УДК 517.5+513.83

©2016. **Ю. Б. Зелинский, Х. К. Дакхил**

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ТЕНИ ДЛЯ ШАРОВ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Главная цель работы — решение задачи о тени для шаров фиксированного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве. Широкий спектр близких задач исследовался в работах одного из авторов и его учеников. Эту задачу можно рассматривать как нахождение необходимых и достаточных условий обеспечивающих принадлежность точки обобщенно выпуклой оболочке семейства шаров фиксированного радиуса.

***Ключевые слова:*** *Евклидово пространство, шар, задача о тени, обобщенная выпуклость.*

*Статья посвящена 75-летнему юбилею Владимира Гутлянского, прекрасного ученого и человека.*

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задачу о тени для шаров одинакового радиуса.

**Задача.** Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров одинакового радиуса в трехмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно чтобы любая прямая, проходящая через фиксированную точку пространства, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Впервые аналогичная задача рассмотрена Г. Худайбергановым [1, 2] для шаров в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, центры которых лежат на фиксированной сфере. Различные близкие проблемы исследовались на протяжении последних двух лет в работах [3–10]. Рассматриваемая здесь задача формулировалась в списке открытых проблем на конференциях: XI Международная математическая летняя школа "Алгебра, Топология, Анализ" 1–14.08.2016 г. в Одессе и "International conference dedicated to the $120^{th}$ anniversary of Kazimierz Kuratowski" 27.09–1.10.2016 г. в Львове [11–12].

Определение 1. *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-выпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, если найдется $m$-мерная плоскость $L$, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \varnothing$.*

Определение 2. *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-выпукло, если оно $m$-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.*

Легко убедиться, что оба приведенные определения удовлетворяют аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства таких множеств тоже удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ мы можем рассматривать минимальное $m$-выпуклое множество, содержащее $E$, и назвать его $m$-оболочкой множества $E$.

Определение 3. *Скажем, что открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ слабо $m$-выпукло, если оно $m$-выпукло относительно каждой точки $x \in \partial G$, принадлежащей гра-*

*нице множества $G$. Скажем, что произвольное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ слабо $m$-выпукло, если его можно аппроксимировать извне семейством открытых слабо $m$-выпуклых множеств.*

Легко построить пример слабо $m$-выпуклого, но не $m$-выпуклого множества.

**Пример.** Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество из четырех открытых квадратов

$$E = \{(x,y)|(|x| < 1, 1 < |y| < 3) \vee (1 < |x| < 3, |y| < 1)\}.$$

Легко убедиться, что это множество слабо 1-выпукло, но не 1-выпукло.

Теперь сформулированную задачу можно рассматривать как частный случай принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров одинакового радиуса.

Исследуем, когда семейство шаров обеспечит принадлежность выбранной точки 1-выпуклой оболочке семейства. Не нарушая общности, предположим, что эта точка совпадает с началом координат $O = (0,0,0)$ пространства $\mathbb{R}^3$, а радиусы открытых шаров равны единице. Покажем, что двух шаров недостаточно для создания тени ни в одной точке. Предположим, что двух шаров $B_1$ и $B_2$ достаточно. В силу выпуклости каждого шара существует гиперплоскость $L_i$, содержащая выбранную точку, которая не пересекает шар $B_i$. Пересечение гиперплоскостей $l = L_1 \cap L_2$ содержит искомую прямую. Точки пространства будем обозначать координатами $(x, y, z)$.

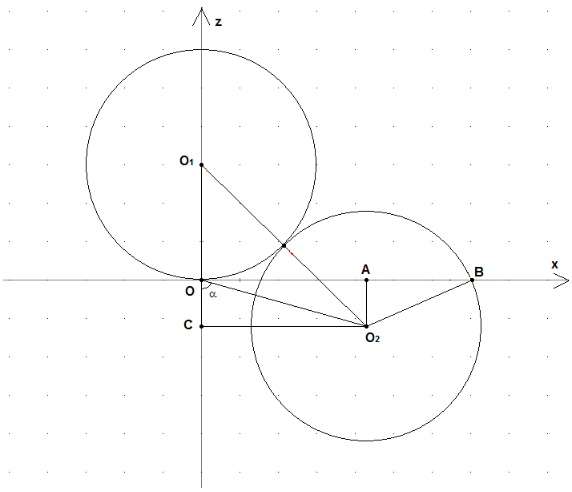


*Рис. 1.*

Сначала проверим, можно ли создать тень для точки, лежащей на границе одного из шаров. Выберем первый открытый шар $B_1$ единичного радиуса с центром в точке $O_1 = (0,0,1)$. Теперь прямые через начало координат, которые не пересекают этот шар, должны лежать в плоскости $xOy$. Второй открытый шар $B_2$ единичного радиуса выберем в плоскости $xOz$ с центром в точке $O_2$, так чтобы он касался шара $B_1$. Рассмотрим сечение шаров $B_1$ и $B_2$ плоскостью $xOz$. Обозначим расстояние $OO_2 = a > 1$, а угол $AOO_2$ через $\alpha$. Тогда в треугольнике $O_2CO_1$ имеем $O_1C = 1 + a\cos\alpha$, $CO_2 = a\sin\alpha$, $OO_1 = 2$. Из теоремы Пифагора получаем равенство

$$(1 + a\cos\alpha)^2 + a^2\sin^2\alpha = 4$$

или

$$1 + 2a\cos\alpha + a^2 = 4.$$

Поскольку нас интересует положительный корень, то

$$a = -\cos\alpha + \sqrt{3 + \cos^2\alpha}.$$

Отрезок $AB$ задает радиус круга $D$ по которому шар $B_2$ пересекает плоскость $xOy$. Имеем

$$AB = \sqrt{1 - a^2\cos^2\alpha}.$$

Теперь, если мы обозначим через $\beta$ угол под которым круг $D$ виден из начала координат, то

$$\sin(\beta/2) = \frac{\sqrt{1 - a^2\cos^2\alpha}}{a\sin\alpha}.$$

Легко убедиться, что это возрастающая функция по $\alpha$ в промежутке $(0, \pi/2)$, поэтому на этом интервале можно выбрать значение синуса как угодно близким к $1/a$ при $\alpha$ стремящимся к $\pi/2$. При этом $OO_2$ стремиться к $\sqrt{3}$. Следовательно $\sin(\beta/2) \leq 1/\sqrt{3}$, поэтому угол $\beta < \pi/2$. Аналогично, третий шар тоже виден с начала координат в плоскости $xOy$ под углом не превышающим $\pi/2$. Отсюда следует, что в плоскости $xOy$ существует прямая проходящая через точку $(0,0,0)$ которая не пересекает ни одного из трех шаров.

Отсюда получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Произвольный набор из трех попарно непересекающихся открытых шаров одинакового радиуса в пространстве $\mathbb{R}^3$ образует слабо 1-выпуклое множество.*

Предположим теперь, что тремя шарами все же можно обеспечить тень в начале координат $O = (0,0,0)$. Пусть $B_1$, $B_2$, $B_3$ – такой набор шаров, упорядоченный по увеличению расстояния от точки $O$, а точка $O_1$ – центр ближайшего шара $B_1$ к началу координат.

Выберем систему координат так, чтобы плоскость $xOz$ проходила через центры $O_1, O_2$ двух ближайших к точке $O$ шаров и точка $O_1$ находилась на оси $O_z$. Тень, создаваемая шаром $B_2$, увеличивается по мере его приближения к точке $O$, поэтому при оценке можем считать, что шары $B_1$, $B_2$ касаются друг друга. Для удобства расчетов будем считать, что $OO_2 = 1$, а радиусы шаров равны $r < 1$.

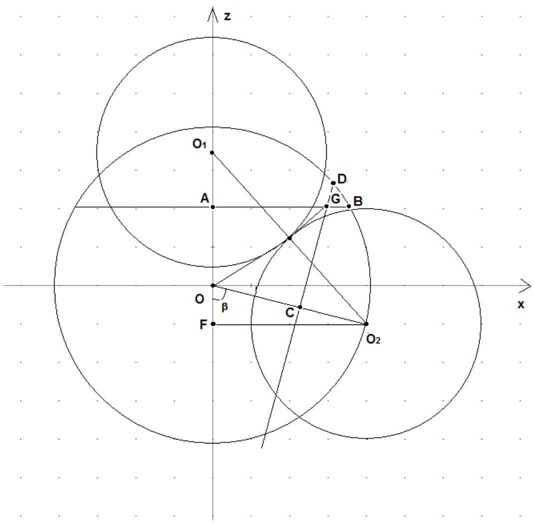


*Рис. 2.*

Используем рассуждения, примененные в [3] для оценок тени при помощи шаров с центрами на фиксированной сфере. Проведем сферу единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть $OB$ касательная прямая к шару $B_1$ в плоскости $xOz$, а $OD$ касательная прямая к шару $B_2$ в той же плоскости. Опустим перпендикуляры: $BA$ – из точки $B$ на ось $O_z, DC$ – из точки $D$ на отрезок $OO_2$. Обозначим $r_1 = O_1O < 1$, а углы $\angle O_1OB = \alpha$, $\angle FOO_2 = \beta$, где точка $F$ – проекция точки $O_2$ на ось $O_z$. Тогда $AB = \sin\alpha = r/r_1$, $OF = \cos\beta$, $FO_2 = \sin\beta$, $OO_2 = 2r$. Обозначим через $G$ точку пересечения отрезков $AB$ и $CD$. Как показано в [3], для существования тени в точке $O$ радиус третьего шара с центром на сфере должен быть не меньше отрезка $OG$. Оценим длину этого отрезка. Отметим, что точка $G$ лежит на окружности, проходящей через точки $O$, $A(0, \sqrt{1 - r^2/r_1^2})$, $C(\sqrt{1 - r^2}\sin\beta, -\sqrt{1 - r^2}cos\beta)$. Обозначим центр этой окружности точкой $(x, y)$. Запишем уравнение этой окружности

$$(\sqrt{1 - r^2}\sin\beta - x)^2 + (\sqrt{1 - r^2}\cos\beta + y)^2 = x^2 + y^2.$$

Имеем $y = \sqrt{1 - r^2/r_1^2}/2$. Теперь $2x = \sqrt{1 - r^2}/\sin\beta + \sqrt{1 - r^2/r_1^2}\operatorname{ctg}\beta$, где

$$r_1 = \sqrt{4r^2 - \sin^2\beta} - \cos\beta.$$

Отсюда

$$OG^2 = (1-r^2)/\sin^2\beta + 2\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2/r_1^2}\cos\beta/\sin^2\beta + \operatorname{ctg}^2\beta - r^2\operatorname{ctg}^2\beta/r_1^2+$$

$$+1-r^2/r_1^2 = (2-r^2)/\sin^2\beta - r^2/r_1^2/\sin^2\beta + 2\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2/r_1^2}\cos\beta/\sin^2\beta.$$

Нас интересует минимально возможное значение $OG$. Для оценки этого минимума используем Microsoft Excel. Минимальное значение $OG = 0,76$ получим при следующих значениях $\sin\beta = 0.58, r = 0,91, r_=0.91, r_1 = 0.9105$. Тогда шар $B_3$ должен находиться на оси $Oy$ не дальше чем $r/OG = 1,195$ от начала координат. Но тогда расстояние $OO_3$ не превышает $\sqrt{OO_1^2 + OO_3^2} = \sqrt{0.9105^2 + 1.195^2} \approx 1.5 < 2r = 1.83$. Следовательно, шары $B_1$ и $B_3$ должны пересекаться. Отсюда получим утверждение.

**Теорема 2.** *Произвольный набор из трех попарно непересекающихся открытых шаров одинакового радиуса в пространстве $\mathbb{R}^3$ образует 1-выпуклое множество.*

Из этого результата и теоремы 4 [10] получаем результат.

**Теорема 3.** *Четырех попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров одинакового радиуса в пространстве $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно для создания тени в фиксированной точке.*

Определение 4. *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-полувыпукло относительно точки , если найдется $m$-мерная полуплоскость $P$, такая что $x \in P$ и $P \cap E = \varnothing$.*

Определение 5. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-полувыпукло, если оно $m$-полувыпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Легко убедиться, что и эти определения удовлетворяют аксиоме выпуклости, и мы тоже можем строить $m$-полувыпуклые оболочки множеств согласно этим определениям.

Исследуем, когда семейство шаров обеспечит принадлежность выбранной точки 1-полувыпуклой оболочке семейства. Не нарушая общности, предположим, что эта точка совпадает с началом координат $(0,0,0)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Точки пространства будем обозначать координатами $(x,y,z)$. Выберем два открытых шара единичного радиуса $B_1$ и $B_2$ в точках $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$. Теперь лучи из начала координат, которые не пересекают эти два шара, должны лежать в плоскости $xOy$. Разместим три открытых шара радиуса 1 с центрами в точках $(\sqrt{3},0,0)$, $(-\sqrt{3}/2, 3/2, 0)$, $(-\sqrt{3}/2, -3/2, 0)$ соответственно, на расстоянии $r_1 = \sqrt{3}$ от начала координат. Еще три открытых шара радиуса 1 разместим с центрами в точках

$$(-(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2, 0, 0), (\sqrt{3}+\sqrt{7})/4, (3+\sqrt{21})/4, 0), (\sqrt{3}+\sqrt{7})/4, -(3+\sqrt{21})/4, 0)$$

на расстоянии $r_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{7})/2$ от начала координат. Эти первые три шара касаются заданных двух шаров $B_1$ и $B_2$ и видны из начала координат в плоскости $xOy$ под углом $\alpha$, синус половины которого равен $1/\sqrt{3}$. Следовательно, $\alpha/2 = \text{arc } \sin(1/\sqrt{3}) = 0,549306, \alpha = 1,098612$. Поскольку каждый шар из второй тройки касается двух соседних шаров первой тройки, а центры их находятся на разном расстоянии от начала координат $r_1 < r_2$, то касательная прямая к двум соседним шарам в точке их касания не может проходить через начало координат.

Поэтому этот набор из восьми шаров обеспечит принадлежность начала координат 1-полувыпуклой оболочке их объединения. Как и выше чуть уменьшая радиусы шаров, видим, что существует набор замкнутых восьми шаров с теми же свойствами. Получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Для того чтобы точка в трехмерном евклидовом пространстве принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров постоянного радиуса достаточно восьми шаров.*

Вопрос минимальности найденного количества шаров остается открытым.

1. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. – Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г., № 1772. 85 Деп.
2. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. Праці Інституту математики НАНУ. – Київ: Інститут математики НАНУ. – 2012. – Т. 92. – 280 с.
3. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. — С. 1658–1666.
4. *Зелинский Ю. Б.* Задача о тени для семейства множеств // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 197–204.
5. *Ткачук М. В., Осипчук Т. М.* Задача о тени для эллипсоида вращения // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 243–250.
6. *Зелінський Ю. Б., Стефанчук М. В.* Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68, № 6. – С. 657–662.
7. *Зелинский Ю. Б.* Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 278–289.
8. *Zelinskii Yu. B.* Problem of shadow (complex case) // Advances in Mathematics: Scientific Journal. –2016. – V. 5, N. 1. – P. 1–5.
9. *Zelinskii Yu. B.* The problem of the shadows // Bulletin de la societé des sci.et letters de Lódź. Sér. Rech. Déform. – 2016. – V. 66, N. 1. – P. 37–42.
10. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхіл Х. К.* Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Укр. мат. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 599–603.
11. *Zelinskii Yu. B.* Open topological and geometrical problems in analysis https://www.academia.edu/29063888/Open_topological_and_geometrical_problems_in_analysis.
12. *Zelinskii Yu. B.* Some open topological problems in analysis // Intern. Conf. dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, 27.09–1.10.2016. Abstracts of reports, Lviv. – P. 55.

**Y. B. Zelinskii, X. K. Dakhil**

**On a problem of the shadow for balls of fixed radius.**

The main objective of the paper is solution the problem's of the shadow for balls of a fixed radius in three-dimensional Euclidean space. A wide range of related problems are studied in the works of one author and his students. This problem can be regarded as finding the necessary and sufficient conditions to ensure membership of point to the generalized convex hull of a family for balls of fixed radius.

***Keywords:*** *shadow problem, convexity, linear convexity, circle, circumference.*

**Ю. Б. Зелінський, Х. К. Дакхіл**

**Про одну задачу про тіні для куль фіксованого радіуса.**

Головна мета роботи — розв'язок задачі про тіні для куль фіксованого радіуса в тривимірному евклідовому просторі. Широкий спектр близьких проблем досліджувався в роботах одного з авторів і його учнів. Цю задачу можна розглядати як знаходження необхідних і достатніх умов, що забезпечують належність точки до узагальнено опуклої оболонки сімейства куль фіксованого радіуса.

***Ключові слова:*** *задача про тінь, опуклість, лінійна опуклість, круг, коло.*

*Ин-т математики НАН Украины, Киев*
`zel@imath.kiev.ua`
`moonm5385@gmail.com`

*Получено 8.12.2016*