярно сверху в точке $x_0 \in X$* , если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq Cr^\alpha \quad (4)$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (4) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Предположим, что при $p \in (n - 1, n)$ и

$$M_p(f\Gamma) \leq K M_p(\Gamma) \quad (5)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D . При предположении, что f в (5) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *локально квазиизометричным*, другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq K^{\frac{1}{n-p}}, \quad (6)$$

см., напр., теорему 2 в [3].

Пусть всюду далее D – область в (\mathbb{R}^n, μ, d) , где (\mathbb{R}^n, μ, d) – евклидово пространство с локально конечной борелевой мерой μ и метрикой d , $n \geq 2$, D' – область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n со стандартной метрикой и мерой Лебега.

Аналогично [12] говорим, что $f : D \rightarrow D'$ – *Q -гомеоморфизм относительно p -модуля* ($n - 1 < p < n$), если

$$M_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^p(x) d\mu(x) \quad (7)$$

выполнено для любого семейства кривых Γ в D и любой допустимой функции ρ для Γ .

При $p = n$ проблема локального поведения Q -гомеоморфизмов изучалась в случае $Q \in \text{ВМО}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \text{ФМО}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях, см. монографию [12]. В работе [17] было показано, что Q -гомеоморфизмы в случае $Q \in L^1_{\text{loc}}(D)$ принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{\text{loc}}$ и дифференцируемы почти всюду. Определение Q -гомеоморфизма относительно p -модуля при $p \neq n$ впервые встречается в работе [6]. В работе [5] неравенство вида (7) уставлено для отображений квазиконформных в среднем при $p \neq n$.

2. Определения и предварительные результаты.

Следуя работе [15], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором*. Конденсатор \mathcal{E} называется *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если B – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор \mathcal{E} называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow D'$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D , то (fA, fC) также конденсатор в D' . Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \quad (8)$$

При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dm(x) \quad (9)$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора \mathcal{E} . В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \quad (10)$$

см. [4], [8] и [18].

Известно, что при $1 \leq p < n$

$$\text{cap}_p \mathcal{E} \geq n\nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}} \quad (11)$$

где ν_n – объем единичного шара в \mathbb{R}^n , см., напр., неравенство (8.9) в [16].

При $n-1 < p \leq n$ имеет место оценка

$$(\text{cap}_p \mathcal{E})^{n-1} \geq \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \quad (12)$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C , γ – положительная константа, зависящая только от размерности n и p , см. предложение 6 в [10].

3. Гельдеровость и конечная липшицевость.

Пусть $x, y \in D$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ называется *конечно липшицевым*, если

$$\limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} < \infty. \quad (13)$$

для всех $x \in D$. Ниже приведена теорема о достаточном условии гельдеровости в точке для Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля.

Теорема 1. Пусть мера μ является α -регулярной сверху и $f : D \rightarrow D'$ – Q -гомеоморфизм относительно p -модуля. Если

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) d\mu(x) < \infty. \quad (14)$$

Тогда при $n - 1 < p < \alpha \leq n$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{[d(x, x_0)]^\gamma} \leq C_{n,p} Q_0^{1/(n-p)}, \quad (15)$$

где $\gamma = \frac{\alpha-p}{n-p} \in (0, 1)$ и $C_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $A = A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < d(x, x_0) < \varepsilon_2\}$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$. Тогда $(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)})$ – кольцевой конденсатор в D' и, согласно (10), имеем равенство

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)} \right) = M_p (\Delta(\partial fB(x_0, \varepsilon_2), \partial fB(x_0, \varepsilon_1); fA)) \quad (16)$$

а ввиду гомеоморфности f , равенство

$$\Delta(\partial fB(x_0, \varepsilon_2), \partial fB(x_0, \varepsilon_1); fA) = f(\Delta(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A)). \quad (17)$$

Очевидно, что функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & x \in A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{cases} \quad (18)$$

является допустимой для семейства $(\Delta(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A))$.

В силу определения Q -гомеоморфизма относительно p -модуля замечаем, что

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)} \right) \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int_{A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} Q(x) d\mu(x). \quad (19)$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)} \right) \leq \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \quad (20)$$

С другой стороны, в силу неравенства (11) вытекает оценка

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)} \right) \geq C_1 [m(fB(x_0, 2\varepsilon))]^{\frac{n-p}{n}} \quad (21)$$

где C_1 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (20) с (21) и используя α -регулярность меры μ , получаем, что

$$m(fB(x_0, 2\varepsilon)) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{n(\alpha-p)}{n-p}} \left[\frac{1}{\mu(B(x_0, 4\varepsilon))} \int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \right]^{\frac{n}{n-p}}, \quad (22)$$

где C_2 – положительная постоянная зависящая только от n и p .

Далее, выбирая в (19) $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)} \right) \leq \frac{\mu(B(x_0, 2\varepsilon))}{\varepsilon^p} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \quad (23)$$

и учитывая α -регулярность меры

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)} \right) \leq \frac{C_3 \varepsilon^{\alpha-p}}{\mu(B(x_0, 2\varepsilon))} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x), \quad (24)$$

где C_3 – положительная постоянная зависящая только от n и p .

С другой стороны, в силу неравенства (12), получаем

$$\text{cap}_p \left(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)} \right) \geq \left(C_4 \frac{d^p(fB(x_0, \varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0, 2\varepsilon))} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (25)$$

где C_4 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (23) и (25), получаем, что

$$\frac{d^p(fB(x_0, \varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0, 2\varepsilon))} \leq C_5 \varepsilon^{(\alpha-p)(n-1)} \left(\frac{1}{\mu(B(x_0, 2\varepsilon))} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \right)^{n-1}, \quad (26)$$

где C_5 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Эта оценка вместе с (22) дает неравенство

$$d(fB(x_0, \varepsilon)) \leq C_6 \left(\frac{1}{\mu(B(x_0, 4\varepsilon))} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{n-p}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha-p}{n-p}}, \quad (27)$$

где C_6 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p . Переходя к верхнему пределу при $x \rightarrow x_0$ немедленно вытекает заключение теоремы.

Следствие 1. Пусть мера μ является n -регулярной и $f : D \rightarrow D' - Q$ -гомеоморфизм относительно p -модуля при $p \in (n - 1, n)$. Если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) d\mu(x) < \infty \quad \forall x_0 \in D. \quad (28)$$

Тогда f является конечно липшицевым в D .

Замечание. В соответствии с леммой 10.6 в [12] конечно липшицевые отображения обладают N -свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Следствие 2. Пусть мера μ является n -регулярной сверху, $f : D \rightarrow D' - Q$ -гомеоморфизм относительно p -модуля при $p \in (n - 1, n)$, $Q(x) \leq K$ п.в. Тогда f является липшицевым в D .

1. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. – 2000. – No. 256. – 22 p.
2. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – Vol. 22. – P. 1397-1420.
3. Gehring F.W. Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – Vol. 66. – P. 175–193.
4. Gehring F.W. Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V. 2. – International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
5. Golberg A. Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Vol. 7, no. 2. – P. 53-64.
6. Golberg A. Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218-228.
7. Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer, 2001.
8. Hesse J. A p -extremal length and p -capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – Vol. 13. – P. 131-144.
9. Iwaniec T., Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
10. Кругликов В.И. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сборник. – 1986. – Vol. 130, no. 2. – С. 185-206.
11. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
12. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – Vol. 30, no. 1. – P. 49-69.
13. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Q -homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193-203.
14. Martio O., Rickman S., Vaisala J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – Vol. 448. – P. 1-40.
15. Maz'ya V. Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – Vol. 338. – P. 307-340.
16. Салимов Р.Р. Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2008. – Т. 72, №. 5. – С. 141–148.

17. Shlyk V.A. On the equality between p -capacity and p -modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – Vol. 34, no. 6. – P. 216-221.
18. Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings // Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc., Springer-Verlag, 1971. – 144 p.

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

On mappings of euclidean spaces with alternative metrics.

Developing a technique modules applied to a family of curves in Euclidean space with a locally finite Borel measure and metric, the authors establish a finite Lipschitz and Holder homeomorphisms acting Euclidean space into Euclidean space of the standard metric and Lebesgue measure.

Keywords: euclidian spaces with measures, Q -homeomorphisms, p -moduli.

О. С. Афанасьєва, Р. Р. Салимов

Про відображеннях в евклідових просторах з альтернативними метриками.

Розвиваючи техніку p -модулів, $p \in (0, \infty)$, стосовно сімей кривих в евклідовому просторі з локально скінченною борелевою мірою μ і метрикою $d(\mathbb{R}^n, \mu, d)$, автори отримують результати про кінцеву ліпшицевість та гольдеровість Q -гомеоморфізмів, що діють із (\mathbb{R}^n, μ, d) в евклідов простір \mathbb{R}^n із стандартними метриками та мірою Лебега.

Ключові слова: евклідові простори з мірами, Q -гомеоморфізми, p -модулі.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
Ин-т математики НАН Украины, Киев
es.afanasjeva@yandex.ru, ruslan623@yandex.ru

Получено 01.04.14