УДК 517.956.2

©2016. **Р. М. Джафаров**

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОБЛАСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ШАРОВ

Регулярность решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона в области, образованной пересечением шаров, изучается на основе построения функции Грина.

Ключевые слова: *функция Грина, негладкая область.*

1. Введение. Хорошо известно, что решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с гладкой границей является бесконечно дифференцируемой функцией, если свободный член - бесконечно дифференцируемая функция. Возможность продолжения частных производных этого решения по непрерывности в граничные точки существенно зависит от регулярности границы в окресности этих точек и граничной функции. В частности, если для некоторой граничной точки существует ее окресность, такая, что ее пересечение с границей является графиком бесконечно дифференцируемой функции и на этом пересечении решение принимает нулевые значения, то в эту граничную точку и в соседние с ней можно продолжить все частные производные решения так, что в результате получим непрерывные функции на множестве, которое является объединением области определения с соответствующей частью границы. Если все точки границы обладают указанным свойством, то решение данной задачи является бесконечно дифференцируемой функцией на замыкании области определения.

С другой стороны, наличие угловой точки влечет неограниченность производных решения в окресности угловой точки.

В работе [2, лемма 2.1] доказана регулярность решения уравнения Лапласа в области, образованной углом $\frac{\pi}{m}$, где m — натуральное число. Этот результат обобщен на случай областей, граница которых образована пересекающимися под углом $\frac{\pi}{m}$ кривыми, в [5, с.44].

Однако уже в задаче Дирихле для бигармонического уравнения решение не обладает таким свойством. Так, в [3, с. 287] доказано, что не существует углов, за исключением угла π, в которых решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения с нулевыми граничными значениями на сторонах угла, является бесконечно дифференцируемым.

Задачам в областях с угловыми и коническими точками посвящено большое количество работ достаточно общего характера, начиная с работы [3]. Мы выделяем только некоторые области с сингулярной границей, в которых дифференциальные свойства лучше, чем те, которые следуют из общих исследований.

В области, образованной пересечением шаров под углом $\frac{\pi}{m}$, $m = 2, 3, ...$, мы покажем ограниченность частных производных, что соответствует областям с гладкой границей.

Кроме того, возможно, основанный на построении функции Грина метод поможет глубже представить причину повышения гладкости в областях с “целыми” углами.

2. Основное утверждение.

Пусть Ω — область, образованная пересечением шаров

$$B_+ : x_1^2 + x_2^2 + ... + (x_n + l_m)^2 \le a^2,$$

$$B_- : x_1^2 + x_2^2 + ... + (x_n - l_m)^2 \le a^2.$$

Предположим, шары пересекаются под углом $\frac{\pi}{m}, m = 2, 3, ...$
Например, для $m = 2, \quad l_m = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Индекс у l_m далее будем опускать.

Будем рассматривать задачу

$$\Delta u = f, \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R^n}, \tag{1}$$

$$u = 0, \qquad x \in S, \tag{2}$$

где S — граница области Ω.

Решение будем понимать в классическом смысле, т. е. $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$.

Теорема. *Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$ Тогда для всякого натурального N решение задачи (1),(2) имеет ограниченные непрерывные производные N-го порядка в Ω.*

Мы построим функцию Грина, и имея представление решения, докажем теорему.

3. Построение функции Грина.

Функцию Грина для задачи (1), (2) строим подобно тому, как это сделано в [4, §4]. Для этого воспользуемся следующим свойством. Сфера — это множество точек, расстояние от которых до любой точки внутри сферы и до образа этой точки в результате инверсии относятся как расстояние между этой точкой и центром сферы к радиусу сферы.

Преобразование инверсии относительно сферы радиуса a с центром в z_0:

$$\xi^* = \frac{a^2}{|\xi - z_0|^2}\xi - \frac{a^2}{|\xi - z_0|^2} z_0 + z_0.$$

Чтобы получить инверсию относительно нижней (верхней) сферы, необходимо положить $z_0 = -\bar{l}$ $(z_0 = \bar{l})$, где $\bar{l} = (0, 0, ..., l)$

Предположим, для внутренней точки Ω, имеем последовательность инверсий, которые чередуются относительно верхней и нижней сфер. Для сфер, которые пересекаются под углом $\frac{\pi}{m}$, количество точек, полученных в результате инверсий, равно $2m$. Последующие инверсии совпадут с полученными [4, с. 26].

Обозначим $\xi^{\pm k}$, $k \in \mathbf{N}$ точку, которая получена в результате инверсии точки $\xi^{\mp(k-1)}$ относительно верхней (в случае ’+’) или нижней (в случае ’-’) сферы. При этом, $\xi^0 = \xi$.

Таким образом, получаем функцию Грина в виде

$$G(x,\xi) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left\{\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{a^{n-2}}{|\xi+\bar{l}|^{n-2}\cdot|x-\xi^{-1}|^{n-2}} - \right.$$

$$- \frac{a^{n-2}}{|\xi-\bar{l}|^{n-2}\cdot|x-\xi^{1}|^{n-2}} + \frac{a^{n-2}}{|\xi+\bar{l}|^{n-2}}\frac{a^{n-2}}{|\xi^{-1}-\bar{l}|^{n-2}}\frac{1}{|x-\xi^{2}|^{n-2}} + ...+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{a^{n-2}}{|\xi+\bar{l}|^{n-2}}\frac{a^{n-2}}{|\xi^{-1}-\bar{l}|^{n-2}}\cdot ...\cdot\frac{a^{n-2}}{|\xi^{(-1)^m(m-2)}-(-1)^{m-1}\bar{l}|^{n-2}}\times$$

$$\times\frac{1}{|x-\xi^{(-1)^{m-1}(m-1)}|^{n-2}} + (-1)^{m-1}\frac{a^{n-2}}{|\xi-\bar{l}|^{n-2}}\frac{a^{n-2}}{|\xi^{-1}+\bar{l}|^{n-2}}\cdot$$

$$\cdot ...\cdot\frac{a^{n-2}}{|\xi^{(-1)^{(m-1)}(m-2)}-(-1)^{m}\bar{l}|^{n-2}}\times$$

$$\times\frac{1}{|x-\xi^{(-1)^{m}(m-1)}|^{n-2}} + (-1)^{m}\frac{a^{n-2}}{|\xi+\bar{l}|^{n-2}}\frac{a^{n-2}}{|\xi^{-1}-\bar{l}|^{n-2}}\cdot$$

$$\left.\cdot ...\cdot\frac{a^{n-2}}{|\xi^{(-1)^{(m-1)}(m-1)}-(-1)^{m}\bar{l}|^{n-2}}\frac{1}{|x-\xi^{(-1)^m m}|^{n-2}}\right\}, \tag{3}$$

где $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ — площадь единичной сферы.

В случае $m=2$

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{(2-n)\omega_n}\left\{\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{a^{n-2}}{|\xi+\bar{l}|^{n-2}\cdot|x-\xi^{-1}|^{n-2}} - \right.$$

$$\left.- \frac{a^{n-2}}{|\xi-\bar{l}|^{n-2}\cdot|x-\xi^{1}|^{n-2}} + \frac{a^{n-2}}{\sqrt{2}|\xi|^{n-2}}\frac{1}{|x-\xi^{2}|^{n-2}}\right\}. \tag{4}$$

Выполнение граничных условий (2) следует из конструкции функции Грина. Действительно, первые два слагаемых правой части (3) обеспечивают выполнение граничных условий на ∂B_-. Следующие два слагаемых обеспечивают выполнение граничных условий на ∂B_+, компенсируя влияние в точках ξ и ξ^{-1}. Прибавляя по два слагаемых, дойдем до $2m-1$ и $2m$- го слагаемых, которые обеспечивают выполнение граничных условий на ∂B_+, если m четное и на ∂B_-, если m нечетное. Конечность суммы, определяющей функцию Грина вытекает из того, что инверсия точки $\xi^{(-1)^m m}$ совпадает с одной из точек $\xi, \xi^{-1}, ..., \xi^{(-1)^{m-1}(m-1)}$, которые входят в слагаемые, определяющие функцию Грина.

4. Доказательство теоремы.

Докажем вначале теорему для шаров, которые пересекаются под прямым углом. Решение задачи (1), (2) в ограниченной области [6, теорема 1.5.1] может быть представлено в виде

$$u(\xi) \,=\, \int_\Omega G(x,\xi)\triangle u(x)\,dx \,-\, \int_S G(x,\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\,dS \,+\, \int_S u(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\,dS,$$

$\xi\in\Omega\backslash(0,0)$. Или, учитывая (1), (2)

$$u(\xi) \,=\, \int_\Omega G(x,\xi)f(x)\,dx.$$

Рассмотрим производные $\frac{\partial}{\partial\xi_i}u(\xi)$. В сумму, которая определяет $\frac{\partial}{\partial\xi_i}u(\xi)$ войдут следующие слагаемые

$$\frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{a^{n-2}(\xi_i+\kappa_{ip})}{\theta_p|\xi+\delta_p|^n}\int_\Omega\frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}f(x)\,dx \tag{5}$$

и

$$\frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{a^{n-2}}{\theta_p|\xi+\delta_p|^{n-2}}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{a^{n-2}}{\theta_p|\xi+\delta_p|^{n-2}}(\xi^p)'_{\xi_i}\int_\Omega\frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)\,dx, \tag{6}$$

$p=-1,0,1,2,$, где

$$\kappa_{ip}=\begin{cases}0, \quad i=\overline{1,n-1}, p=-1,1,2;\\ \frac{a}{\sqrt2} \quad i=n, p=-1;\\ 0, \quad i=n, p=2;\\ -\frac{a}{\sqrt2}, \quad i=n, p=1;\end{cases} \qquad \delta_p=\begin{cases}(0,0,...,\frac{a}{\sqrt2}), \quad p=-1;\\ (0,0,...,0), \quad p=2;\\ (0,0,...,-\frac{a}{\sqrt2}), \quad p=1;\end{cases}$$

$$\theta_p=\begin{cases}1, \quad p=-1,1;\\ \sqrt2, \quad p=2.\end{cases}$$

При $\xi\in\Omega\setminus B_r$, где B_r — шар достаточно малого радиуса r с центром в начале координат, множители, которые стоят перед интегралами в (5), (6), оцениваются сверху и снизу константами, которые зависят от a и r.

Производные N-го порядка функции $u(\xi)$: $D^\beta u(\xi)$, $|\beta|=N$ в $\Omega\setminus B_r$ будут представлены слагаемыми вида

$$\sum_{|\beta|=N}F_\beta(\xi^p)\int_\Omega\frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\,D^\beta f(x)\,dx, \tag{7}$$

где $F_\beta(\xi^p)$ — непрерывные и ограниченные вместе со своими производными функции в $\Omega\setminus B_r$.

Сделав замену переменных $x-\xi^p=z$ и $x-\zeta^p=z$ для $\beta:\ |\beta|\le N$ будем иметь

$$|\int_\Omega\frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\,D^\beta f(x)\,dx \,-\, \int_\Omega\frac{1}{|x-\zeta^p|^{n-2}}\,D^\beta f(x)\,dx\,| \,=$$

$$= |\int_{\mathbf{R^n}} \frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx \,-\, \int_{\mathbf{R^n}} \frac{1}{|x-\zeta^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx\,| =$$

$$= |\int_{\mathbf{R^n}} \frac{1}{|z|^{n-2}}\, D^\beta f(z+\xi^p)\,dz \,-\, \int_{\mathbf{R^n}} \frac{1}{|z|^{n-2}}\, D^\beta f(z+\zeta^p)\,dz\,| \le$$

$$\le \int_{\mathbf{R^n}} \frac{1}{|z|^{n-2}}\, |D^\beta f(z+\xi^p) - D^\beta f(z+\zeta^p)|\,dz\,. \tag{8}$$

Учитывая (7), (8) а также

$$F_\beta(\xi^p)\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx \,-\, F_\beta(\zeta^p)\int_\Omega \frac{1}{|x-\zeta^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx \,=$$

$$= \,(F_\beta(\xi^p) - F_\beta(\zeta^p))\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx +$$

$$+\,F_\beta(\zeta^p)(\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx \,-\, \int_\Omega \frac{1}{|x-\zeta^p|^{n-2}}\, D^\beta f(x)\,dx) \tag{9}$$

видим, что непрерывность и ограниченность $D^\beta u(\xi),\ |\beta| = N$ следует из непрерывности и ограниченности $D^\beta f$.

Непрерывность $D^\beta u(\xi),\ \xi \in B_r,\ |\beta| = N$ следует из внутренних шаудеровских оценок [1, с. 241] и принципа максимума [1, с. 161]. Для шаров, которые пересекаются под углом $\frac{\pi}{2}$ утверждение теоремы доказано.

Предположим, что шары B_+ та B_- пересекаются под углом $\frac{\pi}{m},\ m > 2$. Заметим, когда шары пересекаются под прямым углом, точка (0,0) является образом в результате инверсии центров нижней и верхней сфер. А центр сферы — особая точка при отображении инверсии. Поэтому мы рассматривали отдельно области $\Omega \setminus B_r$ и B_r. При пересечении шаров под углом $\frac{\pi}{m},\ m > 2$ образы центра верхней сферы относительно нижней сферы и ценра нижней сферы относительно верхней сферы не принадлежат $\overline{\Omega}$. Доказательство этого факта элементарно и потому здесь не приводится. Поэтому отдельно рассматривать область B_r нет необходимости.

Как и для пересечения шаров под углом $\frac{\pi}{2}$, производные N-го порядка решения задачи (1), (2) в случае области, образованной пересечением шаров под углом $\frac{\pi}{m},\ m > 2$, представляются суммами (8).

Тогда непрерывность и ограниченность $D^\beta u(\xi),\ |\beta| = N$ следует из (7), (8), (9) а также из непрерывности и ограниченности соответствующих производных $f(x)$. Теорема доказана. □

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
2. *Волков Е. А.* О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках // Труды математического института им. Стеклова. – 1965. – Т. 77. – С. 133–152.

3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского математического общества. – 1967. –Т. 16. – С. 219–292.
4. *Шестопал А. Ф.* Метод разложения по фундаментальным решениям в применении к задачам математической физики: Дис. доктора физ.-мат. наук. – Киев, 1969. – 394 с.
5. *Azzam. A.* On the Dirichlet problem for linear elliptic equation in plane domains with corners // Annales Polonici Math. – 1983. – XLIII, №1. – P. 431–440.
6. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. – RMA 22, Masson, Paris. – 1992. – 198 p.

R. M. Dzhafarov

About regularity of Poisson equation solution in area of formed crossing of balls.

The regularity of the solution of the first boundary value problem for Poisson equation in areas of formed crossing of balls is studied due to of constructing of Green function.

Keywords: *Green function, nonregular domain.*

Р. М. Джафаров

Про регулярність розв'язку рівняння Пуасона в області, яку утворено перетином куль.

Регулярність розв'язку першої крайової задачі для рівняння Пуасона в області, яку утворено перетином куль, досліджується із застосуванням функції Грина.

Ключові слова: *функція Грина, негладка область.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
dzhafarov@ukr.net
Получено 08.06.16