ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2015. Том 29

УДК 517.5

 А. С. Ефимушкин

О ЗАДАЧАХ НЕЙМАНА И ПУАНКАРЕ ДЛЯ A-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказано существование неклассических решений задачи Неймана и задачи о косой производной для обобщений уравнения Лапласа в анизотропных неоднородных средах в почти гладких жордановых областях с произвольными граничными данными измеримыми относительно логарифмической ёмкости. Показано, что пространства таких решений всегда имеют бесконечную размерность.

Ключевые слова: *задача Неймана, задача о косой производной, задача Пуанкаре, А-гармонические функции, логарифмическая ёмкость, анизотропные неоднородные среды*

1. Введение.

Классические граничные задачи в теории гармонических и аналитических функций и их обобщений, такие как задачи Дирихле, Римана, Гильберта, Неймана и Пуанкаре, играют важную роль в современном анализе и его приложениях ко многим задачам математической физики, см., например, [1]–[6]. В этой статье мы продолжаем развитие теории указанных граничных задач для гармонических функций и их обобщений в жордановых областях с измеримыми граничными данными.

Хорошо известно, что задача Неймана для уравнения Лапласа не имеет классических решений, вообще говоря даже для некоторых непрерывных граничных данных, см., например, [7]. Основная цель данной статьи – показать, что задача Неймана имеет неклассические решения при произвольных граничных данных измеримых относительно логарифмической емкости как для уравнения Лапласа, так и его обобщений. Результат основывается на ее редукции к соответствующей задаче Римана-Гильберта, решения которой были недавно получены в [3].

Прежде всего, напомним более общую *задачу о косой производной* для гармонических функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $z = x + iy$. В классической постановке этой задачи ставится вопрос о нахождении функции $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, которая является дважды непрерывно дифференцируемой и допускает непрерывное продолжение на границу $\mathbb{D}$ вместе со своими частными производными первого порядка, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

и граничному условию с предписанной непрерывной функцией $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\zeta) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad \forall \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\zeta)$ обозначает *производную по направлению* $\nu = \nu(\zeta)$ функции u в точке ζ, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\zeta) \ := \ \lim_{t\to 0} \ \frac{u(\zeta + t\cdot\nu) - u(\zeta)}{t} \ .$$

Задача Неймана является специальным случаем указанной задачи о косой производной с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad\qquad \forall \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

где $n = n(\zeta)$ обозначает единичную внутреннюю нормаль к $\partial\mathbb{D}$ в точке ζ.

В свою очередь, задача о косой производной является частным случаем *задачи Пуанкаре* с граничным условием

$$a(\zeta)\cdot u(\zeta) \ + \ b(\zeta)\cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(\zeta) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad\qquad \forall \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

где a и b – вещественнозначные функции, заданные на $\partial\mathbb{D}$.

Напомним также, что дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Лапласа называется *гармонической функцией.* Как известно, такие функции являются бесконечно дифференцируемыми, а также они являются действительной и мнимой частями аналитических функций.

2. Определения и предварительные замечания.

Дифференциальные уравнения в частных производных в дивергентной форме играют важную роль во многих задачах математической физики, в частности, в анизотропных неоднородных средах. Эти уравнения тесно связаны с уравнением Бельтрами, см., например, [1].

Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. *Уравнением Бельтрами* в D с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar z} = \mu(z)\cdot f_z \tag{1}$$

где $f_{\bar z} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные функции $f : D \to \mathbb{C}$ по x и y, соответственно. Уравнение (1) называется *невырожденным*, если $||\mu||_\infty < 1$.

Если f – решение невырожденного уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, то $u := \mathrm{Re} f$ – *A-гармоническая функция*, т.е. непрерывное обобщенное решение дивергентного уравнения

$$\mathrm{div} A(z)\nabla u = 0, \tag{2}$$

где $A(z)$ – матричная функция:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{|1-\mu|^2}{1-|\mu|^2} & \frac{-2\mathrm{Im}\mu}{1-|\mu|^2} \\ \frac{-2\mathrm{Im}\mu}{1-|\mu|^2} & \frac{|1+\mu|^2}{1-|\mu|^2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Другими словами $u \in C \cap W^{1,1}$ и

$$\int\limits_D \langle A(z)\nabla u, \nabla \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(D)\ .$$

Как это видно из (3), матрица $A(z)$ является симметричной, $\det A = 1$, и ее элементы $a_{ij} = a_{ij}(z)$ мажорируются величиной

$$K_\mu(z) := \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}\ ,$$

т.е. они ограничены, если уравнение Бельтрами (1) является невырожденным.

Обратно, равномерно эллиптическому уравнению (2) с симметрическими матрицами $A(z)$ и $\det A(z) \equiv 1$ соответствует невырожденное уравнение Бельтрами (1) с коэффициентом

$$\mu \ = \ \frac{1}{\det\,(I+A)}\ (a_{22}-a_{11} \ - \ 2ia_{21}) \ = \ \frac{a_{22}-a_{11} \ - \ 2ia_{21}}{1 \ + \ \mathrm{Tr}\,A \ + \ \det A}\ , \tag{4}$$

где I обозначает единичную 2×2 матрицу $\mathrm{Tr}\,A = a_{22}+a_{11}$, см., например, теорему 16.1.6 в [1]. Следуя [2], называем такие матричные функции $A(z)$ функциями *класса* $\mathcal{B}$. Напомним, что уравнение (2) называется *равномерно эллиптическим*, если $a_{ij} \in L^\infty$ и $\langle A(z)\eta, \eta\rangle \geq \varepsilon|\eta|^2$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\eta \in \mathbb{R}^2$.

Наконец, напомним, что гомеоморфные решения класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ невырожденных уравнений Бельтрами (1) называются *квазиконформными отображениями*, см., например, [8] и [9]. *Квазидисками* именуются образы единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при квазиконформных отображениях $\mathbb{C}$ на себя, а их границы – *квазиокружностями* или *квазиконформными кривыми*. Напомним, что *жордановой кривой* называется взаимнооднозначный непрерывный образ окружности в $\mathbb{C}$. Известно, что любая гладкая (или липшицева) жорданова кривая является квазиконформной кривой, см., например, пункт II.8.10 в [9].

3. Еще раз о Неймане и Пуанкаре для гармонических функций.

Начнем с единичного круга, поскольку в этом случае доказательства являются гораздо более прямыми и прозрачными.

Теорема 1. *Пусть функция* $\nu : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$, *– ограниченной вариации, а функция* $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция* $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *такая, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{\partial u}{\partial \nu} \ = \ \varphi(\zeta) \tag{5}$$

для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ *относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Действительно, по предложению 6.1 в [3] существует аналитическая функция $f : D \to \mathbb{C}$ такая, что вдоль любых некасательных путей

$$\lim_{z\to\zeta}\ \mathrm{Re}\ \overline{\nu(\zeta)\cdot f(z)}\ =\ \lim_{z\to\zeta}\ \mathrm{Re}\ \nu(\zeta)\cdot f(z)\ =\ \varphi(z) \tag{6}$$

для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Тогда неопределенный интеграл F функции f в $\mathbb{D}$ также является аналитической функцией, и гармонические функции $u = \mathrm{Re}\, F$ и $v = \mathrm{Im}\, F$ удовлетворяют системе Коши-Римана $v_x = -u_y$ и $v_y = u_x$. Следовательно,

$$f\ =\ F'\ =\ F_x\ =\ u_x\ +\ i\cdot v_x\ =\ u_x\ -\ i\cdot u_y\ =\ \overline{\nabla u}\ ,$$

где $\nabla u = u_x + i\cdot u_y$ - градиент функции u, записанный в комплексной форме. Таким образом, (5) следует из (6), т.е. u – искомая гармоническая функция, поскольку производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ равна проекции градиента ∇u на направление ν, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\ =\ \mathrm{Re}\, \overline{\nu}\cdot\nabla u\ =\ \mathrm{Re}\, \nu\cdot\overline{\nabla u}\ =\ \langle \nu, \nabla u\rangle$$

где в последнем равенстве ν и ∇u уже интерпретируются как векторы в $\mathbb{R}^2$ и, как и выше, $\langle a, b\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов a и b в $\mathbb{R}^2$. □

Замечание 1. Мы можем сказать больше в случае, когда $\mathrm{Re}\ n\cdot\overline{\nu} > 0$, где $n = n(\zeta)$ – единичная внутренняя нормаль в точке $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ к границе. В силу условия (4), поскольку предел $\varphi(\zeta)$ конечен, существует конечный предел $u(\zeta)$ функции $u(z)$ при $z \to \zeta$ в $\mathbb{D}$ вдоль прямой, проходящей через точку ζ и параллельной вектору $\nu(\zeta)$, т.к. вдоль этой прямой, для точек z и z_0 достаточно близких к ζ,

$$u(z) = u(z_0) - \int\limits_0^1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(z_0 + \tau(z - z_0))\ d\tau.$$

Таким образом, в каждой точке $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ с условием (4), существует производная

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\zeta) := \lim_{t\to 0}\frac{u(\zeta + t\cdot\nu) - u(\zeta)}{t} = \varphi(\zeta).$$

В частности, на основе теоремы 1 и замечания 1, получаем следующий результат для задачи Неймана.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется гармоническая функция $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ такая, что для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической емкости существует:*

1. *конечный радиальный предел*

$$u(\zeta) := \lim_{r\to 1} u(r\zeta)$$

2. нормальная производная

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) := \lim_{t\to 0}\frac{u(\zeta + t\cdot n) - u(\zeta)}{t} = \varphi(\zeta)$$

3. некасательный предел

$$\lim_{z\to\zeta}\frac{\partial u}{\partial n}(z) = \frac{\partial u}{\partial n}(\zeta)\ .$$

Доказательство аналогичных результатов для случая произвольных гладких жордановых областей, хотя и является достаточно простым, однако, требует более изощренных рассуждений и привлечения целого ряда глубоких результатов геометрической теории функций.

Напомним, что жорданова область называется *липшицевой*, если ее граница является билипшицевым образом окружности. Понятно, что такая кривая спрямляема, а спрямляемые кривые имеют касательные почти во всех точках относительно меры длины. Будем говорить, что жорданова область является *почти гладкой*, если она липшицева и имеет касательную почти во всех точках относительно логарифмической емкости.

Теорема 3. *Пусть D – почти гладкая жорданова область в $\mathbb{C}$, $\nu : \partial D \to \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$, – функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ – функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция $u : D \to \mathbb{R}$ такая, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta}\frac{\partial u}{\partial \nu} \ = \ \varphi(\zeta) \tag{7}$$

для п.в. $\zeta \in \partial D$ относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Случай гладких жордановых областей D редуцируется к случаю единичного круга $\mathbb{D}$ следующим образом. Во-1-х, по теореме Римана найдется конформное отображение ω области D на $\mathbb{D}$, см., например, теорему II.2.1 в [10]. Далее, по тереме Каратеодори ω продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\mathbb{D}}$, см. например, теорему II.C.1 в [11].

Как уже отмечалось в секции 2, границы липшицевых областей являются квазиконформными кривыми. Таким образом, по принципу отражения для квазиконформных отображений, привлекая конформное отражение (инверсию) относительно единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ в образе и квазиконформное отражение относительно ∂D в прообразе, можно продолжить ω до квазиконформного отображения $\Omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, см., например, I.8.4, II.8.2 и II.8.3 в [9]. При этом очевидно, что $\mathcal{N} := \nu\circ\Omega^{-1}|_{\partial\mathbb{D}}$ является функцией ограниченной вариации, $V_{\mathcal{N}}(\partial\mathbb{D}) = V_{\nu}(\partial D)$.

Логарифмическая ёмкость множества совпадает с его трансфинитным диаметром, см., например, [12] или пункт 110 в [13]. Кроме того, квазиконформные отображения являются непрерывными по Гёльдеру на компактах, см., например, теорему II.4.3 в [9]. Таким образом, при отображениях Ω и Ω^{-1} множества логарифмической ёмкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической ёмкости нуль на $\partial\mathbb{D}$ и обратно.

Поэтому функция $\Phi := \varphi \circ \Omega^{-1}|_{\partial\mathbb{D}}$ является измеримой относительно логарифмической ёмкости. Действительно, при указанных отображениях любые множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, переходят в множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической ёмкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и являются измеримыми множествами относительно логарифмической ёмкости.

Теперь, по теореме Линделёфа $\arg\,[\omega(\zeta) - \omega(z)] - \arg\,[\zeta - z] \to const$ при $z \to \zeta$ для любой точки $\zeta \in \partial D$, в которой ∂D имеет касательную, см. например, теорему II.C.2 в [11]. Таким образом, некасательные пути в D к точке $\zeta \in \partial D$ при отображении ω преобразуются в некасательные пути в $\mathbb{D}$ к точке $\xi = \omega(\zeta) \in \partial\mathbb{D}$ для п.в. $\zeta \in \partial D$ относительно логарифмической емкости. И обратно, при отображении ω^{-1} некасательные пути в $\mathbb{D}$ к точке $\xi \in \partial\mathbb{D}$ преобразуются в некасательные пути в D к точке $\zeta = \omega^{-1}(\xi) \in \partial D$ для п.в. $\xi \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической емкости.

По теореме 1 найдется гармоническая функция $U : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ такая, что вдоль любых некасательных путей

$$\lim_{w\to\xi} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{N}}\,(w) \;=\; \Phi(\xi) \tag{8}$$

для п.в. $\xi \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Далее, в односвязной области $\mathbb{D}$ найдется гармоническая функция $V : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ такая, что $g := U + i \cdot V$ является (однозначной) аналитической функцией в $\mathbb{D}$.

Пусть F - неопределенный интеграл аналитической функции $g' \cdot (\omega^{-1})'$ в $\mathbb{D}$ и пусть $f := F \circ \omega$. Тогда F и f также являются (однозначными) аналитическими функциями в $\mathbb{D}$ и D, соответственно, и элементарные вычисления показывают, что

$$f' \;=\; F'\circ\omega\cdot\omega' \;=\; F'\circ\omega\cdot(\omega'\circ\omega^{-1})\circ\omega \;=\; [F'/(\omega^{-1})']\circ\omega \;=\; g'\circ\omega\ .$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \;=\; \nu\cdot f' \;=\; \nu\cdot g'\circ\omega \;=\; \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}}\circ\omega\ ,$$

где $\nu = \nu(\zeta)$, $\zeta \in \partial D$, и $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\xi)$, $\xi = \omega(\zeta) \in \partial\mathbb{D}$. Следовательно, для $u := \mathrm{R}e\, f$ мы имеем равенство

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \;=\; \frac{\partial U}{\partial \mathcal{N}}\circ\omega$$

и поэтому u является искомой гармонической функцией. □

Из теоремы 3, рассуждая как в замечании 1, получаем следующий результат для задачи Неймана.

Теорема 4. *Пусть D – почти гладкая жорданова область в $\mathbb{C}$ и функция $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется гармоническая функция $u : D \to \mathbb{C}$ такая, что для п.в. $\zeta \in \partial D$ относительно логарифмической емкости существует:*

1. *конечный предел по нормали*

$$u(\zeta) \ := \ \lim_{z\to\zeta} \ u(z)$$

2. *нормальная производная*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) \ := \ \lim_{t\to 0} \ \frac{u(\zeta + t\cdot n) \ - \ u(\zeta)}{t} \ = \ \varphi(\zeta)$$

3. *некасательный предел*

$$\lim_{z\to\zeta} \ \frac{\partial u}{\partial n}(z) \ = \ \frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) \ .$$

4. О задачах Неймана и Пуанкаре для A-гармонических функций.

Теорема 5. *Пусть D – почти гладкая жорданова область в $\mathbb{C}$, $A(z)$, $z\in D$, – матричная функция класса $\mathcal{B}\cap C^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, $\nu:\partial D\to\ \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)|\equiv 1$, – функция ограниченной вариации и $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ – функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует A-гармоническая функция $u:D\to\mathbb{R}$ класса $C^{1+\alpha}$ такая, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(\zeta) \tag{9}$$

для п.в. $\zeta\in\partial D$ относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Согласно замечаний секции 2, искомая функция u должна являться вещественной частью решения f класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ соответствующего уравнения Бельтрами с $\mu\in C^{\alpha}$, см. теорему 16.1.6 в [1]. По лемме 1 в [2] функция μ продолжима до функции $\mu_*:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ класса C^{α}. Заметим поэтому, что для любого $k_*\in(k,1)$ найдется окрестность U замыкания области D такая, что $|\mu(z)|<k_*$. Пусть D_* – компонента связности U, содержащая $\overline{D}$.

Тогда существует квазиконформное отображение $h:D_*\to\mathbb{C}$, удовлетворяющее уравнению (1) с комплексным коэффициентом $\mu^*=\mu_*|_{D_*}$ в D_*, см., например, теорему V.B.3 в [2]. При этом, отображение h имеет непрерывные по Гёльдеру первые частные производные в D_* с тем же показателем α, что и μ, см., например, [14] и [15]. Кроме того, отображение h регулярно, т.е. его якобиан

$$J_h(z)\neq 0 \qquad\qquad \forall\ z\in D_*\ , \tag{10}$$

см., например, теорему V.7.1 в [9]. Таким образом, производная по направлению

$$h_{\omega}(z)=\frac{\partial h}{\partial\omega}(z) \ := \ \lim_{t\to 0} \ \frac{h(z \ + \ t\cdot\omega) \ - \ h(z)}{t} \ \neq \ 0 \qquad\qquad \forall\ z\in D_*\ \forall\ \omega\in\partial\mathbb{D}$$

и является непрерывной по совокупности переменных $\omega \in \partial\mathbb{D}$ и $z \in D_*$, т.е. тем более удовлетворяет условиям Каратеодори. Поэтому функции

$$\nu_*(\zeta) \ := \ \frac{|h_{\nu(\zeta)}(\zeta)|}{h_{\nu(\zeta)}(\zeta)} \quad \text{и} \quad \varphi_*(\zeta) \ := \ \frac{\varphi(\zeta)}{|h_{\nu(\zeta)}(\zeta)|}$$

измеримы относительно логарифмической ёмкости, ср., например, 17.1 в [19].

Логарифмическая ёмкость множества совпадает с его трансфинитным диаметром, см., например, [12] или пункт 110 в [13]. Кроме того, квазиконформные отображения являются непрерывными по Гёльдеру на компактах, см., например, теорему II.4.3 в [9]. Таким образом, при отображениях h и h^{-1} множества логарифмической ёмкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической ёмкости нуль на ∂D^*, где $D^* := h(D)$, и обратно.

Тогда функции $\mathcal{N} := \nu_* \circ h^{-1}|_{\partial D^*}$ и $\Phi := \varphi_* \circ h^{-1}|_{\partial D^*}$ являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости. Действительно, при отображениях h и h^{-1} любые множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости переходят в множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической ёмкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и, при этом, являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости.

Напомним, что при квазиконформных отображенияз h и h^{-1} искажение углов ограничено, см., например, [16]–[18], и потому некасательные пути к ∂D переходят в некасательные пути к ∂D^* для п.в. $\zeta \in \partial D$ относительно логарифмической емкости, и обратно, некасательные пути к ∂D^* переходят в некасательные пути к ∂D для п.в. $\xi \in \partial D^*$ относительно логарифмической емкости.

По теореме 3 найдется гармоническая функция $U : D^* \to \mathbb{R}$ такая, что вдоль любых некасательных путей

$$\lim_{w \to \xi} \ \frac{\partial U}{\partial \mathcal{N}}(w) \ = \ \Phi(\xi) \tag{11}$$

для п.в. $\xi \in \partial D^*$ относительно логарифмической ёмкости.

В односвязной области D^* найдется гармоническая функция V такая, что $F = U + iV$ является аналитической функцией и, следовательно, $u := \mathrm{Re}\, f = U \circ h$, где $f := F \circ h$, является искомой $A-$гармонической функцией, поскольку f является регулярным решением соответствующего уравнения Бельтрами (1) и, кроме того,

$$u_\nu = \langle \, \nabla U \circ h \, , \, h_\nu \, \rangle = \langle \, \nu_* \cdot \nabla U \circ h \, , \, \nu_* \cdot h_\nu \, \rangle = \langle \, \frac{\partial U}{\partial \mathcal{N}} \circ h \, , \, \nu_* \cdot h_\nu \, \rangle = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{N}} \circ h \cdot \mathrm{R}e\,(\nu_* h_\nu),$$

т.е. условие (9) выполнено для п.в. $\zeta \in \partial D$ относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. $\Box$

Следующий результат, касательно задачи Неймана для A-гармонических функций, является специальным случаем теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть D – почти гладкая жорданова область в $\mathbb{C}$, для которой единичная внутренняя нормаль $n = n(\zeta)$ к ∂D имеет ограниченную вариацию, $A(z)$, $z \in D$, – матричная функция класса $\mathcal{B} \cap C^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, и $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ – функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует A-гармоническая функция $u : D \to \mathbb{R}$ класса $C^{1+\alpha}$ такая, что для п.в. $\zeta \in \partial D$ относительно логарифмической емкости существует:*

1. *конечный предел по нормали*

$$u(\zeta) \ := \ \lim_{z\to\zeta} \ u(z)$$

2. *нормальная производная*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) \ := \ \lim_{t\to 0} \ \frac{u(\zeta + t\cdot n) \ - \ u(\zeta)}{t} \ = \ \varphi(\zeta)$$

3. *некасательный предел*

$$\lim_{z\to\zeta} \ \frac{\partial u}{\partial n}(z) \ = \ \frac{\partial u}{\partial n}(\zeta) \ .$$

В частности, в единичном круге $\mathbb{D}$ единичная внутренняя нормаль $n = n(\zeta)$ к $\partial\mathbb{D}$ имеет ограниченную вариацию и заключения 1–3 теоремы 6 имеют место.

5. О размерности пространства решений.

Теорема 7. *В теоремах 1–6 все пространства решений имеют бесконечную размерность.*

Доказательство. Ввиду эквивалентности задачи о косой производной и соответствующей задачи Римана–Гильберта, установленной в теореме 1, заключение теоремы 7 следует из работы [5]. □

1. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane // Princeton Math. Ser. – 48. – Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane // Укр. мат. вестник. – 2015. – T. 12, №3. – С. 363-389.
3. *Ефимушкин А.С., Рязанов В.И.* О задаче Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в квазидисках // Укр. мат. вестник. – 2015. – T. 12, №2. – С.190-209.
4. *Ryazanov V.* On the Riemann-Hilbert Problem without Index // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2014. – V. 5 (LXIII), no. 1. – P. 169-178.
5. *Ryazanov V.* Infinite dimension of solutions of the Dirichlet problem // Open Math. (the former *Central European J. Math.*). – 2015. – V. 13, no. 1. – P. 348-350.
6. *Ryazanov V.* On Neumann and Poincare problems for Laplace equation // arXiv.org: 1510.00733v5 [math.CV] 26 Oct 2015, 1–5.
7. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.:Высшая школа, 1977.
8. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969.
9. *Lehto O., Virtanen K.J.* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
10. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

11. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984.
12. *Fékete M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – V. 17. – P. 228-249.
13. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. - М.:ОГИЗ, 1941.
14. *Iwaniec T.* Regularity of solutions of certain degenerate elliptic systems of equations that realize quasiconformal mappings in n-dimensional space // Differential and integral equations. Boundary value problems. – Tbilisi: Tbilis. Gos. Univ., 1979. – P. 97-111.
15. *Iwaniec T.* Regularity theorems for solutions of partial differential equations for quasiconformal mappings in several dimensions // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) – 1982. – V. 198. – 45 p.
16. *Agard S.* Angles and quasiconformal mappings in space // J. Anal. Math. – 1969. – V. 22. – P. 177–200.
17. *Agard S.B., Gehring F.W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3) – 1965. – V. 14a. – P. 1-21.
18. *Taari O.* Charakterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerrung // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. – 1966. – V. 390. – P. 1-43.
19. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966.

A. S. Yefimushkin

On the Neumann and Poincare problems for A-harmonic functions..

It is proved the existence of nonclassical solutions of the Neumann and Poincare problems for generalizations of the Laplace equation in anisotropic and nonhomogeneous media in almost smooth domains with arbitrary boundary data that are measureable with respect to logarithmic capacity. Moreover, it is shown that the spaces of these solutions have the infinite dimension.

Keywords: *Neumann problem, Poincare problem, A-harmonic functions, logarithmic capacity, anisotropic and nonhomogeneous media.*

А. С. Єфімушкін

Про задачі Неймана та Пуанкаре для A-гармонічних функцій..

Доведено існування некласичних розв'язків задачі Неймана та задачі про похилу похідну для узагальнень рівняння Лапласа в анізотропних неоднорідних середовинах в майже гладких жорданових областях із довільними граничиними даними, що є вимірюваними відносно логарифмічної ємності. Показано що простори таких розв'язків завжди мають нескінчену розмірність.

Ключові слова: *задача Неймана, задача Пуанкаре, A-гармонічні функції, логарифмічна ємність, анізотропні неоднородні середовища.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
`a.yefimushkin@gmail.com`

Получено 21.11.15