УДК 517.5

©2016. **В. В. Билет, Р. Р. Салимов**

ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ ОБРАЗА КРУГА ДЛЯ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

Для регулярных гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, обладающих N-свойством Лузина, установлена оценка площади образа круга в терминах угловой дилатации. Как следствие, получен аналог известной леммы типа Икомы–Шварца для таких отображений.

Ключевые слова: *угловая дилатация, изопериметрическое неравенство, класс Соболева*

Статья посвящена профессору В. Я. Гутлянскому по случаю его 75-летнего юбилея.

1. Введение.

В данной статье получены точные оценки искажения площади образа круга при регулярных гомеоморфизмах класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, обладающих N-свойством (Лузина).

Отметим, что впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии Лаврентьева М. А., см. [3]. В монографии [1], см. предложение 3.7, получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также ранее в работах [5] и [7] верхние оценки искажения площади образа круга были получены методом модулей.

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то есть связное, открытое подмножество $\mathbb{C}$. Напомним, что отображение $f : G \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in G$, если в этой точке f имеет полный дифференциал и его Якобиан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ (см., например, I. 1.6 в [4]). Гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ называется *регулярным*, если $J_f > 0$ почти всюду (п.в.).

Говорят, что гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ обладает *N-свойством* (Лузина), если для любого множества $E \subset G$ из условия $|E| = 0$ следует, что $|f(E)| = 0$.

Пусть f — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, $p > 1$. Будем называть величину

$$D_p(z, z_0) = D_p(z_0 + re^{i\theta}, z_0) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})} \tag{1}$$

p-угловой дилатацией отображения f относительно точки z_0. Здесь $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, J_f – якобиан отображения f. При $z_0 = 0$ будем полагать $D_p(z) = D_p(re^{i\theta})$.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке гранта 0115U000136 Министерства образования и науки Украины.

2. Вспомогательные результаты.

Обозначим через $L(r)$ длину кривой $f(re^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и через $S(r) = |f(B_r)|$ – площадь $f(B_r)$. Везде далее полагаем

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, обладающий N-свойством. Тогда при $p \geqslant 2$*

$$L^p(r) \leqslant \delta_p(r) S'(r) \tag{3}$$

для п.в. $r \in [0,1]$, где

$$\delta_p(r) = \left(\int\limits_{\gamma_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\, |dz| \right)^{p-1}, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}. \tag{4}$$

Доказательство. Для п.в. $r \in [0,1]$, имеем

$$L(r) = \int\limits_0^{2\pi} |f_\theta(re^{i\theta})|\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} D_p^{\frac{1}{p}}(re^{i\theta})\, J_f^{\frac{1}{p}}(re^{i\theta})\, r\, d\theta, \tag{5}$$

где $D_p(re^{i\theta})$ – p-угловая дилатация, определенная в (1).

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$L(r) \leqslant \left(\int\limits_0^{2\pi} J_f(re^{i\theta})\, r\, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{2\pi} D_p^{\frac{1}{p-1}}(re^{i\theta})\, r\, d\theta \right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{6}$$

для п.в. $r \in [0,1]$. Используя тот факт, что

$$S'(r) = \int\limits_0^{2\pi} J_f(re^{i\theta})\, r\, d\theta, \tag{7}$$

получаем

$$L^p(r) \leqslant \delta_p(r) S'(r) \tag{8}$$

для п.в. $r \in [0,1]$. Лемма 1 доказана. □

В следующей лемме получено дифференциальное неравенство для функции $S(r)$.

Лемма 2. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, обладающий N-свойством. Тогда при $p \geqslant 2$*

$$S'(r) \geqslant (4\pi)^{\frac{p}{2}}\, \delta_p^{-1}(r)\, S^{\frac{p}{2}}(r) \tag{9}$$

для п.в. $r \in [0,1]$, *где* $\delta_p(r)$ *определено равенством* (4).

Доказательство. Из неравенства (3) следует, что для п.в. $r \in [0,1]$

$$S'(r) \geqslant \delta_p^{-1}(r)\, L^p(r). \tag{10}$$

Используя далее известное изопериметрическое неравенство

$$L^2(r) \geqslant 4\pi S(r), \tag{11}$$

получаем дифференциальное неравенство (9). Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— регулярный гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, *обладающий* N*-свойством. Тогда при* $p = 2$ *имеет место оценка*

$$S(r_1) \leqslant S(r_2) \exp\left\{-4\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)}\right\}, \tag{12}$$

а при $p > 2$ *—*

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) \leqslant (4\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{p-2}{2} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_p(r)}, \tag{13}$$

где $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1$ *и* $\delta_p(r)$ *определено равенством* (4).

Доказательство. Воспользуемся дифференциальным неравенством (9). Тогда для п.в. $r \in [0,1]$

$$\frac{S'(r)}{S^{\frac{p}{2}}(r)}\, dr \geqslant (4\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{dr}{\delta_p(r)}. \tag{14}$$

При $p = 2$, имеем

$$\frac{S'(r)}{S(r)}\, dr \geqslant 4\pi \frac{dr}{\delta_2(r)}. \tag{15}$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $r \in [r_1, r_2]$, получаем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} (\ln S(r))'\, dr \geqslant 4\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)}. \tag{16}$$

Заметим, что функция $g(r) = \ln S(r)$ является неубывающей, тогда

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} (\ln S(r))' dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} g'(r) dr \leqslant g(r_2) - g(r_1) = \ln \frac{S(r_2)}{S(r_1)} \tag{17}$$

(см., напр., теорему IV. 7.4 в [6]) и

$$\ln \frac{S(r_2)}{S(r_1)} \geqslant 4\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)}, \tag{18}$$

откуда

$$S(r_1) \leqslant S(r_2) \exp \left\{ -4\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_2(r)} \right\}. \tag{19}$$

При $p > 2$, имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}} \right)' dr \geqslant (4\pi)^{\frac{p}{2}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_p(r)}. \tag{20}$$

Заметим, что функция $g_p(r) = \frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}$ является неубывающей, тогда

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}} \right)' dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} g_p'(r) \leqslant g_p(r_2) - g_p(r_1) = \frac{2}{2-p} \left(S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) \right) \tag{21}$$

(см., теорему IV. 7.4 в [6]).

Таким образом, получаем

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) \leqslant (4\pi)^{\frac{p}{2}} \frac{p-2}{2} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\delta_p(r)}. \tag{22}$$

Лемма 3 доказана. □

3. Основные результаты.

Ниже приведена теорема об оценке площади образа круга.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, обладающий N-свойством. Тогда при $p = 2$ имеет место оценка*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \exp \left\{ -4\pi \int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{\delta_2(t)} \right\}, \tag{23}$$

а при $p > 2$ —

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{\delta_p(t)} \right)^{-\frac{2}{p-2}}, \tag{24}$$

где

$$\delta_p(r) = \left(\int\limits_{\gamma_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\, |dz| \right)^{p-1}, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}. \tag{25}$$

Доказательство. Теорема 1 следует из леммы 3 при условии, что $S(1) \leqslant |f(\mathbb{B})| = \pi$. $\square$

Из теоремы 1 вытекает аналог известной леммы типа Икомы-Шварца (см. теорему 2 в [2]).

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, обладающий N-свойством, $f(0) = 0$. Тогда при $p = 2$ имеет место оценка*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \exp\left\{2\pi \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\delta_2(t)}\right\} \leqslant 1, \tag{26}$$

а при $p > 2$ —

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\delta_p(t)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant 1. \tag{27}$$

Следствие 1. В частности, если $p > 2$, то имеет место оценка

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{1} \frac{dt}{\delta_p(t)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \leqslant (2\pi)^{1-p}(p-2)^{\frac{1}{2-p}}. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 2. Положим $l_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда, учитывая, что $f(0) = 0$, получаем $\pi\, l_f^2(r) \leqslant |f(B_r)|$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leqslant \sqrt{\frac{|f(B_r)|}{\pi}}. \tag{29}$$

Таким образом, учитывая неравенства (23) и (24), имеем

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{\mathcal{R}_p(|z|)} = \liminf_{r\to 0} \frac{l_f(r)}{\mathcal{R}_p(r)} \leqslant \liminf_{r\to 0} \sqrt{\frac{|f(B_r)|}{\pi}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}_p(r)} \leqslant 1, \tag{30}$$

где

$$\mathcal{R}_p(r) = \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2) \int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{\delta_p(t)}\right)^{-\frac{1}{p-2}} \tag{31}$$

при $p > 2$ и

$$\mathcal{R}_p(r) = \exp\left\{-2\pi\int\limits_r^1 \frac{dt}{\delta_2(t)}\right\} \tag{32}$$

при $p = 2$. Теорема 2 доказана.□

1. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane. – Tracts in Mathematics 19, Warsaw - Donetsk - Helsinki, 2013, 216 p.
2. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – V. 25. – P. 175–203.
3. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М: АН СССР, 1962, 136 с.
4. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – New York: Springer–Verlag, 1973, 258 p.
5. *Ломако Т. В., Салимов Р. Р.* К теории экстремальных задач // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 264–269.
6. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949, 495 с.
7. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. – 2014. – Т. 26, № 6. – С. 143–171.

V. V. Bilet, R. R. Salimov

The estimation of the area of a disk image for Sobolev classes.

For regular homeomorphisms of the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ having the Luzin N-property, it is established the estimation of the area of a disk image in terms of an angular dilatation. As a corollary, the analog of the well-known Ikoma–Schwartz type lemma for such mappings is obtained.

Keywords: *angular dilatation, isoperimetric inequality, Sobolev class.*

В. В. Білет, Р. Р. Салімов

Оцінка площі образу кола для класів Соболєва.

Для регулярних гомеоморфізмів класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, які задовольняють N-властивості Лузіна, встановлено оцінку площі образу кола в термінах кутової дилатації. Як наслідок, отримано аналог відомої леми типу Ікоми–Шварца для таких відображень.

Ключові слова: *кутова дилатація, ізопериметрична нерівність, клас Соболєва.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
Ин-т математики НАН Украины, Киев
biletvictoriya@mail.ru, ruslan623@yandex.ru

Получено 09.07.16