УДК 519.21

©2015. **Д. С. Будков, С. Я. Махно**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ БЕССЕЛЯ И ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ НИХ

В статье установливаются теоремы типа функционального закона повторного логарифма для бесселевских процессов и функционалов от них при больших и малых временах. Нормирующия функция является более общей, чем классическая нормировка корень квадратный из двойного логарифма.

Ключевые слова: *процесс Бесселя, функционал от процесса Бесселя, функциональный закон повторного логарифма.*

1. Вступление.

Процессы Бесселя применяются при изучении асимптотических свойст локальных времен винеровского процесса $L^w(t,y)$ по переменной y [6, параграф 2.8], [2, теорема 3.1], [11, доказательство теоремы 1.1]. Известными являются закон повторного логарифма Хинчина для бесселевского процесса и гельдеровость его траекторий [6, параграф 2.7]. В последнее время интерес к процессам Бесселя возобновился в связи с изучением геометрического броуновского движения, т.к. с распределениями последнего связано изучение опционов Азиатского типа в актуарной математике [7, 9].

В этой статье изучаются асимптотические свойства бесселевских процессов и некоторых функционалов от них. Доказываются функциональные законы типа повторного логарифма в форме Булинского [4]. В них нормирующая функция является более общей, чем классическая корень из двойного логарифма. Все рассматриваемые в статье случайные процессы определены на стохастическом базисе $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P\right)$, $t \geq 0$. Математическое ожидание обозначим символом E. Равенство процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ по распределению обозначим $\xi(t) \stackrel{d}{=} \eta(t)$.

Бесселевским процессом порядка $\alpha > 0$ называется решение стохастического уравнения [5, параграф IV.4.]

$$\beta_\alpha(t) = x + \frac{\alpha-1}{2}\int_0^t \frac{1}{\beta_\alpha(s)}ds + w(t),\ x \geq 0,\ t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь $w(t), t \geq 0$, одномерный винеровский прцесс. Будем считать $\alpha \geq 2$, тогда точка ноль является недостижимой при всех $t > 0$ и с вероятностью единица $\beta_\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, [12, глава XI] , [5, стр. 227]. Обозначим Φ – класс возрастающих функций $\varphi(x)$, $x \geq 0$, таких, что $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$. Пусть число $c > 1$. Для любой

$\varphi \in \Phi$ определим $R^2(\varphi)$ по правилу

$$R^2(\varphi) = \inf\left\{r > 0 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-r\frac{\varphi^2([c^n])}{2}\right\} < \infty\right\}, \tag{2}$$

где $[c]$ – целая часть числа c. Если не существует конечного r при котором ряд в (2) сходится, то $R^2(\varphi) = \infty$. Заметим, что если ряд сходится для некоторого $c > 1$, то он будет сходиться для любых $c > 1$. В [4, теорема 3] доказано, что $R = \frac{1}{Q}$, где

$$Q = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2\ln\ln x}}.$$

Обозначим $\mathbf{C}([0,1]; E^d)$ пространство непрерывных d-мерных функций, заданных на $[0,1]$, с равномерной метрикой. Для d-мерной абсолютно непрерывной функции $f(t)$ обозначим $\dot{f}(t)$ ее производную в смысле абсолютной непрерывности и положим

$$I_0(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt.$$

Введем классы функций

$$\mathcal{K}_R(d) = \{f \in \mathbf{C}([0,1]; E^d) : \ f(0) = 0, \ I_0(f) \le R^2/2\},$$

$$\mathcal{H}_R(d) = \left\{\int_0^1 f(t)dt, \ f \in \mathcal{K}_R(d)\right\}, \quad \mathcal{L}_R(d) = \left\{|f(t)|, \ f \in \mathcal{K}_R(d)\right\},$$

$$\mathcal{M}_R(d) = \left\{|f(t)|^2, \ f \in \mathcal{K}_R(d)\right\}.$$

2. Основные результаты.

Множество предельных точек в теоремах ниже определяются в метрике пространства $\mathbf{C}([0,1]; E^d)$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \ge 2$ число целое. Тогда для $\varphi \in \Phi$ и $n \to \infty$ с вероятностью единица множество предельных точек последовательности $\left\{\frac{\beta_\alpha(tn)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\right\}$, $t \in [0,1]$, а при $x = 0$ и последовательности $\left\{\frac{\beta_\alpha(t/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n}\right\}$, $t \in [0,1]$, есть $\mathcal{L}_R(\alpha)$.*

Доказательство. При целом $\alpha \ge 2$ процесс $\beta_\alpha(t)$ отождествляется с α-мерным процессом, который определяется следующим образом [10, III.3.18–3.22]. Пусть $B(t)$ α-мерный винеровский процесс и вектор $a \in E^\alpha$ выбран так, что $|a| = x$. Тогда $\beta_\alpha(t) \stackrel{d}{=} |a + B(t)|$. Поэтому

$$\frac{\beta_\alpha(tn)}{\varphi(n)\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \left|\frac{a}{\varphi(n)\sqrt{n}} + \frac{B(tn)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\right|.$$

В [4, теорема 1] доказано, что с вероятностью единица множество предельных точек последовательности $\frac{B(tn)}{\varphi(n)\sqrt{n}}$, $t \in [0,1]$, есть $\mathcal{K}_R(\alpha)$. Отсюда и непрерывности функционала $F(x(\cdot)) = |x(t)|$ следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Нужно применить [3, теорема 2].

Теорема доказана. □

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\beta_\alpha(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}} = R, \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\beta_\alpha(\frac{1}{n})\sqrt{n}}{\varphi(n)} = R.$$

Результат следствия 1 для $\varphi(n) = \sqrt{2\ln\ln n}$ есть закон повторного логарифма Хинчина для бесселевских процессов [6, параграф 2.7], т.к. тогда $R = 1$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 с вероятностью единица множество предельных точек последовательности* $\left\{\frac{\beta_\alpha^2(tn)}{n\varphi^2(n)}\right\}$, $t \in [0,1]$, *а при* $x = 0$ *и последовательности* $\left\{\frac{\beta_\alpha^2(t/n)}{\varphi^2(n)}n\right\}$, $t \in [0,1]$, *есть* $\mathcal{M}_R(\alpha)$.

Теорема 2. *Пусть* $Z(t), t \geq 0$, *– одномерный стандартный винеровский процесс, независящий от решения уравнения (1),* $x = 0$ *и число* $\alpha \geq 2$ *целое. Тогда для* $\varphi \in \Phi$ *с вероятностью единица множество предельных точек последовательностей*

$$\left\{\frac{Z(tn) + \beta_\alpha(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{Z(t/n) + \beta_\alpha(t/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n}, \ t \in [0,1],$$

есть множество

$$\Big\{f(t) + |g(t)| : (f(t), g_1(t), \ldots, g_\alpha(t)) \in \mathcal{K}_R(\alpha+1)\Big\}.$$

Доказательство. Используем представлением процесса $\beta_\alpha(t)$ из доказательства теоремы 1 и определим процессы

$$\xi(t) = Z(t) + \beta_\alpha(t) \stackrel{d}{=} Z(t) + |B(t)|, \ \xi_n(t) = \frac{Z(nt) + |B(nt)|}{\varphi(n)\sqrt{n}},$$

$$V(t) = (Z(t), B_1(t), \ldots, B_\alpha(t)).$$

Процесс $V(t)$ является $(\alpha+1)$-мерным стандартным винеровским процессом. Множеством предельных точек последовательнлсти $\left\{v_n(t) = \frac{V(nt)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\right\}$ является $\mathcal{K}_R(\alpha+1)$ [4, теорема 1]. Воспользуемся тем, что для любого непрерывного функционала F, заданного на $\mathbf{C}([0,1]; E^{\alpha+1})$, множество предельных точек последовательности $F(v_n(\cdot))$ есть $F(\mathcal{K}_R(\alpha+1))$. Выбрав

$$F(f(\cdot)) = h(t) + |g(t)|$$

для $f(t) = (h(t), g_1(t), ..., g_\alpha(t))$, получим утверждение теоремы для последовательности $\xi_n(t)$. Аналогично доказывается теорема для последовательности $\tilde{\xi}_n(t) =$

$\frac{Z(t/n)+\beta_\alpha(t/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n}$. Нужно рассмотреть последовательность $\left\{\tilde{v}_n(t) = \frac{V(t/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n}\right\}$ и воспользоваться [3, теорема 2].

Теорема доказана. □

Следствие 3. *В условиях теоремы 2 с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{Z(n)+\beta_\alpha(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}} = R\sqrt{2}, \qquad \liminf_{n\to\infty}\frac{Z(n)+\beta_\alpha(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}} = -R,$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{Z(1/n)+\beta_\alpha(1/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = R\sqrt{2}, \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{Z(1/n)+\beta_\alpha(1/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = -R.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что для любого непрерывного функционала F, заданного на $\mathbf{C}([0,1];E^{\alpha+1})$

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} F(\xi_n) = \sup_{f\in\mathcal{K}_R(\alpha+1)} F(f)\right\} = 1.$$

Выберем $F(f) = h(1) + \sqrt{\sum_{i=1}^{\alpha} g_i^2(1)}$ для $f(t) = (h(t), g_1(t), \ldots, g_\alpha(t))$ и докажем, что

$$\sup_{f\in\mathcal{K}_R(\alpha+1)} F(f) = \sqrt{2}R. \tag{3}$$

Заметим, что так как для абсолютно непрерывной функции $r(t)$ для которой $r(0) = 0$, $r(1) = \int_0^1 \dot{r}(t)dt$, то $r^2(1) \le \int_0^1 \dot{r}^2(t)dt$, а значит

$$F^2(f) \le 2\left[h^2(1) + \sum_{i=2}^{\alpha+1} g_i^2(1)\right] \le 2\int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt \le 2R^2.$$

Следовательно, $F(f) \le R\sqrt{2}$. Очевидно, что значение $R\sqrt{2}$ достигается на функции $f(t) \in \mathcal{K}_R(\alpha+1)$, при $h(t) = \frac{R}{\sqrt{2}}t,\ g_i(t) = \frac{R}{\sqrt{2\alpha}}t,\ i = 1, 2, \ldots, \alpha$. Далее заметим, что для любого непрерывного функционала F, заданного на $\mathbf{C}([0,1];E^{\alpha+1})$,

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} F(\xi_n) = \inf_{f\in\mathcal{K}_R(\alpha+1)} F(f)\right\} = 1.$$

Для определенного выше функционала $F(f)$ имеем

$$F(f) \ge h(1) \ge -\left(\int_0^1 \dot{h}^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge -\left(\int_0^1 |\dot{f}|^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge -R.$$

Т.о.

$$\inf_{f\in\mathcal{K}_R(\alpha+1)} F(f) \ge -R.$$

Знак равенства достигается на функции $f(t) = (-Rt, 0, 0..., 0) \in \mathcal{K}_R(\alpha+1)$.

Следствие доказано. □

Для последовательности $\left\{\frac{Z(n)+\beta_\alpha(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\right\}$ и функции $\varphi(n) = \sqrt{2\ln\ln n}$ число $R = 1$ и результат следствия 3 обобщает теорему 1.1 работы [14].

Используем теорему 2 для исследования закона типа повторного логарифма для броуновского движения, отраженного от независящего от него другого броуновского движения [13]. Такой процесс называется броуновской паутиной [8]. В работе [1, теорема 2.2] дано построение такого отраженного процесса. Пусть $Z(t)$-одномерный стандартный винеровский процесс, а $W(t)$ независимый от него одномерный стандартный винеровский процесс. Процесс, который описывает отражение процесса $W(t)$ от процесса $Z(t)$, есть процесс

$$Y(t) = -\frac{W(t) + \beta_3(t)}{\sqrt{2}}, \ \ \beta_3(0) = 0.$$

Из теоремы 2 и следствия 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Для* $\varphi \in \Phi$ *при* $n \to \infty$ *множество предельных точек последовательностей* $\left\{-\frac{Y(tn)}{\varphi(n)\sqrt{n}}\sqrt{2}\right\}$ *и* $\left\{-\frac{Y(t/n)}{\varphi(n)}\sqrt{2n}\right\}$, $t \in [0,1]$, *с вероятностью единица есть*

$$\Big\{f(t) + |g(t)| : (f(t), g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \in \mathcal{K}_R(4)\Big\}.$$

В частности, с вероятностью единица

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}} = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{Y(n)}{\varphi(n)\sqrt{n}} = -R,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y(1/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{Y(1/n)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = -R.$$

Исследуем теперь приращения бесселевских процессов.

Теорема 3. *Для* $\varphi \in \Phi$ *при фиксированном* $t \geq 0$ *и* $n \to \infty$ *множество предельных точек последовательности*

$$\left\{\frac{\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n}\right\},$$

как функции $v \in [0,1]$ *с вероятностью единица совпадает с* $\mathcal{K}_R(1)$.

Доказательство. Из (1) для $v > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\beta_\alpha(t+v/n) - \beta_\alpha(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n} =& \frac{\alpha-1}{2}\frac{1}{\varphi(n)\sqrt{n}} n\int_t^{t+v/n}\frac{1}{\beta_\alpha(s)}ds + \\ &+ \frac{w(t+v/n) - w(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n}.\end{aligned} \tag{4}$$

Для первого слагаемого в равенстве справа имеем

$$\sup_{v\in[0,1]} n\int_t^{t+v/n}\frac{1}{\beta_\alpha(s)}ds \le n\int_t^{t+1/n}\frac{1}{\beta_\alpha(s)}ds$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{v\in[0,1]} n\int_t^{t+v/n}\frac{1}{\beta_\alpha(s)}ds \le \frac{1}{\beta_\alpha(t)}.$$

Следовательно, равномерно по $v \in [0,1]$ предел первого слагаемого в (4) с вероятностью единица равен нулю.

При фиксированном t процесс $\tilde{w}(v) = w(t+v) - w(t)$ является винеровским и множество предельных точек второго слагаемого в (4) совпадает с $\mathcal{K}_R(1)$ [3, теорема 2].

Теорема доказана. □

Следствие 5. *Для* $\varphi \in \Phi$

$$P\left\{\limsup_{\delta\downarrow 0}\frac{|\beta_\alpha(t+\delta)-\beta_\alpha(t)|}{\varphi(1/\delta)\sqrt{\delta}} = R\right\} = 1.$$

Для функции $\varphi(n) = \sqrt{2\ln\ln n}$ *(тогда* $R = 1$*) это есть известный результат о гельдеровисти траекторий бесселевских процессов [6, параграф 2.7].*

Следствие 6. *Пусть* $F(\cdot)$ *- непрерывный на* $\mathbf{C}([0,1];E^1)$ *функционал. Тогда при фиксированном* $t > 0$ *множество предельных точек для*

$$F\left(\frac{\beta_\alpha(t+(\cdot)/n)-\beta_\alpha(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n}\right)$$

есть $F(\mathcal{K}_R(1))$ *с вероятностью единица. В частности, множество предельных точек последовательности*

$$\left\{\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\int_0^1\Big[\beta_\alpha(t+v/n)-\beta_\alpha(t)\Big]dv\right\}$$

с вероятностью единица есть $\mathcal{H}_R(1)$.

Для доказательства второй части следствия 3 нужно выбрать функционал $F(f(\cdot)) = \int_0^1 f(v)dv$.

Следствие 7. *При* $t \ge 0$ *с вероятностью единица*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\int_0^1\Big[\beta_\alpha(t+v/n)-\beta_\alpha(t)\Big]dv = \frac{R}{\sqrt{3}},$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\int_0^1\Big[\beta_\alpha(t+v/n)-\beta_\alpha(t)\Big]dv = -\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Доказательство. Для $f \in \mathcal{K}_R(1)$

$$\left(\int_0^1 f(v)dv\right)^2 = \left(\int_0^1 \int_0^t \dot{f}(v)dvdt\right)^2 = \left(\int_0^1 (1-v)\dot{f}(v)dv\right)^2 \leq$$
$$\leq \int_0^1 (1-v)^2 dv \int_0^1 (\dot{f}(v))^2 dv = \frac{1}{3}\int_0^1 (\dot{f}(v))^2 dv \leq \frac{R^2}{3}.$$

Т.о.

$$-\frac{R}{\sqrt{3}} \leq \int_0^1 f(v)dv \leq \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Верхняя граница равенства достигается на функции $f_1(v) = R\sqrt{3}\left(v - \frac{v^2}{2}\right)$, а нижняя – на функции $f_2(v) = -f_1(v)$.

Следствие доказано. □

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и число $\alpha \geq 2$ целое. При фиксированном $t \geq 0$ и $n \to \infty$ множество предельных точек последовательности*

$$\left\{\frac{\beta_\alpha^2(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha^2(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n}\right\}$$

как функции $v \in [0,1]$ с вероятностью единица имеет вид

$$\left\{2\beta_\alpha(t)f(v),\ f \in \mathcal{K}_R(1)\right\}.$$

Доказательство. Имеем,

$$\frac{\beta_\alpha^2(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha^2(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = \left[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\right]^2 \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} +$$
$$+ 2\beta_\alpha(t)\frac{\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n}.$$

Множество предельных точек второго слагаемого правой части этого равенства согласно теореме 3 совпадает совпадает с множеством, указанным в формулировке теоремы. Докажем теперь, что с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{v\in[0,1]} \frac{\left[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\right]^2}{\varphi(n)}\sqrt{n} = 0. \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$A_k = \left\{\sup_{n\geq 2^k} \sup_{v\in[0,1]} \frac{\left[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\right]^2}{\varphi(n)}\sqrt{n} > \varepsilon\right\}.$$

Покажем, что вероятность того, что происходит бесконечное число событие A_k, равно нулю. Имеем,

$$P\{A_k\} \le \sum_{m=k}^{\infty} P\Big\{\varepsilon \le \sup_{2^m \le n \le 2^{m+1}} \sup_{v\in[0,1]} \Big[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\Big]^2 \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\Big\}. \qquad (6)$$

Далее,

$$P\Big\{\varepsilon \le \sup_{2^m \le n \le 2^{m+1}} \sup_{v\in[0,1]} \Big[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\Big]^2 \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\Big\} \le$$
$$\le P\Big\{\frac{\varepsilon\varphi(2^m)}{\sqrt{2^{m+1}}} \le \sup_{2^m \le n \le 2^{m+1}} \sup_{v\in[0,1]} \Big[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\Big]^2\Big\} \le$$
$$\le P\Big\{\frac{\varepsilon\varphi(2^m)}{\sqrt{2^{m+1}}} \le \sup_{v\in[0,2^{-m}]} \Big[\beta_\alpha(t+v) - \beta_\alpha(t)\Big]^2\Big\} \le \frac{2^{m+1}}{\varepsilon^2\varphi^2(2^m)} \times$$
$$\times E \sup_{v\in[0,2^{-m}]} \Big[\beta_\alpha(t+v) - \beta_\alpha(t)\Big]^4.$$

Используем представление процесса $\beta_\alpha(t)$ из теоремы 1 и заменим $\beta_\alpha(t)$ на $|a+B(t)|$. Тогда

$$\Big|\beta_\alpha(t+v) - \beta_\alpha(t)\Big| \stackrel{d}{=} \Big||a+B(t+v)| - |a+B(t)|\Big| \le \Big|B(t+v) - B(t)\Big|.$$

Т.к. при фиксированном t процесс $B(t+v) - B(t)$ является мартингалом с характеристикой v, то применяя неравенство Бурхольдера–Ганди, получим с некоторой постоянной C

$$E \sup_{v\in[0,2^{-m}]} \Big[\beta_\alpha(t+v) - \beta_\alpha(t)\Big]^4 \le E \sup_{v\in[0,2^{-m}]} \Big|B(t+v) - B(t)\Big|^4 \le \frac{C}{2^{2m}}.$$

Следовательно,

$$P\Big\{\varepsilon \le \sup_{2^m \le n \le 2^{m+1}} \sup_{v\in[0,1]} \Big[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\Big]^2 \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\Big\} \le \frac{2C}{\varphi(2)\varepsilon^2}\frac{1}{2^m}.$$

Из (6) $P(A_k) \le \frac{2C}{\varphi(2)\varepsilon^2}\frac{1}{2^{k-1}}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$. По лемме Бореля–Кантелли для каждого $\varepsilon > 0$ и для почти всех ω найдется номер $N(\varepsilon, \omega)$ такой, что для всех $n > N$

$$\sup_{v\in[0,1]} \frac{\Big[\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)\Big]^2}{\varphi(n)} \sqrt{n} < \varepsilon.$$

Равенство (5) установлено.

Теорема доказана. □

В следующей теореме не предполагается, что α число целое.

Теорема 5. *Пусть $\alpha \geq 2$, $\varphi \in \Phi$ и $\lim_{n\to 0} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$. Тогда справедливо утверждение теоремы 4.*

Доказательство. Так как

$$\frac{\beta_\alpha^2(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha^2(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = \left[\frac{\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n}\right]^2 \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} + \\ + 2\beta_\alpha(t)\frac{\beta_\alpha(t+\frac{v}{n}) - \beta_\alpha(t)}{\varphi(n)}\sqrt{n},$$

то теорема следует из теоремы 4.

Теорема доказана. □

Аналогично следствиям 6 и 7 доказываются следующие утверждения.

Следствие 8. *В условиях теорем 4, 5 множество предельных точек при фиксированном $t \geq 0$ последовательности*

$$\left\{\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\int_0^1 \left[\beta_\alpha^2(t+v/n) - \beta_\alpha^2(t)\right]dv\right\}$$

с вероятностью единица есть $\left\{2\beta_\alpha(t)\int_0^1 f(v)dv,\ f \in \mathcal{K}_R(1)\right\}$.

Следствие 9. *В условиях теорем 4, 5 при $t \geq 0$ с вероятностью единица*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\int_0^1 \left[\beta_\alpha^2(t+v/n) - \beta_\alpha^2(t)\right]dv = 2\beta_\alpha(t)\frac{R}{\sqrt{3}},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}\int_0^1 \left[\beta_\alpha^2(t+v/n) - \beta_\alpha^2(t)\right]dv = -2\beta_\alpha(t)\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Результат [11, теорема 2.2] есть частный случай следствия 9 для классической нормировки $\varphi(n) = \sqrt{2\ln\ln n}$, т.к. $R = 1$.

Применим полученные результаты к исследованию локальных времен случайных процессов. Пусть

$$\zeta(t) = x + w(t),\ \ x > 0,\ \ t \geq 0.$$

Определим момент остановки $\tau = \inf\{t : \zeta(t) = 0\}$. Пусть $L^\zeta(t,y)$ – симметричное локальное время процесса $\zeta(t)$ в момент времени t в точке y :

$$L^\zeta(t,y) = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_0^t \chi_{[y-\delta,y+\delta]}(\zeta(s))ds.$$

Здесь $\chi_A(x)$ – индикатор множества A. Согласно теореме Рэя-Найта [10, VI.4, теорема 4.7], [12, XI.3 теорема 2.2] при $y \in [0,1]$ случайные процессы $L^\zeta(\tau,y) \overset{d}{=} \beta_2^2(y)$. Из теоремы 4 вытекает

Следствие 10. *Для* $\varphi \in \Phi$, $n \to \infty$ *и* $v \in [0,1]$ *множество предельных точек последовательности* $\left\{ \frac{L^{\zeta}(\tau,v/n)-L^{\zeta}(\tau,0)}{\varphi(n)}\sqrt{n} \right\}$ *с вероятностью единица есть* $\left\{ 2f(v)\sqrt{L^{\zeta}(\tau,0)},\ f \in \mathcal{K}_R(1) \right\}$. *В частности, с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L^{\zeta}(\tau,1/n)-L^{\zeta}(\tau,0)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = 2R\sqrt{L^{\zeta}(\tau,0)},$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L^{\zeta}(\tau,1/n)-L^{\zeta}(\tau,0)}{\varphi(n)}\sqrt{n} = -2R\sqrt{L^{\zeta}(\tau,0)}.$$

Для классической нормировки корень квадратный из двойного логарифма отсюда следует известный закон повторного логарифма для локальных времен [6, параграф 2.8].

Из следствий 8 и 9 получим

Следствие 11. *Для* $\varphi \in \Phi$, $n \to \infty$ *множество предельных точек последовательности*

$$\left\{ \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} \int_0^1 \Big[L^{\zeta}(\tau,v/n) - L^{\zeta}(\tau,0) \Big] dv \right\}$$

с вероятностью единица есть $\left\{ 2\sqrt{L^{\zeta}(\tau,0)} \int_0^1 f(v)dv,\ f \in \mathcal{K}_R(1) \right\}$. *В частности, с вероятностью единица*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} \int_0^1 \Big[L^{\zeta}(\tau,v/n) - L^{\zeta}(\tau,0) \Big] dv = L^{\zeta}(\tau,0)\frac{2R}{\sqrt{3}},$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)} \int_0^1 \Big[L^{\zeta}(\tau,v/n) - L^{\zeta}(\tau,0) \Big] dv = -L^{\zeta}(\tau,0)\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

1. *Bardzy K., Nualart D.* Brownian motion reflected Brownian motion // Annales de l'Institut Henri Poincare – Probabilites et Statistiques. – 2000. – V. 36. – P. 509-545.
2. *Бородин А.Н.* Броуновское локальное время // Успехи матем. наук. – 1989. – Т. 44, № 2. – С. 7-48.
3. *Budkov D.S., Makhno S.Ya.* Functional iterated logarith law for wiener process // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol. 13(29), № 3. – P. 23-28.
4. *Булинский А.В.* Новый вариантфункционального закона повторного логарифма // Теория вероятностей и ее применение. – 1980. – Т. 25, № 3. – С. 502-512.
5. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986.
6. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968.
7. *Fernholz E., Karatzas I.* Relative arbitrage in volatility-stabilized markets // Annals of Finance. – 2005. – Vol. 1. – P. 149-177.
8. *Fontes L.R.G., Isopi M., Newman S.M., Ravishankar K.* The Brownian web : characterization and convergence // Annals of probability. – 2004. – Vol. 32. – P. 2857-2883.
9. *German H., Yor M.* Bessel processes, Asian options and pertuites // Mathematical Finance. – 1993. – Vol. 3, № 4. – P. 349-375.

10. *Karatzas I., Shreve S.* Brownian motion and stochastic calkulus . – New-York inc, Springer-Verlag, 1988.
11. *Khoshnevisan D.* Exat rates of convergence to Brownian local time // The Annals of Probability. – 1994. – Vol. 22(3). – P. 1295-1330.
12. *Revuz D., Yor M.* Continous martingale and brownian motion. Berlin, Springer-Verlag, 1999.
13. *Soucaliuc F., Toth B., Werner W.* Reflection and coalescence between independent one dimensional Brownian paths // Annales de l'Institut Henri Poincare – Probabilites et Statistiques. – 2000. – Vol. 36. – P. 509-545.
14. *Chen X., Li W.* Limiting behaviors motion reflected on Brownian motion // Applications of Analisys. – 2002. – Vol. 9, № 3. – P. 377-392.

D. S. Budkov, S. Ya. Makhno

Functional iterated logarithm low for Bessel processes and for functionals on them.

The function law of the iterated law for Bessel processes and functionals on them for small times and large times are considered. The normalizing function is more general than classical function square root of the double logarithm.

Keywords: *Bessel process, functional on Bessel process, function law of the iterated law.*

Д. С. Будков, С. Я. Махно

Функціональний закон повторного логарифму для процесів Бесселя та функціоналів від них.

Доведені теореми типу функціонального закону повторного логарифму для процесів Бєсселя та функціонвлів від них при малих та великих проміжках часу. Нормующая функція є більш загальною, ніж класична функция квадратний корень із повторного логарифму.

Ключові слова: *процес Бєсселя, функціонал від процесу Бєсселя, функціональний закон повторного логарифму.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
`smakhno@gmail.com`

Получено 30.11.15