

УДК 517.5

©2016. Е. А. Севостьянов, А. А. Маркиш

## О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ, КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ В СРЕДНЕМ

Изучается поведение открытых дискретных отображений, квазирегулярных в среднем. Доказано, что семейства таких отображений равномерно непрерывны (нормальны) в заданной области.

**Ключевые слова:** отображения с ограниченным и конечным искажением, модули семейств кривых, ёмкости конденсаторов.

### 1. Введение.

В относительно недавних статьях [1] и [2] рассмотрены вопросы о локальном поведении классов отображений, характеристика квазиконформности  $Q(x)$  которых подчинена некоторому интегральному условию, выражаемому при помощи заданной функцией  $\Phi(x)$  (см. там же). Такие отображения мы называем отображениями, квазиконформными в среднем. В частности, в работе [1] рассмотрены классы гомеоморфизмов, характеристика которых может меняться (зависеть от отображения), в то время как в статье [2] «мажоранта»  $Q(x)$  является фиксированной, общей для всего рассматриваемого семейства. Основная цель настоящей заметки – распространить результаты работы [2] на случай «переменной» мажоранты  $Q(x)$ , когда класс отображений определяется только функцией  $\Phi(x)$ , а не функцией  $Q$ , отвечающей за искажение модуля семейств кривых. При этом, усиление полученных ниже результатов в сравнении с работой [1] состоит в том, что здесь рассматриваются открытые дискретные отображения, а не только гомеоморфизмы.

Основные определения и обозначения, использующиеся ниже, могут быть найдены в монографии [3] либо статьях [1] и [2] (см. также работы [4] и [5]).

Как обычно, для множеств  $E$  и  $F \subset \mathbb{R}^n$  символ  $\Gamma(E, F, D)$  обозначает семейство всех кривых  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , которые соединяют  $E$  и  $F$  в  $D$ . Здесь и далее  $h$  – хордальная метрика (см. [6]). Следующая конструкция может быть найдена в работе [7]. Пусть  $Q(x, t) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, y) < t\}$  – сферический шар с центром в точке  $x$  радиуса  $t$ . Для  $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$ , множества  $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  и чисел  $0 < r < t < 1$  полагаем  $\tilde{x} = -\frac{x}{|x|^2}$ ,

$$\begin{cases} m_t(E, r, x) = M(\Gamma(\partial Q(x, t), E \cap \overline{Q(x, r)})), \\ m(E, x) = m_{\sqrt{3}/2}(E, \frac{\sqrt{2}}{2}, x), \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} c(E, x) = \max\{m(E, x), m(E, \tilde{x})\}, \\ c(E) = \inf_{x \in \overline{\mathbb{R}^n}} c(E, x). \end{cases} \quad (1)$$

Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  – неубывающая выпуклая функция. Обозначим через

$\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$  семейство всех открытых дискретных кольцевых  $Q$ -отображений в  $D$ , таких что  $c(\mathbb{R}^n \setminus f(D)) \geq \Delta$  и

$$\int_D \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leq M.$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  – неубывающая выпуклая функция.

Если

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \quad (2)$$

для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ , то класс  $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$  является равностепенно непрерывным, и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех  $M \in (0, \infty)$  и  $\Delta \in (0, 1)$ .

Ещё раз подчеркнём, что в определении класса  $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$  функция  $Q$  не участвует; два различных отображения  $f_1$  и  $f_2$ , которым соответствуют разные функции  $Q_1$  и  $Q_2$ , могут, вообще говоря, принадлежать одному классу  $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ .

## 2. Лемма об оценке искажения.

Пусть  $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$  – класс всех открытых дискретных кольцевых  $Q$ -отображений  $f$  в области  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , таких что  $c(\mathbb{R}^n \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$ . Для доказательства теоремы 1 установим справедливость следующего утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $\Delta > 0$  и  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – измеримая функция. Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon(x_0) \int_{|x-x_0|}^{\frac{1}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}} dr} \quad (3)$$

для каждого  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$  и  $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ ,  $\varepsilon(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$ , где  $c_n > 0$  зависит только от  $n$  и  $q_{x_0}(r)$  – среднее интегральное значение функции  $Q(z)$  на сфере  $|z - x_0| = r$ .

*Доказательство.* Применим подход, использованный при доказательстве леммы 2 в [8]. Полагаем  $\varepsilon_0 := \varepsilon(x_0)$ . Для фиксированного отображения  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}$  рассмотрим конденсаторы  $E = (A, C)$  и  $f(E) = E' = (f(A), f(C))$ , где  $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $A = B(x_0, \varepsilon_0)$ . Условимся, что для конденсатора  $E$  символ  $\Gamma_E$  обозначает семейство всех кривых вида  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , таких что  $\gamma(a) \in C$  и  $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$  для произвольного компакта  $F \subset A$ , где  $|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$ . Пусть  $\Gamma_{E'}$  и  $\Gamma_E$  – соответствующие семейства кривых для конденсаторов  $E$  и  $E'$ , соответственно. Ввиду предложения 10.2 гл. II в [9] имеем  $M(\Gamma_{E'}) = \text{cap} f(E)$ . Полагая  $E_f := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ , заметим, кроме того, что  $\Gamma(f(C), E_f) > \Gamma_{E'}$  (см. теорему

1.1.46 в [10]) и, следовательно, в силу свойства минорирования модуля (см. теорему 6.4 в [6]) и леммы 1 в [11]

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \leq M(\Gamma_{E'}) = \text{cap } f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}, \quad (4)$$

где  $\omega_{n-1}$  — площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$  и

$$I = I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}.$$

С другой стороны, согласно теореме 3.14 в [7]

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta \min\{c(f(C)), c(E_f)\}, \quad (5)$$

где постоянная  $\beta$  зависит только от  $n$ . Поскольку для каждого связного множества  $F$  в  $\overline{\mathbb{R}^n}$  имеет место неравенство  $c(F) \geq a_n h(F)$ , где  $h(F)$  — хордальный диаметр множества  $F$ , а  $a_n$  — некоторая постоянная (см. следствие 3.13 в [7]), будем иметь

$$c(f(C)) \geq a_n \cdot h(f(C)). \quad (6)$$

Известно, что  $c(E) \leq \omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}$  для любого множества  $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  (см. соотношение (3.7) в [7] и определение функции  $c(\cdot)$  в (1)), так что

$$\frac{c(E)}{\omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}} \leq 1 \quad \forall E \subset \overline{\mathbb{R}^n}. \quad (7)$$

Предположим, что  $\min$  в правой части (5) равен  $c(f(C))$ , тогда в силу соотношений (6) и (7)

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta \cdot a_n \cdot h(f(C)) \geq \frac{\beta \cdot a_n \cdot h(f(C)) c(E_f)}{\omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}}. \quad (8)$$

Пусть  $\min\{c(f(C)), c(E_f)\} = c(E_f)$ , тогда из (5) следует, что

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq c(E_f) \geq h(f(C)) c(E_f). \quad (9)$$

Полагая  $c_n := \min \left\{ 1, \frac{\beta \cdot a_n}{\omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}} \right\}$ , из (8) и (9) будем иметь, что

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq c_n \cdot h(f(C)) c(E_f) \geq c_n \Delta h(f(C)). \quad (10)$$

Из соотношений (4) и (10) вытекает, что

$$h(f(C)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta I^{n-1}}. \quad (11)$$

Выберем теперь произвольно  $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ ,  $x \neq x_0$ , тогда найдётся  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , такое что  $|x - x_0| = \varepsilon$ . Поскольку в сделанных выше обозначениях  $x \in C$ , то согласно оценке (11) мы получим, что

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta I^{n-1}},$$

что и доказывает лемму.  $\square$

### 3. Доказательство теоремы 1.

Идея доказательства соответствует подходу, использованному при установлении теоремы 4.1 в [1]. По лемме 3.1 в [1] имеем оценку

$$\int_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\varepsilon M(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (12)$$

где  $\varepsilon = |x - x_0|/\rho$ ,  $q(r) = q_{x_0}(\rho r)$  и

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega_n \rho^n (1 - \varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) dm(z),$$

$R = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < |z - x_0| < \rho\}$  – кольцо с центром в точке  $x_0$  и  $\Omega_n$  – объём единичного шара  $\mathbb{B}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ . Т.к.  $|z| \leq |z - x_0| + |x_0| \leq \rho(x_0) + |x_0|$ , получаем, что

$$M(\varepsilon) \leq \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n (1 - \varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) \frac{dm(z)}{(1 + |z|^2)^n},$$

где  $\beta_n(x_0) = (1 + (\rho(x_0) + |x_0|)^2)^n / \rho^n(x_0)$ . Следовательно, при  $\varepsilon \leq 1/\sqrt[2]{2}$  и, в частности, при  $\varepsilon \leq 1/2$ ,

$$\Phi(0) \leq M(\varepsilon) \leq \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M.$$

Таким образом, из оценки (12) вытекает, что для всех  $x$ , таких что  $|x - x_0| < \rho(x_0)/2$ , имеет место неравенство

$$\int_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0) \rho^n}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (13)$$

где  $\lambda_n$  – некоторая постоянная, зависящая только от  $n$ . Тогда из (3) и (13) вытекает, что

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta} \cdot \frac{n}{\frac{\Phi(0) \rho^n}{|x-x_0|^n} \int_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}},$$

откуда ввиду условия (2) вытекает равностепенная непрерывность класса  $\mathfrak{R}_{M, \Delta}^{\Phi}$  в точке  $x_0$ .  $\square$

1. *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // *Ann. Acad. Sci. Fenn.* – 2011. – Vol. 36. – P. 231–244.
2. *Севостьянов Е. А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // *Алгебра и анализ.* – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 131–156.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* *Moduli in Modern Mapping Theory.* – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. *Ковтонок Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева (под редакцией В.И. Рязанова). – К.: Наук. думка, 2013. – 303 с.
5. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р. и Севостьянов Е. А.* Нормальность классов Орлича-Соболева // *Укр. мат. журнал.* – 2016. – Т. 68, №1. – С.106–116.
6. *Väisälä J.* *Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings.* – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
7. *Vuorinen M.* Some inequalities for the moduli of curve families // *Michigan Math. J.* – 1983. – Vol. 30. – P. 369–380.
8. *Севостьянов Е. А.* О равностепенно непрерывных семействах отображений, не принимающих значения из переменного множества // *Укр. мат. журнал.* – 2014. – Т. 66, № 3. – С. 361–370.
9. *Rickman S.* *Quasiregular mappings.* – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
10. *Куратовский К.* *Топология*, т. 2. – М.: Мир, 1969.
11. *Севостьянов Е. А.* Об интегральной характеристике некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // *Укр. мат. журнал.* – 2009. – Т. 61, № 10. – С. 1367–1380.

**Е. А. Sevost'yanov, A. A. Markysh**

**On equicontinuity of some class of mappings, which are quasiregular in the mean.**

A behavior of open discrete mappings, which are quasiregular in the mean, is investigated. It is proved that the classes of mappings mentioned above are equicontinuous (normal).

**Keywords:** *mappings with finite and bounded distortion, moduli of curve's families, capacities of condensers.*

**Є. О. Севостьянов, А. А. Маркиш**

**Про одностайну неперервність одного класу відображень, квазірегулярних у середньому.**

Вивчається поведінка відкритих дискретних відображень, квазірегулярних у середньому. Доведено, що сім'ї таких відображень одностайно неперервні (нормальні) в заданій області.

**Ключові слова:** *відображення зі скінченним і обмеженим спотворенням, модулі сімей кривих, ємності конденсаторів.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск  
*esevostyanov2009@mail.ru,*  
*tonya@bible.com.ua*

Получено 03.07.16