UDK 517.5

©2016. **О. О. Новіков, О. Г. Ровенська**

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ ПРЯМОКУТНИМИ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Отримано асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фейера на класах періодичних функцій двох змінних високої гладкості. Основним методом досліджень є вивчення інтегральних уявлень відхилень тригонометричних поліномів на класах періодичних функцій.

Ключові слова: *асимптотична рівність, узагальнена похідна, прямокутні суми Фейєра.*

Вступ.

Роботу присвячено питанням наближення тригонометричними поліномами класів періодичних функцій двох змінних, які задаються як аналоги класів інтегралів Пуасона функцій однієї змінної. Вивчено верхні грані по цим класам відхилень прямокутних сум Фейєра.

Класи періодичних функцій двох змінних, які дозволяють окремо враховувати властивості звичайних і мішаних частинних похідних їх елементів, визначимо в такий спосіб (див., напр., [1–4]).

Нехай R^2 — евклідів простір з елементами $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $T^2 = [-\pi; \pi] \times [-\pi; \pi]$ — квадрат зі стороною 2π,

$$N^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \mathbb{N},\ \ i = 1; 2\right\},$$

$$N_*^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \mathbb{N}_* = \mathbb{N} \cup \{0\},\ \ i = 1; 2\right\},$$

$$N_i^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \mathbb{N},\ \ x_j \in \mathbb{N}_*,\ \ i \neq j\right\},$$

$$E^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \{0; 1\},\ \ i = 1; 2\right\}.$$

Через $L(T^2)$ позначимо множину 2π-періодичних за кожною зі змінних та сумовних на квадраті T^2 функцій $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$.

Нехай $f \in L(T^2)$. Кожній парі точок $\vec{s} \in E^2$, $\vec{k} \in N_*^2$ поставимо у відповідність величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} f(x_1, x_2) \cos\left(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\right) \cos\left(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\right) dx_1 dx_2.$$

Величини $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in E^2$, $\vec{k} \in N_*^2$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(\vec{x})$ [4].

Кожній точці $\vec{k} \in N_*^2$ поставимо у відповідність гармоніку

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \cos\left(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\right) \cos\left(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\right),$$

а також величини

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_1}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1 - (s_1+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2 - \frac{s_2\pi}{2}\right),$$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_2}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1 - \frac{s_1\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2 - (s_2+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

що є гармоніками, спряженими до $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ за змінними x_1 і x_2 відповідно.

Наслідуючи [4], ряд Фур'є функції $f(\vec{x})$ визначимо таким співвідношенням

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

де $q(\vec{k})$ — кількість нульових координат точки $\vec{k}$.

Нехай $f\in L(T^2)$ і $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1;2$, $j=1;2$ — фіксовані набори систем чисел, $k\in\mathbb{N}_*$.

Покладемо

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)},\quad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)}$$

і будемо вважати, що виконано умови: $\overline{\psi}_i(k)\neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}_*$, $\psi_{i1}(0)=1$, $\Psi_{i1}(0)=1$, $\psi_{i2}(0)=0$, $\Psi_{i2}(0)=0$, $i=1;2$.

Відтак, припустимо, що вираз

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)}[\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})]$$

є рядом Фур'є деякої функції з $L(T^2)$. Позначимо її $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i}f(\vec{x})}{\partial x_i}$ та назвемо $\overline{\psi}_i$-похідною функції $f(\vec{x})$ за змінною x_i, $i=1;2$.

Мішаною $\overline{\Psi}$-похідною за змінними x_i, $i=1;2$, за аналогією до означення звичайної мішаної похідної, будемо називати функцію $f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})$, яка задається співвідношенням

$$f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1}f(\vec{x})}{\partial x_1}\right).$$

Для заданого набору функцій ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i=1;2$, $j=1;2$, символом $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ позначимо множину неперервних функцій $f\in L(T^2)$, що мають майже скрізь обмежені в розумінні плоскої міри $\overline{\Psi}$- і $\overline{\psi}_i$-похідні

$$\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})|\le 1,\ \ \operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})|\le 1,\ \ i=1;2,\ \ \vec{x}\in T^2.$$

Якщо для наборів функцій $\psi_{ij}(k)$ і $\Psi_{ij}(k)$, $i=1;2$, $j=1;2$, що визначають класи $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, існують функції $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ і числа β_i, $\beta_i^*\in\mathbb{R}$, $i=1;2$, такі, що

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2},\ \ \psi_{i2}(k) = \psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2}, \ \ \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},$$

то $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ є класами (ψ, β)-диференційовних функцій, які було введено в роботі [3]. Будемо позначати такі класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$. Нехай послідовності, які визначають клас, задаються співвідношеннями $\psi_i(k) = q_i^k$, $q_i \in (0;1)$, $\Psi_i(k) = Q_i^k$, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1;2$. У цьому випадку класи $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ будемо позначати $C_{\beta,\infty}^{2q}$ і відповідно $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \equiv f_{\beta_i}^{q_i}(\vec{x})$, $i = 1;2$, $f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) \equiv f_{\beta^*}^{Q}(\vec{x})$. Класи функцій однієї змінної $C_{\beta,\infty}^{q}$, які визначаються аналогічним чином, складаються з 2π-періодичних функцій, які дозволяють аналітичне подовження до функцій $f(z) = f(x+iy)$, регулярних у смузі $|y| < \ln\frac{1}{q}$ (див., напр., [2]), і називаються інтегралами Пуассона.

Із результатів роботи С. М. Нікольського [5] випливає асимптотична рівність для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є $S_n(f;x)$ на класах $C_{\beta,\infty}^{q}$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{q}; S_n) \equiv \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^{q}} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де

$$K(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n. С. Б. Стєчкін [6] цей результат довів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член останньої рівності

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{q}; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}.$$

Розв'язки подібної екстремальної задачі для класів $C_{\beta,\infty}^{q}$ і сум Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ знайдені у роботах [7–8]. У роботі [7] доведена така асимптотична формула якщо $n-p\to\infty$ при $n\to\infty$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{q}; V_{n,p}) \equiv \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^{q}} ||f(x) - V_{n,p}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right),$$

де

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2,3,..., \end{cases}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, p, q.

Асимптотичну формулу для точних верхніх меж відхилень сум Фейєра $\sigma_n(f;x)$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ у випадку $\beta = 1$ отримано в роботі [9]:

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n) \equiv \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma_n(f;x)||_C = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2}+\ln\frac{1+q}{1-q}\right)+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3},$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q.

У роботі [10] розглянуто питання наближення класів функцій двох змінних $C^{2q}_{\beta,\infty}$ прямокутними сумами Фур'є $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ і отримано асимптотичну формулу

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}}) \equiv \sup_{f\in C^{2q}_{\beta,\infty}} ||f(\vec{x})-S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C =$$

$$= \frac{8q_1^{n_1}}{\pi^2}K(q_1)+\frac{8q_2^{n_2}}{\pi^2}K(q_2)+O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{n_1}+\frac{q_2^{n_2}}{n_2}+Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}\right),\ \ n_i\to\infty,\ \ i=1;2.$$

У роботі [11] досліджено аппроксимативні властивості прямокутних сум Валле Пуссена на класах $C^{2q}_{\beta,\infty}$. Крім того, деякі суміжні питання вивчено в роботах [12, 13].

У даній роботі досліджено асимптотичну поведінку величини

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{1,\infty};\sigma_{\vec{n}}) \equiv \sup_{f\in C^{2q}_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C,$$

за умови $n_i\to\infty$, $i=1;2$, де

$$\sigma_{\vec{n}}(f;\vec{x}) \equiv \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{i=1;2}\sum_{k_i=0}^{n_i-1} S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$$

— прямокутні суми Фейєра функції $f\in L(T^2)$.

Результати.

Основний результат полягає у такому твердженні.

Теорема. *Нехай q_i, $Q_i\in(0;1)$, $\beta_i=\beta_i^*=1$, $i=1;2$. Тоді за умови $n_i\to\infty$, $i=1;2$ виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{1,\infty}\sigma_{\vec{n}}) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\left(\frac{2q_i}{1-q_i^2}+\ln\frac{1+q_i}{1-q_i}\right)+$$

$$+O(1)\left(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3}+\prod_{j=1;2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\right), \tag{1}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n_i, q_i, Q_i, $i=1;2$.

Доведення. Розглянемо величину

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) \equiv f(x)-\sigma_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\rho_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

де

$$\rho_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \equiv f(\vec{x}) - S_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Використовуючи міркування роботи [11] можна показати, що для $f \in C^{2q}_{\beta,\infty}$ у кожній точці $\vec{x} \in T^2$ виконується рівність

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{q_i}_{\beta_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k_i=0}^{n_i-1}\sum_{s_i=k_i}^{\infty} q_i^{s_i}\cos(s_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i-$$

$$-\frac{1}{\pi^2 n_1 n_2}\int\limits_{T^2} f^{Q}_{\beta^*}(\vec{x}+\sum_{j=1;2}t_j\vec{e}_j)\prod_{j=1;2}\sum_{k_j=0}^{n_j-1}\sum_{s_j=k_j}^{\infty} Q_j^{s_j}\cos(s_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2})dt_j.$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} = O(1)\frac{1}{(1-q)^3}$$

та виконуючи елементарні перетворення (див. [9]), для $\beta_i = \beta_i^* = 1$, $i = 1;2$ отримуємо

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{q_i}_{1}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\frac{q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i}{(1-2q_i\cos t_i+q_i^2)^2}dt_i + O(1)\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3}+$$

$$+\frac{O(1)}{n_1n_2}\int\limits_{T^2}\prod_{j=1;2}\left(\frac{Q_j^2\sin 2t_j - 2Q_j\sin t_j}{(1-2Q_j\cos t_j+Q_j^2)^2}+\frac{Q_j^{n_j}}{(1-Q_j)^3}\right)dt_j.$$

В роботі [9] показано, що

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = \frac{2q}{1-q^2}+\ln\frac{1+q}{1-q} = O(1)\frac{1}{1-q}. \tag{2}$$

Застосовуючи останню оцінку, маємо

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{q_i}_{1}(\vec{x}_i+t_i\vec{e}_i)\frac{q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i}{(1-2q_i\cos t_i+q_i^2)^2}dt_i+$$

$$+O(1)\left(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3}+\prod_{j=1;2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\right). \tag{3}$$

Знайдемо функцію $f_0(\vec{x}) \in C^{2q}_{1,\infty}$, для якої виконується співвідношення

$$\delta_{\vec{n}}(f_0;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i|}{(1-2q_i\cos t_i + q_i^2)^2}dt_i +$$

$$+O(1)\bigg(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3} + \prod_{j=1;2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\bigg). \qquad (4)$$

На підставі (3) для будь-якої функції $f(\vec{x}) \in C^{2q}_{1,\infty}$ можемо записати

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^{q_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)\frac{q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i}{(1-2q_i\cos t_i + q_i^2)^2}dt_i +$$

$$+O(1)\bigg(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3} + \prod_{j=1;2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\bigg). \qquad (5)$$

Позначимо

$$y_i(t) = \mathrm{sign}(q_i^2\sin 2t - 2q_i\sin t), \quad i = 1;2.$$

Маючи на увазі, що для функцій $y_i(t)$ виконуються умови

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i)dt_i = 0, \quad \operatorname{ess\,sup}|y_i(t_i)| \le 1, \quad i = 1;2, \quad t \in [-\pi;\pi],$$

побудуємо функції $\varphi_i(t_1,t_2) = y_i(t_i)$, $(t_1,t_2) \in T^2$, і функції $f_i(t_1,t_2)$ такі, що $(f_i)_1^{q_i}(t_1,t_2) = \varphi_i(t_1,t_2)$. Використовуючи міркування роботи [10], можна показати, що функція $f_0(t_1,t_2) = f_1(t_1,t_2) + f_1(t_1,t_2)$ задовольняє умові

$$(f_0)_1^{q_i}(t_1,t_2) = \varphi_i(t_1,t_2), \;\; i = 1;2.$$

Оскільки $f_0(\vec{x}) \in C^{2q}_{1,\infty}$ і

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^{q_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)\frac{q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i}{(1-2q_i\cos t_i + q_i^2)^2}dt_i = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i|}{(1-2q_i\cos t_i + q_i^2)^2}dt_i,$$

то для функції $f_0(\vec{x})$ виконується співвідношення (4). Враховуючи, що

$$\operatorname{ess\,sup}|f_1^{q_i}(\vec{x})| \le 1, \quad i = 1;2, \quad \vec{x} \in T^2,$$

отримуємо нерівність

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{1,\infty};\sigma_{\vec{n}}) \le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|q_i^2\sin 2t_i - 2q_i\sin t_i|}{(1-2q_i\cos t_i + q_i^2)^2}dt_i +$$

$$+O(1)\Bigg(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3}+\prod_{j=1;2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\Bigg). \qquad (6)$$

Порівнюючи (4) і (6), можна записати

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{1,\infty};\sigma_{\vec{n}})=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{1}{n_i}\int\limits_0^{\pi}\frac{2q_i\sin t_i-q_i^2\sin 2t_i}{(1-2q_i\cos t_i+q_i^2)^2}dt_i+$$

$$+O(1)\Bigg(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3}+\prod_{j=1;2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\Bigg). \qquad (7)$$

Поєднуючи співвідношення (2) і (7), здобудемо твердження теореми. □

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 8. — С. 1069–1113.
2. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
3. *Задерей П. В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций : Сб. научн. тр. — К. : Ин-т математики, 1985. — С. 16–28.
4. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 545–555.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
6. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
7. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
8. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
9. *Новиков О. А., Ровенская О. Г.* Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 4 — С. 813–820.
10. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Бодрая В. И.* Приближение классов функций двух переменных высокой гладкости прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 270–283.
11. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Ровенская О. Г.* Приближение функций двух переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 286–296.
12. *Новіков О. О., Ровенська О. Г.* Наближення періодичних функцій високої гладкості прямокутними сумами Фур'є // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 111–118.
13. *Новиков О. А., Ровенская О. Г.* Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными методами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 255–264.

Approximation of classes of functions of hight smoothness by rectangular Fejer sums.

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the rectangular Fejer sums taken over classes of periodic functions of two variables of hight smoothness. The main method of research is the study of integral representations of deviations of trigonometric polynomials on the classes of periodic functions.

Keywords: *asymptotic equality, generalized derivative, rectangular Fejer sums.*

Приближение классов функций высокой гладкости прямоугольными суммами Фейера.

Получены асимптотические равенства для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фейера на классах периодических функций двух переменных высокой гладкости. Основным методом исследований является изучение интегральных представлений уклонений тригонометрических полиномов на классах периодических функций.

Ключевые слова: *асимптотическое равенство, обобщенная производная, прямоугольные суммы Фейера.*

Донбаський державний педагогічний університет
Донбаська державна машинобудівна академія
`sgpi@slav.dn.ua`
`o.rovenskaya@mail.ru`

Отримано 27.04.16