UDK 517.9

©2016. **М. В. Краснощок**

ПЕРША ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ

Доведено існування та єдиність класичного розв'язку на довільному відрізку часу першої початково-крайової задачі для квазілінійного рівняння дробової дифузії

Ключові слова: *простір Гельдера, похідна дробового порядку, нерухома точка.*

1. Формулювання задачі.

Позначимо $Q = (0, 1)$, $\Sigma = \{0\} \cup \{1\}$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \Sigma \times (0, T)$. Через $D^{\alpha}_{*,t}$ $(0 < \alpha < 1)$ позначимо регуляризовану похідну порядку α

$$D^{\alpha}_{*,t}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}(u(x,\tau) - u(x,0))d\tau. \quad (1)$$

Розглянему задачу

$$D^{\alpha}_{*,t}u(x,t) - u_{xx}(x,t) + g(u) = f(x,t),\ Q_T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T. \quad (3)$$

Припустимо, що функція $g(u)$ задовольняє наступним умовам

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \quad |g(u)| \le l_1(1 + |u|^r),$$
$$g(u)u \ge -l_2 + l_3|u|^{r+1}, \quad g'(u) \ge -l_4, \quad (4)$$

де $l_i \ge 0$, $i = 1, \dots, 4$, $r \ge 0$.

Рівняння виду (2) мають чисельні застосування при вивченні складних процесів і систем, які характеризуються нелокальністю та довгостроковою памяттю (див. [1]–[5]).

Питання розв'язності крайових задач для лінійних і квазілінійних рівнянь з дробовою похідною за часом досліджувалося в роботах [6]–[15]. Наскільки нам відомо, на даний час відсутні результати з класичної розв'язності квазілінійних рівнянь з дробовими похідними для неліпшицевої нелінійності g.

2. Функціональні простори і основний результат.

Нехай $\theta \in (0,1)$. Введемо стандартні позначення (див. [16])$|f|_{Q_T}$, $\langle f\rangle^{(\theta)}_{x,Q_T}$, $\langle f\rangle^{(\theta)}_{x,Q_T}$ для, відповідно, максимуму та сталих Гельдера функції f за змінними x і t з показником θ в області Q_T.

Позначимо

$$|f|^{(\theta)}_{\alpha,Q_T} = |f|_{Q_T} + \langle f\rangle^{(\theta)}_{x,Q_T} + \langle f\rangle^{(\frac{\theta}{2}\alpha)}_{t,Q_T}$$

Визначимо простір $C^{\theta}_{\alpha}(Q_T)$ як множину функцій із скінченною нормою $|f|^{(\theta)}_{\alpha,Q_T}$. Простір $C^{2+\theta}_{\alpha}(Q_T)$, $k \in \mathbb{N}$ визначимо як множину функцій із скінченною нормою

$$|f|^{(2+\theta)}_{\alpha,Q_T} = |f|_{Q_T} + |D^{\alpha}_{*,t}f|^{(\theta)}_{\alpha,Q_T} + |f_{xx}|^{(\theta)}_{\alpha,Q_T} + \langle f_x\rangle^{((1+\theta)\frac{\alpha}{2})}_{t,Q_T}.$$

Умови сумісності мають вигляд

$$u_0(x) = 0, \quad u_{0,xx}(x) + f(x,0) - g(0) = 0, \; x \in \Sigma. \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай $u_0 \in C^{2+\theta}(\Omega)$, $f \in C^{\theta}_{\alpha}(\Omega_T)$, $\psi \in C^{2+\theta}_{\alpha}(\Sigma_T)$, і виконано умови (4), (5). Тоді для довільних функцій існує єдиний розв'язок $u \in C^{2+\theta}_{\alpha}(\Omega_T)$ задачі (2)–(3).*

3. Допоміжні твердження.

Використовуємо наступні позначення

$$\omega_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\omega_{\alpha} * v)(t) = \int\limits_0^t \omega_{\alpha}(t-\tau)v(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Позначимо через $D^{\alpha}_t u$ дробову похідну Рімана–Ліувіля порядка α

$$D^{\alpha}_t u(x,t) = \partial_t(\omega_{1-\alpha} * u)(x,t)$$

Регуляризовану дробову похідну запишемо у вигляді

$$D^{\alpha}_{*,t}u(x,t) = D^{\alpha}_t(u-u_0)(x,t) = D^{\alpha}_t u(x,t) - \omega_{1-\alpha}(t)u_0(x)$$

За допомогою Теореми 3.8 з [17], маємо

$$(\omega_{\alpha} * D^{\alpha}_t u)(x,t) = u(x,t), \tag{7}$$

для u, таких, що $D^{\alpha}_{*,t}u(x,t) \in C([0,T])$ для всіх $x \in Q$.

З результатів роботи [13] випливає, що для довільної функції $u \in C^{2+\theta}_{\alpha}(Q_T)$ при $p = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$ має місце нерівність

$$pu^{p-1}(x,t)D^{\alpha}_t u(x,t) \geq D^{\alpha}_t u^p(x,t) + (p-1)\omega_{1-\alpha}(t)u^p(x,t). \tag{8}$$

Для лінійної задачі

$$D^{\alpha}_{*,t}u(x,t) - u_{xx}(x,t) = \mathrm{f}(x,t), \; Q_T, \tag{9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T, \tag{10}$$

з результатів роботи [10] випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконано умови сумісності*

$$u_0(x) = 0, \quad -u_{0,xx}(x) = \mathrm{f}(x,0), \quad x = 0,1,$$

тоді для довільних $\mathrm{f} \in C_{\alpha}^{\theta}(Q_T)$, $u_0 \in C^{2+\theta}(Q)$ *існує єдиний роз'язок* $u \in C_{\alpha}^{2+\theta}(\Omega_T)$ *задачі* (9)–(10). *Крім того, має місце оцінка*

$$|u|_{\alpha,\Omega_T}^{(2+\theta)} \leq C(T)\left(|u_0|_{\Omega}^{(2+\theta)} + |\mathrm{f}|_{\alpha,Q_T}^{(\theta)}\right). \tag{11}$$

4. Оцінка максимуму.

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$D_{\tau}^{\alpha} u(x,\tau) - u_{xx}(x,\tau) + g(u(x,\tau)) = f(x,\tau) + \omega_{1-\alpha}(\tau) u_0(x),\ Q_T, \tag{12}$$

Помножимо останне рівняння на pu^{p-1}. Далі $p = 2^k$, $k = 1, 2, ...$ Зазначимо, що

$$p(p-1)u^{p-2}|u_x|^2 \geq \frac{p^2}{4}(u^{\frac{p}{2}-1}u_2)^2 = |(u^{\frac{p}{2}})_x|^2.$$

Скористаємося (8), (4). Отримуємо

$$\omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q u^p(x,\tau)dx + D_{\tau}^{\alpha}\int\limits_Q u^p(x,\tau)dx + \int\limits_Q |(u(x,\tau)^{\frac{p}{2}})_x|^2 dx + pl_3\int\limits_Q |u(x,\tau)|^{r+p-1}dx \leq$$

$$\leq p\int\limits_Q |f(x,\tau)|u^{p-1}(x,\tau)dx + pl_2\int\limits_Q u^{p-2}(x,\tau)dx +$$

$$+p\omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q |u_0(x)|u^{p-1}(x,\tau)dx \tag{13}$$

Оцінимо праву частину (13) за допомогою нерівності Юнга.

$$D_{\tau}^{\alpha}\int\limits_Q u^p(x,\tau)dx + \int\limits_Q |(u(x,\tau)^{\frac{p}{2}})_x|^2 dx \leq$$

$$\leq p\int\limits_Q u^p(x,\tau)dx + \int\limits_Q (|f(x,\tau)|^p + 1)dx + \omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q |u_0(x)|^p dx \tag{14}$$

Далі, нерівність Ніренберга–Гальярдо (див. Теорему 2.2 розділу II в [16]) для функції $v = u^{\frac{p}{2}}$ і нерівність Юнга дозволяють оцінити перший інтеграл в правій частині (14) наступним чином

$$\int\limits_Q u^p(x,\tau)dx \leq \epsilon\int\limits_Q |(u^{\frac{p}{2}}(x,\tau))_x|^2 dx + C\epsilon^{-\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_Q u^{\frac{p}{2}}(x,\tau)dx\Big)^2. \tag{15}$$

Повернемось до (14), враховуючи (15) при $\epsilon = \frac{1}{2p}$

$$D_{\tau}^{\alpha}\int\limits_Q u^p(x,\tau)dx \leq Cp^{\frac{3}{2}}\Big(\int\limits_Q u^{\frac{p}{2}}(x,\tau)dx\Big)^2 + \int\limits_Q (|f(x,\tau)|^p + 1)dx + \omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q |u_0(x)|^p dx.$$

Згортка обох частин останньої нерівності з ω_α приводить до оцінки

$$\int\limits_Q u^p(x,t)dx \le Cp^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)\Big(\int\limits_Q u^{\frac{p}{2}}(x,\tau)dx\Big)^2 d\tau + C_T(|f|^p_{Q_T} + |u_0(x)|^p_Q + 1))$$

На наступному кроці, ми добуваємо корінь p з лівої та правої частини останньої нерівності і використовуємо нерівність $(A+B)^{\frac{1}{p}} \le A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}$, $A, B \ge 0$. В результаті одержуємо

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u(\cdot,t)\|_{L_p(Q)} \le [C_T p^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{p}}(1 + \sup_{Q_T}|f| + \sup_Q |u_0| + \sup_{t\in(0,T)} \|u(\cdot,t)\|_{L_{\frac{p}{2}}(Q)}). \tag{16}$$

Зазначимо, що при $p = 2$, за допомогою нерівності Коші–Буняковського і нерівності Пуанкаре з (13), можна одержати оцінку

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(Q)} \le [C_T p^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{p}}(1 + \sup_{Q_T}|f| + \sup_Q |u_0|). \tag{17}$$

Далі, маємо $[C(T)p^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{p}} = [C(T)2^{k\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{2^k}} \le [2C(T)]^{\frac{3k}{2^{k+1}}}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{3k}{2^{k+1}}$ збігається, можна застосувати стандартні ітерації (див., наприклад, [18, 19, 20]) і одержати з (16) та (17) оцінку

$$\sup_{Q_T}|u| \le M_0 \equiv C\left(\sup_{Q_T}|f| + \sup_Q |u_0| + 1\right) \tag{18}$$

5. Оцінка максимуму похідної u_x.

Перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$-D^\alpha_\tau u(x,\tau) + u_{xx}(x,\tau) + (g(u) + l_4 u - g(0)) = -f - (l_4 u - g(0)) - \omega_{1-\alpha}(\tau)u_0(x).$$

Помножимо дане рівняння на $p(u_x^{p-1})_x = p(p-1)u_x^{p-2}u_{xx}$. Одержимо

$$D^\alpha_\tau \int\limits_Q u_x^p(x,\tau)dx + (p-1)\int\limits_Q u_x^p(x,\tau)\omega_{1-\alpha}(\tau)dx + p(p-1)\int\limits_Q u_x^{p-2}(x,\tau)u_{xx}^2(x,\tau)dx +$$

$$+p\int\limits_Q (g'(u(x,\tau)) + l_4)u_x^p(x,\tau)dx \le p\omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q |u_{0,x}||u_x(x,\tau)|^{p-1}dx +$$

$$+p(p-1)\int\limits_Q \left[|f(x,\tau)| + \lambda(l_4|u(x,\tau)| + l_1)\right](u_x(x,\tau))^{p-2}|u_{xx}|(x,\tau)dx = R_1 + R_2. \tag{19}$$

Внаслідок нерівності Юнга одержимо

$$R_1 \le \omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q |u_{0,x}|^p dx + (p-1)\omega_{1-\alpha}(\tau)\int\limits_Q |u_x(x,\tau)|^p dx. \tag{20}$$

Використовуючі послідовно нерівність Коші–Буяковського і нерівність Юнга, одержимо

$$R_2 \leq p(p-1)\epsilon \int\limits_Q (u_x(x,\tau))^{p-2}|u_{xx}(x,\tau)|^2 dx+$$

$$+p(p-1)C_\epsilon \int\limits_Q \left[|F(x,\tau)|^2+|u(x,\tau)|^2+1)\right](u_x(x,\tau))^{p-2}dx \leq$$

$$\leq p(p-1)\epsilon \int\limits_Q (u_x(x,\tau))^{p-2}|u_{xx}(x,\tau)|^2 dx+$$

$$+p(p-1)C_\epsilon \int\limits_Q (u_x(x,\tau))^p dx + p(p-1)C_\epsilon \int\limits_Q \left[|F(x,\tau)|^p+|u(x,\tau)|^p+1)\right]dx. \quad (21)$$

Для оцінки другого інтегралу нам знадобиться нерівність типу Ніренберга–Гальярдо (див. нерівність (2.19), розділ II в [16]) для $v=(u_x)^{\frac{p}{2}}$. За допомогою нерівності Юнга одержимо

$$\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^p dx \leq \delta\left(\frac{p^2}{4}\int\limits_Q u_x^{p-2}u_{xx}^2 dx+\int\limits_Q u_x^p dx\right)+C\delta^{-\frac{1}{2}}\int\limits_Q \Big((u_x(x,\tau)^{\frac{p}{2}}dx\Big)^2. \quad (22)$$

Збираємо разом оцінки (19)-(22) при $\epsilon=\frac{1}{4}$. Далі помножимо отримане співвідношення на $\omega_\alpha(t-\tau)$ і проінтегруємо по $(0,t)$. У підсумку маємо

$$\int\limits_Q (u_x(x,t))^p dx+\frac{3p(p-1)}{4}\int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)d\tau\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^{p-2}(u_{xx}(x,\tau))^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_Q (u_{0,x}(x))^p dx+p(p-1)C\int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)d\tau\int\limits_Q \left[|F(x,\tau)|^p+|u(x,\tau)|^p+1)\right]dx+$$

$$+\delta p(p-1)C\int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)\left(\frac{p^2}{4}\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^{p-2}(u_{xx}(x,\tau))^2 dx+\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^p dx\right)d\tau+$$

$$+\delta^{-\frac{1}{2}}p(p-1)C\int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)\Big(\int\limits_Q (u_x(x,\tau)^{\frac{p}{2}}dx\Big)^2 d\tau. \quad (23)$$

Далі бачимо, що

$$\sup_{(0,T)}\int\limits_Q (u_x(x,t))^p dx+\frac{3p(p-1)}{4}\sup_{(0,T)}\int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)d\tau\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^{p-2}(u_{xx}(x,\tau))^2 dx \leq$$

$$\leq p(p-1)C_T\left(|u_{0,x}|^p_Q + |f|^p_{Q_T} + |u|^p_{Q_T} + 1\right) +$$

$$+\delta p(p-1)\frac{p^2}{4}C\sup_{(0,T)}\int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^{p-2}(u_{xx}(x,\tau))^2 dxd\tau +$$

$$+\delta p(p-1)C_T\sup_{(0,T)}\int\limits_Q (u_x(x,\tau))^p dx + \delta^{-\frac{1}{2}}p(p-1)C_T\sup_{(0,T)}\Big(\int\limits_Q (u_x(x,\tau)^{\frac{p}{2}}dx\Big)^2. \qquad (24)$$

Обираємо параметр δ за умови

$$\delta C p^2 \leq 2, \quad \delta p(p-1)C_T \leq \frac{1}{2}.$$

Звідси можна вважати, що $\delta = cp^{-2}$ для деякої сталої c. Тоді з (24) випливає

$$\sup_{(0,T)}\int\limits_Q (u_x(x,t))^p dx \leq p^3 C_T\left(|u_{0,x}|^p_Q + |f|^p_{Q_T} + |u|^p_{Q_T} + 1 + \sup_{(0,T)}\Big(\int\limits_Q (u_x(x,\tau)^{\frac{p}{2}}dx\Big)^2\right).$$

Неважко помітити, що при $p = 2$ (див. (23)) обчислення дещо спрощуються, тому в даному випадку маємо

$$\sup_{(0,T)}\int\limits_Q (u_x(x,t))^2 dx \leq C_T\left(|u_{0,x}|^2_Q + |f|^2_{Q_T} + |u|^2_{Q_T} + 1\right).$$

Знову використовучи ітерації, одержуємо

$$\sup_{Q_T}|u_x| \leq C(1 + \sup_{Q_T}|f| + \sup_Q |u_0| + \sup_Q |u_{x,0}|) \equiv M_1. \qquad (25)$$

6. Гельдеровість розв'язку за часом.

Візьмемо довільні значення $x, y \in Q$. Нехай $h \in (0,1)$ і $x + h^{\frac{\alpha}{2}} \in Q$. Будемо оцінювати різницю $u(x, t+h) - u(y,t)$.

З інтегральної теореми про середнє випливає, що існує значення $x^* \in [x, x+h^{\frac{\alpha}{2}}]$ таке, що

$$\int\limits_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} (u(z,t+h) - u(z,t))dz = (u(x^*, t+h) - u(x^*,t))h^{\frac{\alpha}{2}}.$$

З іншого боку

$$u(z,t) = u(z,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}D^\alpha_{*,s}u(z,s)ds$$

і, як наслідок, для довільного $z \in Q$

$$u(z,t+h) - u(z,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - (t+h-s)^{\alpha-1}\right] D^{\alpha}_{*,s} u(z,s) ds +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} D^{\alpha}_{*,s} u(z,s) ds.$$

Таким чином

$$(u(x^*,t+h) - u(x^*,t)) h^{\frac{\alpha}{2}} = \int\limits_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} (u(z,t+h) - u(z,t)) dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - (t+h-s)^{\alpha-1}\right] \left(\int\limits_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} D^{\alpha}_{*,s} u(z,s) dx \right) ds +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} \left(\int\limits_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} D^{\alpha}_{*,s} u(z,s) dx \right) ds. \tag{26}$$

Оскільки функція u задовольняє рівняння (2), маємо

$$\left| \int\limits_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} D^{\alpha}_{*,s} u(z,s) dx \right| = \left| \int\limits_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} (u_{zz}(z,s) - g(u(z,s)) + f(z,s)) dx \right| \leq$$

$$\leq 2M_1 + \sup_{Q_T} |f| + l_1(1 + M_0^r). \tag{27}$$

З оцінок (26), (27) і Леми 3.3 [21] випливає

$$|(u(x^*,t+h) - u(x^*,t)) h^{\frac{\alpha}{2}}| \leq C(2M_1 + \sup_{Q_T} |f| + l_1(1 + M_0^r)) h^{\alpha},$$

і, після скорочення на $h^{\frac{\alpha}{2}}$,

$$|(u(x^*,t+h) - u(x^*,t)| \leq C(2M_1 + \|k\|_{L_1(Q)} 2M_1 + \sup_{Q_T} |f| + l_1(1 + M_0^r)) h^{\frac{\alpha}{2}} = N h^{\frac{\alpha}{2}}$$

Перейдемо до оцінки гельдеровості розв'язку

$$|u(x,t+h) - u(y,t)| \leq |u(x,t+h) - u(x^*,t+h)| + |u(x^*,t+h) - u(x^*,t)| + |u(x^*,t) - u(y,t)| \leq$$

$$\leq M_1 |x - x^*| + N h^{\frac{\alpha}{2}} + M_1 |x^* - y|.$$

Розглянемо три можливості: а) $y \geq x^*$, тоді $|y - x^*| \leq |y - x|$; б) $x \leq y < x^*$, тоді $|y - x^*| < h^{\frac{\alpha}{2}}$; в) $y < x$, тоді $|y - x^*| \leq |x - y| + h^{\frac{\alpha}{2}}$. Підсумовуючі наведені вище міркування, бачимо, що

$$|u(x, t + h) - u(y, t)| \leq 2M_1(|x - y| + h^{\frac{\alpha}{2}}) + Nh^{\frac{\alpha}{2}} \leq (2M_1 + N)(|x - y| + h^{\frac{\alpha}{2}}). \quad (28)$$

7. Доведення Теореми 1.

Визначимо простір $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \{w \in C^{\theta}_{\alpha}(Q_T) : \, w(x, 0) = 0, \text{ при } x \in \Sigma\}.$$

Для довільної функції $w \in \mathfrak{B}$ визначимо u як єдиний розв'язок задачі (див. Теорему 1)

$$D^{\alpha}_{*,t}u(x, t) - u_{xx}(x, t) + \sigma g(w) = \sigma f(x, t), \; Q_T, \quad (29)$$

$$u(x, 0) = \sigma u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (30)$$

Неважко переконатися в тому, що умови сумісності задач (2)–(3) та (29)–(30) співпадають. Таким чином (див. Теорему 2) визначено оператор $\mathcal{T} : w \to u$.

У свою чергу, рівняння $u = \sigma\mathcal{T}u$ еквівалентно наступній задачі

$$D^{\alpha}_{*,t}u(x, t) - u_{xx}(x, t) + \sigma g(u) = \sigma f(x, t), \; Q_T, \quad (31)$$

$$u(x, 0) = \sigma u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (32)$$

Далі, з теореми Арцела–Асколі випливає, що множина

$$K_R = \{u \in\} C^{2+\theta}_{\alpha}(Q_T) : \; |u|^{(2+\theta)}_{\alpha,Q_T} \leq R\}$$

є компактом в просторах $C^{\theta}_{\alpha}(Q_T)$ і $C^{2}_{\alpha}(Q_T)$, де

$$C^{2}_{\alpha}(Q_T) = \{u : \; |u|_{Q_T} + |u_x|_{Q_T} + |u_{xx}|_{Q_T} + |D^{\alpha}_{*,t}u|_{Q_T} < \infty\}.$$

Таким чином, оператор $\mathcal{T}$ є компактним і неперервним відображенням банахова простора $\mathfrak{B}$ в себе. З нерівностей (18), (25), (28) бачимо, що інує стала M така, що для всіх $u \in \mathfrak{B}$ і $\sigma \in [0, 1]$, які задовольняють рівняння $u = \sigma\mathcal{T}u$, справедлива нерівність

$$\|u\|_{\mathfrak{B}} < M.$$

Як наслідок Теореми Лере–Шаудера (див. Теорему 11.3 в [22]) маємо, що відображення $\mathcal{T}$ має нерухому точку, отже існує принаймні один розв'язок задачі (2)–(3).

Якщо u_1, u_2 — два розв'язки задачі (2)–(3), тоді $v = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$D^{\alpha}_{*,\tau}v(x, \tau) - v_{xx}(x, \tau) + (g(u_1) + l_4u_1 - (g(u_2) + l_4u_2))(x, \tau) = l_4v(x, \tau), \; Q_T, \quad (33)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in Q, \quad v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (34)$$

Помножимо рівняння (33) на $\omega_\alpha(t-\tau)v(x,\tau)$ і проінтегруємо по області Q_t за змінними x, τ. З урахуванням (7), (8) та припущення (4), одержуємо

$$\int\limits_Q v^2(x,t)dx \leq l_4 \int\limits_0^t \omega_\alpha(t-\tau)d\tau \int\limits_Q v^2(x,\tau)dx.$$

З Леми Гронуола (див. Лему 6.19 в [17]) випливає, що $v(x,t)=0$ в Q_T. Теорему 1 доведено.

1. *Hilfer R.* Applications of fractional analysis in physics. – World Scientific: Singapore, New Jersy, London, Hong Kong, 2000. – 560 p.
2. *Тарасов В. Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва–Ижевск: Ижевский институт компьютерных технологий. – 2011.
3. *Langlands T. A. M., Henry B. I.* Fractional chemotaxis diffusion equation // Phys. Rev. E. – 2010. – V. 81. – P. 051102.
4. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A. – 2004. – V. 37. – P. 161–208.
5. *Weiss M., Hashimoto H., Nilsson T.* Anmalous protein diffusion in living cells as seen by fluorescence correlation spectroscopy // Biophys. J. – 2003. – V. 84. – P. 4043–4052.
6. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // Journal of differential equations. – 2004. – V. 199. – P. 211–255.
7. *Kemppainen J., Ruotsalainen K.* Boundary Integral Solution of the Time-Fractional Diffusion Equation // Integr. equ. oper. theory. – 2009. – V. 64. – P. 239—249.
8. *Clément Ph., Londen S.-O., Simonett G.* Quasilinear evolutionary equations and continuous interpolation spaces // Journal of differential equations. – 2004. – V. 196. – P. 418–447.
9. *Kochubei A. N.* Fractional parabolic systems // Potential analysis. – 2012. – V. 37. – P. 1–30.
10. *Krasnoschok M., Vasylyieva N.* On a solvability of nonlinear fractional reaction-diffusion system in the Hölder spaces // Nonlinear Studies. – 2013. – V. 20. – P. 591–621.
11. *Mophou G. M., N'Guérékata G. M.* On a class of fractional differential equations in a Sobolev space // Applicable Analysis. – 2012. – V. 91. – P. 15—34.
12. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. – 2009. – Т. 73:2. – С. 141—182.
13. *Zacher R.* Quasilinear parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Ph. D. Thesis, Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg. – 2003.
14. *Лопушанская Г. П., Лопушанский А. О., Пасичник Е. В.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – С. 1288—1299 .
15. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – V. 382. – P. 426–447.
16. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
17. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. – Springer: Berlin, 2010. – 310 p.
18. *Alikakos N.* An Application of the Invariance Principle to Reaction-Diffusion Equations // Journal of Differential Equations. – 1979. – V. 33. – P. 201–225.
19. *Rothe F.* Uniform Bounds from Bounded-Functionals in Reaction-Diffusion Equations // Journal of Differential Equations. – 1982. – V. 45. – P. 207–233.
20. *Yin H.-M.* The classical solutions for nonlinear parabolic integrodifferential equations // Journal of Integral Equations and Applications. – 1988. – V. 1. – P. 249–263.

21. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Наука и техника: Минск, 1987. – 688 с.
22. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 465 с.

M. V. Krasnoschok

On a first initial-boundary problem for an one-dimensional quasilinear fractional diffusion equation.

We prove the existence and the uniqueness of a classical solution to the first initial-boundary problem to quasilinear fractional diffusion equation.

Keywords: *Höolder space, fractional derivetive, fixed point.*

Н. В. Краснощек

Первая начально-краевая задача для одномерного квазилинейного уравнения дробной диффузии.

Доказано существование и единственность классического решения первой начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения дробной диффузии.

Ключевые слова: *пространство Гельдера, дробная производная, неподвижная точка.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янск
`iamm012@ukr.net`
Отримано 20.12.16