УДК 517.956.2

©2015. **Р. М. Джафаров**

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ТРЕХГРАННОМ УГЛЕ

Получен результат о регулярности решения в ограниченной области, образованной трехгранным углом.

Ключевые слова: *функция Грина, регулярность решения.*

1. Введение.

Как известно, существование углов, ребер на границе области, в которой рассматривается задача, ухудшает дифференциальные свойства решения. Так в [8, с. X], [8, с. 56, 57] выделены регулярная и сингулярная части решения, где сингулярная часть возникает вследствие угловой точки. В работе [2, лемма 2.1] Е. А. Волковым показано, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговом секторе с нулевыми граничными значениями на сторонах угла сектора имеет гладкость зависящую от величины угла сектора. Однако, если величина угла равна $\frac{\pi}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$, то решение будет принадлежать пространству C^∞, что соответствует случаю гладкой границы. В [3, с. 178] доказано, что задача

$$\Delta u = 1, \text{ на } D, \ u = 0 \text{ на } \partial D,$$

где D – многоугольник, имеет в качестве решения алгебраический многочлен только для равностороннего треугольника.

Нами рассмотрена задача Дирихле для уравнения Пуассона в областях образованных пересекающимися под углом $\frac{\pi}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$ кругами и сферами [7, с. 492]. Показано, что для нулевых граничных значений гладкость решения определяется гладкостью правой части.

В [4, с. 287] указано, что не существует углов (за исключением угла π) при которых решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения с нулевыми граничными значениями на некотором участке границы, прилегающем к угловой точке, будет бесконечно дифференцируемым.

Нами показано,что задача о свободно опертой пластинке для бигармонического уравнения с нулевыми граничными значениями на сторонах угла будет иметь бесконечно дифференцируемое решение. Подобный результат получен для уравнения Пуассона и в случае некоторой задачи для бигармонического уравнения в двугранном угле.

2. Основное утверждение.

Будем рассматривать задачу

$$\Delta u = f, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где Ω – трехгранный центральный угол $ADCO$, соответствующий вписанному в сферу с центром O тетраэдру $ABCD$. Величина угла $ADCO$ равна $\frac{\pi}{3}$ стерадиан.

Теорема. *Пусть* $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $\alpha = \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любого натурального* N $u(x)$ *имеет ограниченные непрерывные производные* N*-го порядка в* Ω', *где* $\Omega' = \Omega \bigcap B_R$ *(*B_R *– шар радиуса* R *с центром в начале координат:* $supp f \subset B_R$*).*

Решение будем понимать в классическом смысле.

3. Построение функции Грина.

Трехгранный угол $ADCO$ является областью циклически чередующейся в процессе отражений [6, гл. I]. Функция Грина для таких областей может быть представлена в виде конечной суммы слагаемых, в которые входит фундаментальное решение.

Возьмем точку P_0 внутри $ADCO$. Обозначим зеркальные отражения относительно плоскостей AOD, COD и AOC через 1, 2, 3 соответственно. Так что запись $P_0 1 P_1$ будет обозначать, что P_1 получена зеркальным отражением точки P_0 относительно AOD. Проведем следующий ряд отражений

$$P_0 1 P_1;\ P_1 2 P_2;\ P_2 3 P_3;\ P_3 1 P_4;\ P_4 2 P_5;\ P_5 3 P_6;\ P_6 1 P_7;\ P_7 2 P_8;\ P_8 3 P_9;\ P_9 1 P_{10};\ P_{10} 2 P_{11};$$

$$P_0 2 Q_1;\ Q_1 1 Q_2;\ Q_2 2 Q_3;\ Q_3 3 Q_4;\ Q_4 1 Q_5;\ Q_5 2 Q_6;\ Q_6 3 Q_7;\ Q_7 1 Q_8;\ Q_8 2 Q_9;$$

$$Q_9 3 Q_{10};\ Q_{10} 1 Q_{11};\ Q_{11} 2 Q_{12}.$$

Дальнейшие отражения совпадут с полученными точками. Переобозначим P_0, $P_1, \ldots P_{11}$ на $\xi = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{11}$ и $Q_1, Q_2, \ldots Q_{12}$ на $\xi_{12}, \xi_{13}, \ldots, \xi_{23}$. Тогда функция Грина примет вид

$$G(x, \xi) = \sum_{i=0}^{23} (-1)^i E(x, \xi^i), \quad \text{где}$$

$$E(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi|} \ \text{– фундаментальное решение}$$

уравнения Лапласа.

Непосредственно проверяется, что условие (2) выполняется, так как у каждой точки ξ^i, $i = \overline{0, 23}$ есть образ относительно каждой из плоскостей AOD, COD и AOC среди точек ξ^0, ξ^1, $\ldots \xi^{23}$, причем в сумму, определяющую функцию Грина такие слагаемые входят с разными знаками.

4. Доказательство теоремы.

Интегральное представление решения в области $\Omega'' = \Omega \bigcap B_{R+1}$, ограниченной кусочно-гладкой границей как следствие из [8, теорема 1.5.1] имеет вид

$$u(\xi) = \int_{\Omega''} G(x, \xi) f(x) dx \ - \int_\Gamma G(x, \xi) \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\Gamma \ + \int_\Gamma u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n} d\Gamma,$$

где Γ – граница области Ω''. Представим

$$u(\xi) = v(\xi) + w(\xi), \quad \text{где}$$

$$v(\xi) = \int_{\Omega''} G(x,\xi) f(x) dx,$$

$$w(\xi) = -\int_S G(x,\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial n} dS + \int_S u(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n} dS,$$

где S – сферический участок границы $\partial\Omega''$. Интегралы по плоским участкам $\partial\Omega''$, образующим грани трехгранного угла, в силу условия (2), равны нулю.

Вследствие внутренних шаудеровских оценок [1, с. 244] и принципа максимума [1, с. 161]

$$\left|\frac{\partial(u(x)}{\partial n}\right| \le \|f\|_{C^0(\Omega)}.$$

Тогда $\forall\xi \in \Omega'$,

$$\left|\int_S G(x,\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial n} dS\right| \le \|f\|_{C^0(\Omega')}.$$

Второй интеграл по S, входящий в $w(\xi)$ имеет такую же оценку. Так же оцениваются и производные $w(\xi)$, $\xi \in \Omega'$.

Рассмотрим производные $\frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi_j}$.

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi_j}\int_{\Omega''} G(x,\xi) f(x) dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{23}(-1)^i(-\frac{1}{4\pi})\int_{\Omega''}\frac{x_j - \xi_j^i}{|x-\xi^i|^3} f(x) dx\right| \le C\|f\|_{C^0(\Omega)}.$$

$$\left|\frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial v(\zeta)}{\partial \zeta_j}\right| = \left|\sum_{i=0}^{23}(-1)^i(-\frac{1}{4\pi})\left\{\int_{\Omega''}\frac{x_j - \xi_j^i}{|x-\xi^i|^3} f(x) dx - \int_{\Omega''}\frac{x_j - \zeta_j^i}{|x-\zeta^i|^3} f(x) dx\right\}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{23}(-1)^i(-\frac{1}{4\pi})\int_{\mathbf{R}^3}\frac{z_j}{|z|^3}\{f(z+\xi^i) - f(z+\zeta^i)\} dz\right| \le C|\xi - \zeta|,$$

где C зависит от Ω'', $\|f\|_{C_0^\infty}$. Для вторых производных имеем оценки

$$\left|\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right| = \left|\int_{\Omega''}(-1)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} G(x,\xi)\right) f(x) dx\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\partial}{\partial \xi_j} G(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) dx\right| \le C\|f\|_{C^1(\Omega)}$$

$$\left|\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} - \frac{\partial^2 v(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}\right| = \left|\int_{\Omega''}(-1)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} G(x,\xi) - \frac{\partial}{\partial \zeta_j} G(x,\zeta)\right) f(x) dx\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbf{R}^3}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} G(x,\xi) - \frac{\partial}{\partial \zeta_j} G(x,\zeta)\right)\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} dx\right| \le C\,|\xi - \zeta|.$$

Аналогично для производных N - порядка,

$$|D^{\beta}v(\xi)| \leq C\|f\|_{C^{N-1}(\Omega)},$$

$$|D^{\beta}v(\xi) - D^{\beta}v(\zeta)| \leq C|\xi - \zeta|,$$

где $|\beta| = N$ – некоторый мультииндекс. Отсюда следует их ограниченность и непрерывность. Теорема доказана.

5. Замечания.

1. Можно предположить, что многогранных углов, для которых возможно приведенное выше построение функции Грина, всего пять. Это центральные углы, опирающиеся на грани вписанных в сферу тетраэдра, октаэдра, куба, додекаэдра и икосаэдра.
2. Доказанная теорема для плоских углов может быть обобщена на случай $f \in C^{\infty}(\Omega')$. Для этого следует воспользоваться продолжением N раз непрерывно дифференцируемой функции во внешность угла с сохранением класса [5, с. 594].

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
2. *Волков Е.А.* О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках // Труды математического института им. Стеклова. – 1965. – **77**. – С. 133-152.
3. *Волков Е.А.* Об одном свойстве решений уравнения Пуассона на многоугольниках // Математические заметки. – 1999. – **66**, № 2. – С. 178-180.
4. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского математического общества. – 1967. – **16**. – С. 219-292.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1. – М.: Гостнхиздат. – 1969. – 607 с.
6. *Шестопал А. Ф.* Метод разложения по фундаментальным решениям в применении к задачам математической физики: Дис. доктора физ.-мат. наук. – Киев, 1969. – 394 с.
7. *Dzhafarov R.* On the Infinite Differentiability of Solutions of a Boundary-Value Problem for a Polyharmonic Equation in an Angular domain // Ukrainian Mathematical Bulletin. – 2005. – V. 2, № 4. – P. 487-494.
8. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. – RMA 22, Masson, Paris. – 1992. – 198 p.

R. M. Dzhafarov

On thre regularity of a solution of the Poisson equation in the trihedral corner.

We establish the regularity of a solution in a bounded domain with a trihedral corner at the boundary.

Keywords: *Green function, regularity of solution.*

Р. М. Джафаров

Про регулярність розвязку рівняння Пуасона у триграному куті.

Отримано нескінченну диференційовність розв'язку в обмеженій області, що утворена тригранним кутом.

Ключові слова: *функція Грина, регулярність розв'язку.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
dzhafarov@ukr.net

Получено 25.12.15