УДК 517.9

©2016. **С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев**

АВТОНОМНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХИЛЛА В ЧАСТНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Исследована задача о нахождении условий существования и построении решений автономной периодической задачи для слабонелинейного уравнения типа Хилла. Нами изучен случай наличия кратных корней уравнения для порождающих амплитуд. Для нахождения решений поставленной задачи в частном критическом случае получены конструктивные необходимые и достаточные условия существования, а также построена сходящаяся итерационная схема. Предложенная итерационная техника определяет приближения к решениям автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла, являющиеся периодическими функциями. В качестве примера исследована задача о нахождении периодических решений слабонелинейного уравнения Дюффинга.

Ключевые слова: *автономная периодическая задача, критический случай, уравнение Хилла, уравнение Дюффинга.*

1. Постановка задачи.

Исследована задача о построении решений [15]

$$y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon)\in \mathbb{C}^2[0,T_1(\varepsilon)],\ T_1(0)=2\pi,\ y(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла [3], [14, c. 315]

$$\frac{d^2y(t,\varepsilon)}{dt^2}+y(t,\varepsilon)=\varepsilon\cdot Y(y(t,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решение периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности периодического решения $y_0(t)\in\mathbb{C}^2[0,2\pi]$ порождающей периодической задачи для уравнения

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2}+y_0(t)=0. \tag{2}$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)$ – нелинейная скалярная функция, представляющая собой полином от неизвестной y и малого параметра ε, определенного на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Отличием поставленной задачи от аналогичной неавтономной периодической задачи является также тот факт, что период искомого решения уравнения (1)

$$T(\varepsilon):=2\pi\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big),\ \beta(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ \beta(0):=\beta^*$$

неизвестен [5]. Величина $\beta(\varepsilon)$ подлежит определению в процессе нахождения решения поставленной задачи для уравнения (1). Существенным отличием автономной

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

периодической задачи для уравнения типа Хилла (1) от аналогичной неавтономной периодической задачи также является тот факт, что любое решение $y(t,\varepsilon)$ автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла (1) существует наряду с целой серией решений $y(t+h,\varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Это позволяет зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи для уравнения (2) стало однопараметрическим, например $y_0(t) = c_0 \cdot \cos t, \ c_0 \in \mathbb{R}^1$, при этом периодические решения задачи (1), соответствующие синусам в порождающем решении могут быть получены смещением начального момента времени [5, с. 148].

Использованная ранее в монографиях [2, 15] и статьях [1, 9] итерационная техника, основанная на методе простых итераций, в процессе построения периодического решения уравнения (1) приводила к появлению вековых членов в разложении решения, являющихся непериодическими функциями, поэтому основной задачей, решению которой посвящена данная статья, является построение гарантированно сходящейся итерационной техники, не приводящей к появлению вековых членов в разложении искомого решения периодической задачи для уравнения (1). Кроме того, автономная периодическая задача в монографиях [2, 15] и статьях [1, 9] , была исследована для простых корней уравнения для порождающих амплитуд, поэтому основным отличием задачи, решению которой посвящена данная статья, является предположение о кратности корней уравнения для порождающих амплитуд.

Согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) является критической [2, 5]. Для произвольной функции $f(t) \in \mathbb{C}[0,2\pi]$ периодическая задача для уравнения

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = f(t) \tag{3}$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} H_r(s) f(s)\, ds = 0, \ H_r(t) := \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix};$$

в этом случае при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной общее решение периодической задачи для уравнения (3) имеет вид

$$y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t + G\Big[f(s)\Big](t), \ c_0 \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$G\Big[f(s)\Big](t) = \int_0^t \sin(t-s) f(s)\, ds$$

— оператор Грина периодической задачи для уравнения (3). Совершая в уравнении (1) замену независимой переменной [5]

$$t = \tau\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big),$$

приходим к задаче об отыскании решения

$$y(\tau,\varepsilon): \ y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,2\pi], \ y(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

2π – периодической задачи для уравнения

$$\frac{d^2 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + y(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, Z(y(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon), \tag{4}$$

где

$$Z(y(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon) := \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2 Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - \beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot y(\tau,\varepsilon).$$

2. Необходимое условие существования решения.

Условие разрешимости периодической задачи для уравнения (4)

$$\int_0^{2\pi} H_r(s)\, Z(y(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\; ds = 0 \tag{5}$$

в малой окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c)$ приводит к уравнению для порождающих амплитуд периодической задачи для уравнения (1)

$$F(c,\beta) := \int_0^{2\pi} H_r(s)\left[Y(y_0(s,c),\varepsilon) - 2\cdot\beta\cdot y_0(s,c)\right] ds = 0. \tag{6}$$

Лемма. *Если автономная периодическая задача для уравнения* (1) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(\tau,c_0) = c_0\cdot\cos\tau$, *то вектор* $\check{c}_0$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(\check{c}_0) = 0, \ \check{c}_0 = \mathrm{col}\,\Big(c_0, \ \beta_0\Big) \in \mathbb{R}^2.$$

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (6) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check{c}_0$ уравнения (6), приходим к задаче об отыскании решения периодической задачи для уравнения (1)

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0) = c_0\cdot\cos\tau$. Обозначим матрицу

$$\mathcal{B}_0(\varepsilon) := \frac{\partial F(\check{c})}{\partial(\check{c})}\Bigg|_{\check{c} \ = \check{c}_0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \check{c}(\varepsilon) = \mathrm{col}\,\Big(c(\varepsilon), \ \beta(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{R}^2, \ B_0 := \mathcal{B}_0(0).$$

В случае простых ($\det B_0 \neq 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (6) автономная периодическая задача для уравнения (1) имеет единственное решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее

$$y_0(t,c_0^*) = c_0^*\cdot\cos t, \ c_0^* := c_0(0).$$

Данный критический случай назван критическим случаем первого порядка [5, 9, 15]. Менее изученным является случай [4, 10, 16] кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения (6); при этом согласно традиционной классификации краевых задач поставленная задача для уравнения (1) не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [4, 15] , а также к особому критическому случаю, поскольку уравнение для порождающих амплитуд (6) не обращается в тождество [6, 8]. При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (6), оставляя только одну линейно-независимую строку уравнения (6), получаем эквивалентное условие разрешимости [11] исходной задачи (1)

$$F_\rho(\check{c}) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \Big[Y(y_0(s,c),\varepsilon) - 2 \cdot \beta \cdot y_0(s,c) \Big]\, ds = 0; \tag{7}$$

здесь $H_\rho(\tau) = \cos\tau$ в силу выбора порождающего решения $y_0(\tau) = c_0 \cdot \cos\tau$ системы (2). Предположим, что матрица B_0 имеет ненулевые элементы: $B_0 \neq 0$. Основным отличием частного критического случая от критического случая второго или более высокого порядка [4, 10, 16] является невозможность выделения единственного периодического решения даже при выполнении условий существования этого решения.

Пример 1. Частный критический случай имеет место в задаче о нахождении периодического решения уравнения Дюффинга [5]

$$y'' + y = \varepsilon \cdot y^3. \tag{8}$$

Действительно, уравнение для порождающих амплитуд (6) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (8) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} H_r(s)\, Z(y(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\, ds = -\frac{\pi c}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -4\beta\,(2+\beta\varepsilon) + 3\,(c + c\beta\varepsilon)^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ему соответствует уравнение для порождающих амплитуд вида (7):

$$F_\rho(\check{c}_0) := \frac{\pi c_0}{4} \left(3\, c_0^2 - 8\beta_0 \right) = 0.$$

Корень $\check{c}_0 = 0$ соответствует тривиальному порождающему решению $y_0(\tau, c_0) \equiv 0$, в малой окрестности которого расположено лишь положение равновесия уравнения Дюффинга (8). Серия корней

$$\beta_0^* = \frac{3\, {c_0^*}^2}{8},\ c_0^* \neq 0,\ c_0^* \in \mathbb{R}^1$$

обеспечивает вырожденность ($\det B_0 = 0$) матрицы B_0 :

$$B_0 = \frac{\pi c_0^*}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\, c_0^* & -4 \end{bmatrix} \neq 0;$$

таким образом, задача о нахождении периодического решения уравнения (8) при $c_0^* \neq 0$ представляет частный критический случай. Заметим, что уравнение для порождающих амплитуд (6) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (8) допускает более тонкий анализ. При условии $\varepsilon \neq 0$ и фиксированном $c(\varepsilon) \neq 0$ находим два корня

$$\beta_{\alpha,\beta}(\varepsilon) = \frac{4 - 3\,\varepsilon c^2 \pm 2\sqrt{4 - 3\,\varepsilon c^2}}{-4\,\varepsilon + 3\,\varepsilon^2 c^2},$$

первый из которых определяет функцию

$$\beta_\alpha(\varepsilon) = \frac{4 - 3\,\varepsilon c^2 + 2\sqrt{4 - 3\,\varepsilon c^2}}{-4\,\varepsilon + 3\,\varepsilon^2 c^2} = -\frac{2}{\varepsilon} - \frac{3\,c^2}{8} - \frac{27\,\varepsilon c^4}{128} - \frac{135\,\varepsilon^2 c^6}{1024} + \ \dots\ ,$$

не ограниченную на отрезке $[0, \varepsilon_0]$; второй определяет функцию

$$\beta_\beta(\varepsilon) = \frac{4 - 3\,\varepsilon c^2 - 2\sqrt{4 - 3\,\varepsilon c^2}}{-4\,\varepsilon + 3\,\varepsilon^2 c^2} = \frac{3\,c^2}{8} + \frac{27\,\varepsilon c^4}{128} + \frac{135\,\varepsilon^2 c^6}{1024} + \ \dots\ ,$$

ограниченную на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, в частности,

$$\beta_\beta(0) = \beta_0^* = \frac{3\,c_0^{*2}}{8}.$$

3. Достаточные условия существования решения.

При наличии кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения для порождающих амплитуд (7) зафиксируем один из корней $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$. Искомое решение автономной периодической задачи для уравнения (4) ищем в виде

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0(\varepsilon)) + x(\tau, \varepsilon),\ \ c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

Для нахождения возмущения

$$x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi],\ \ x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

исследуем периодическую задачу для уравнения

$$\frac{d^2 x(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\, Z(y_0(\tau, c_0(\varepsilon)) + x(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \qquad (9)$$

Решение автономной периодической задачи для уравнения (9)

$$x(\tau, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cos\tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),\ \ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

зависит от выбора корня $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$; здесь

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) := \varepsilon\, G\Big[Z(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \Big](\tau).$$

Предположим, что порождающее решение $y_0(\tau, c_0(\varepsilon))$ не является искомым решением автономной периодической задачи для уравнения (1). Оставляя только одну линейно-независимую строку в условии разрешимости (5) периодической задачи для уравнения (1), получаем эквивалентное условие разрешимости

$$F_\rho(\hat{c}(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s)\, Z(y_0(s, c_0) + \nu(\varepsilon)\cos s + x^{(1)}(s, \varepsilon), \beta_0 + \zeta(\varepsilon), \varepsilon)\; ds = 0; \quad (10)$$

здесь

$$\hat{c}(\varepsilon) := (\nu(\varepsilon), \zeta(\varepsilon))^* \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

Обозначая

$$a(\varepsilon) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \left\{ \varepsilon^2\, Y(y(s, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon \left[(c_0 + \nu)\cos s + x^{(1)}(s, \varepsilon) \right] \right\} ds,$$

$$b(\varepsilon) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \left\{ 2\,(1 + \varepsilon\beta_0) \left[\varepsilon\, Y(y(s, \varepsilon), \varepsilon) - (c_0 + \nu)\cos s - x^{(1)}(s, \varepsilon) \right] \right\} ds$$

и

$$c(\varepsilon) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \left\{ \Big(1 + \varepsilon\beta_0(\varepsilon) \Big)^2 Y(y(s, \varepsilon), \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \beta_0(\varepsilon) \Big(2 + \varepsilon\beta_0(\varepsilon) \Big) \cdot \Big[(c_0 + \nu)\cos s + x^{(1)}(s, \varepsilon) \Big] \right\} ds,$$

получаем квадратное уравнение

$$a(\varepsilon)\, \zeta^2(\varepsilon) + b(\varepsilon)\, \zeta(\varepsilon) + c(\varepsilon) = 0, \quad (11)$$

равносильное условию разрешимости (10). При условии

$$D(\varepsilon) := b^2(\varepsilon) - 4a(\varepsilon)\, c(\varepsilon) \geq 0 \quad (12)$$

уравнение (11) имеет действительные корни

$$\zeta(\varepsilon) = \frac{-b(\varepsilon) - \sqrt{D(\varepsilon)}}{2\, a(\varepsilon)},\ c_0 > 0,$$

либо

$$\zeta(\varepsilon) = \frac{-b(\varepsilon) + \sqrt{D(\varepsilon)}}{2\, a(\varepsilon)},\ c_0 < 0.$$

Таким образом, при наличии кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения для порождающих амплитуд (7) в случае (12) искомое решение автономной периодической задачи для уравнения (4) определяет операторная система

$$x(\tau, \varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cos\tau + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),\ \zeta(\varepsilon) = \frac{-b(\varepsilon) \pm \sqrt{D(\varepsilon)}}{2\, a(\varepsilon)}, \quad (13)$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\, G\left[Z(y_0(s,c_0)+x(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\right](\tau),\ \beta(\varepsilon)=\beta_0+\zeta(\varepsilon).$$

Для решения операторной системы (13) в случае (12) применим метод простых итераций [2, 16].

Теорема. *При наличии кратных* ($\det B_0=0$) *корней уравнения для порождающих амплитуд* (7) *автономная периодическая задача для уравнения* (4) *в критическом* ($P_{Q^*}\neq 0$) *случае при условии* (12) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в тривиальное* $x(\tau,0)\equiv 0$. *Решение автономной периодической задачи для уравнения* (4) *определяет операторная система* (13). *Автономная периодическая задача для уравнения* (1) *в критическом* ($P_{Q^*}\neq 0$) *случае при условии* (12) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau,0)=y_0(\tau,c_0^*)$. *Для построения решения автономной периодической задачи для уравнения* (4) *применима итерационная схема*

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\nu_{k+1}(\varepsilon)\cos\tau+x^{(1)}_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta_0(\varepsilon)+\zeta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$\zeta_{k+1}(\varepsilon)=\frac{-b_k(\varepsilon)\pm\sqrt{D_k(\varepsilon)}}{2\,a_k(\varepsilon)},\tag{14}$$

$$x^{(1)}_{k+1}(\tau,\varepsilon):=\varepsilon\, G\left[Z(y_0(s,c_0(\varepsilon))+x_k(s,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon),\varepsilon)\right](\tau),\ \dots,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Таким образом, в частном критическом случае при выполнении условий доказанной теоремы в окрестности любого порождающего решения $y_0(\tau,c_0)$ автономная периодическая задача для уравнения (4) имеет по меньшей мере одно решение. Другими словами, каждому из кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (7) при выполнении условий теоремы соответствует по меньшей мере одно решение автономной периодической задачи для уравнения (4), следовательно, в частном критическом случае при выполнении условий теоремы установлено наличие бесконечного множества решений автономной периодической задачи для уравнения (1), порождаемого бесконечной серией решений $y_0(\tau,c_0)$ задачи (2).

Заметим, что в отличие от итерационных схем, построенных ранее в монографиях [2, 15] и статьях [1, 9], итерационная техника (14) определяет решения автономной периодической задачи для уравнения (4), являющиеся периодическими функциями. Длина отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором применима итерационная схема (14), может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 15], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (13) аналогично [7].

Пример 2. Исследуем задачу о построении периодического решения уравнения Дюффинга (8)

$$y''+y=\varepsilon\cdot y^3.$$

Выше было установлено, что уравнение для порождающих амплитуд (7) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (8) имеет серию корней, для которых задача о нахождении периодического решения уравнения (8) представляет частный критический случай. Положим $c_0 := 0,1$; в этом случае

$$\beta_0(\varepsilon) = \frac{10\left(40 - 3\,{c_0}^2 - 2\sqrt{10(40 - 3{c_0}^2)}\right)}{3\,{c_0}^2 - 40} \approx 0,00\ 375\ 211,$$

при этом

$$x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon\,(\cos\tau - \cos 3\tau)}{31\ 976}.$$

Положим $\varepsilon := 0,1$ и $\nu_1 := 0$; в этом случае

$$\beta_1(\varepsilon) = \frac{15\ 337\ 448\ 310}{2\ 043\ 395\ 407\ 169 + 639\ 520\sqrt{10\ 216\ 977\ 035\ 845}} \approx 0,00\ 375\ 223,$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))-$ периодическое первое приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_1(\tau, \varepsilon) = \frac{31\ 977\cos\tau - \cos 3\tau}{31\ 760}.$$

Положим $\nu_2 := 0$; в этом случае

$$\beta_2(\varepsilon) \approx 0,00\ 375\ 222\ 228\ 101\ 744,$$

Таким образом, найдено $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon))-$ периодическое второе приближение к решению уравнения Дюффинга

$$y_2(\tau, \varepsilon) \approx \frac{61\ 957\ 374\cos\tau}{61\ 955\ 436} - \frac{372\ 313\cos 3\tau}{119\ 050\ 802\ 784} + \frac{128\cos 5\tau}{1\ 308\ 713\ 698\ 559} -$$
$$- \frac{\cos 7\tau}{653\ 866\ 081\ 642\ 540} + \frac{\cos 9\tau}{104\ 543\ 378\ 463\ 417\ 521\ 317}.$$

Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга определим невязки нулевого

$$\Delta_0(\varepsilon) := \left|\left|y_0''(\tau, c_0^*) + y_0(\tau, c_0^*) - \varepsilon \cdot y_0^3(\tau, c_0^*)\right|\right|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}$$

и первых двух приближений ($i = 1,\ 2$)

$$\Delta_i(\varepsilon) := \left|\left|y_i''(\tau, \varepsilon) + \Big(1 + \varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2 \cdot y_i(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \cdot \Big(1 + \varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2 \cdot y_i^3(\tau, \varepsilon)\right|\right|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}.$$

Положив $\varepsilon = 0,1$, убеждаемся в уменьшении нулевой и первых трех невязок от итерации к итерации

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,0000\ 250\ 188\ ,\ \Delta_1(0,1) \approx 2,34\ 776 \times 10^{-9},$$

$$\Delta_2(0,1) \approx 1.46\ 778 \times 10^{-13}.$$

Заметим, что найденные три приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга имеют невязки значительно меньшие, чем соответствующие приближения, найденные при помощи метода Ляпунова–Пуанкаре. Кроме того, найденные приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга периодичны.

Предложенная в статье схема исследования автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла (1) аналогично [15, 17] может быть перенесена на автономные матричные краевые задачи, а также аналогично [13, 14] — на матричные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса. С другой стороны, полученные в статье результаты могут быть аналогично [18] перенесены на матричные краевые задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений, а также, аналогично [19] использованы для нахождения условий существования ограниченных на всей оси решений матричных слабовозмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В заключение, считаем своим долгом от всего сердца поблагодарить члена-корреспондента НАН Украины Владимира Яковлевича Гутлянского за постоянное внимание и поддержку, а также поздравить его с замечательным юбилеем и пожелать плодотворной работы, новых творческих идей, осуществления всех замыслов, душевной гармонии и оптимизма. Пусть накопленный жизненный опыт и мудрость поможет Вам достичь новых высот.

1. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 10. – С. 1668–1674.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 778 с.
4. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 1. – С. 62–69.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
6. *Чуйко С. М.* Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доп. НАН України. – 2007. – № 2. – С. 26–30.
7. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 416–432.
8. *Чуйко С. М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 4. – С. 548–562.
9. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 405–416.
10. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае // Нелинейные колебания. – 2010. – Т. 13, № 1. – С 115–132.
11. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. – 2009. – Т. 27. – С. 127–142.
12. *Чуйко С. М., Чуйко Ан. С.* Периодическая задача для уравнения типа Хилла // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. – 2010. – Т. 4. – С. 141–181.
13. *Чуйко С. М., Чуйко А. С., Сысоев Д. В.* Слабонелинейная матричная краевая задача в

случае параметрического резонанса // Нелінійні коливання. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 276–289.

14. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
15. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
16. *Boichuk I. A., Starkova O. V., Chuiko S. M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. – 2009. – V. 23, № 1. – P. 1–8.
17. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – V. 17, № 1. – P. 139–150.
18. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel // Ukrainian Mathematical Journal. – 1996. – V. 48, № 11. – P. 1785–1789.
19. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Boichuk An. A.* Solutions, bounded on the whole axis, of linear weakly perturbed systems // Ukrainian Mathematical Journal. – 2002. – V. 54, № 11. – P. 1517–1530.

S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova (Starkova), D. V. Sysoev

Autonomous periodic value problem for an equation of Hill's in particular critical case.

We studied the problem of finding the conditions of existence and the construction of an autonomous periodic boundary value problem for the weakly nonlinear equations such as Hill. We studied the case of the presence of multiple roots of an equation for generating the amplitude. To find the solutions of the problem in the particular case of the critical design obtained the necessary and sufficient conditions of existence, as well as built converging iterative scheme. The proposed iterative technique determines the autonomous decisions of the periodic problem for an equation of the Hill, is a periodic function. As an example, we studied the problem of finding periodic solutions of weakly nonlinear Duffing equation.

Keywords: *autonomous periodic value problem, critical case, the Hill equation, Duffing equation.*

С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова (Старкова), Д. В. Сисоєв

Автономна періодична задача для рівняння типу Хілла у частинному критичному випадку.

Досліджено задачу про знаходження умов існування і побудову розв'язків автономної періодичної задачі для слабконелінійного рівняння типу Хілла. Нами розглянуто випадок наявності кратних коренів рівняння для породжуючих амплітуд. Для знаходження розв'язків поставленої задачі у частинному критичному випадку отримані конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також побудована збіжна ітераційна схема. Запропонована ітераційна техніка дозволяє знаходження розв'язків автономної періодичної задачі для рівняння типу Хілла, які є періодичними функціями. Як приклад, досліджено задачу про знаходження періодичних розв'язків слабконелінійного рівняння Дюффінга.

Ключові слова: *автономна періодична задача, критичний випадок, рівняння Хілла, рівняння Дюффінга.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
`chujko-slav@inbox.ru`

Получено 30.10.16