УДК 533.6.013.42

©2017. **А. А. Лимарь, Ю. Н. Кононов**

ОБ УТОЧНЕНИИ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ ОСНОВАНИЯМИ

В линейной постановке выведено уточненное, на случай осесимметричных колебаний, частотное уравнение собственных совместных колебаний прямоугольной мембраны и жидкости. Мембрана горизонтально разделяет идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. Частотное уравнения для симметричных и несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости представлено в единой форме. Уточнены ранее полученные приближенные условия устойчивости колебаний мембраны и жидкости. Показано, что для несимметричных частот приближенное значение критического натяжения является заниженным в 4/5 раза, а для симметричных – в 0.818 раз.

MSC: 34N05.

Ключевые слова: *гидроупругость, прямоугольная мембрана, идеальная несжимаемая жидкость, плоские колебания, устойчивость.*

1. Введение.

На основании единого Лагранжевого подхода задача о колебании и устойчивости упругой прямоугольной пластины между идеальными жидкостями разной плотности в жестком прямоугольном канале, по видимому, впервые была рассмотрена в статье [1] и в монографии [2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании Лагранжа-Эйлерова подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работах [5, 6] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [7] – на случай упругого дна. Наиболее общие исследования колебаний резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена пластина или мембрана, было проведено в монографии [7]. Из последних работ следует отметить работы [8–12]. В статьях [13–14] рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях упругой мембраны, разделяющей двухплотностную жидкость в жестком круговом цилиндрическом резервуаре применительно к современным капиллярным системам отбора жидкости (КСОЖ).

2. Постановка задачи.

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной мембраны горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности ρ_i (i = 1,2)

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

в жестком прямоугольном канале шириной b (b = 2a). Мембрана подвержена растягивающим усилиям интенсивности T в срединной поверхности. Контуры мембраны закреплены. Верхняя жидкость плотности ρ_1 заполняет сосуд до глубин h_1, а нижняя жидкость плотности ρ_2 до глубины h_2. Систему координат Oxyz расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущённой срединной поверхности мембраны, ось Oy была направлена вдоль канала, а ось Oz - противоположно вектору ускорения силы тяжести $\overrightarrow{g}$. Колебания мембраны и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными. Уравнения плоских колебаний упругой мембраны и жидкости имеют вид [10–11]

$$k_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+g\Delta\rho W=\rho_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}+Q \text{ при } z=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}=0 \quad (i=1,2) \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z=0, \tag{3}$$

$$W|_{x=\pm a}=0, \tag{4}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} W dx=0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{x=\mp a}=0 \;\; (i=1,2), \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=0 \text{ при } z=h_1, \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h_2. \tag{7}$$

Здесь $k_0=\rho_0 h_0; W(x,t), \rho_0, h_0$ – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина мембраны; $\Phi_i\,(x,z,t)$ - потенциал скоростей i-ой жидкости (i = 1,2); $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1; Q=Q_2\rho_2-Q_1\rho_1, Q_i$ – произвольная функция времени.

3. Метод решения.

Представим функции $\Phi_i\,(x,z,t)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n\,(x)$

$$\Phi_i\,(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}\,(t)\,e^{k_n z}+B_{in}\,(t)\,e^{-k_n z}\right]\psi_n\,(x)(i=1,2), \tag{8}$$

где функции $\psi_n\,(x)=\cos k_n\,(x+a)$, а соответствующие им собственные числа $k_n = \pi/2a$ [3].

Представление функций $\Phi_i\,(x,z,t)$ в виде (8) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (8) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций ψ_n, получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных A_{in}, B_{in} и $\dot{W}_n$. Разрешим ее относительно $\dot{W}_n$:

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}\ , \\ A_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{N_n^2} \int\limits_{-a}^{a} W \psi_n dx, \\ N_n^2 &= \int\limits_{-a}^{a} \psi_n^2 dx = a, \kappa_{in} = h_i k_n. \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом соотношений (8)–(10) уравнение (1) примет вид

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + g \Delta\rho W = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n + Q, \tag{11}$$

где $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$.

Таким образом, совместные колебания упругой мембраны и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (10)–(11), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

4. Собственные частоты совместных колебаний упругой мембраны и жидкости.

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой мембраны и жидкости положим:

$$W(x,t) = w(x) e^{i\omega t},\ Q = C_0 e^{i\omega t}. \tag{12}$$

Подставив (12) в (10)–(11), в граничные условия (4) и условия (5), получим

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + qw = -\frac{\omega^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n + C, \tag{13}$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int\limits_{-a}^{a} w \psi_n dx, \tag{14}$$

$$w|_{x=\pm a} = 0, \tag{15}$$

$$\int_{-a}^{a} w dx = 0. \tag{16}$$

Здесь $q = (k_0\omega^2 - g\Delta\rho)/T$, $C = -C_0/T$.

Общее решение уравнения (13) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [7]

$$w = \sum_{k=1}^{2} A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n + w_0, \tag{17}$$

где w_k^0 $(k = \overline{1,2})$ – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^2 w_k^0}{dx^2} + q w_k^0 = 0. \tag{18}$$

Здесь A_k^0, $\tilde{C}_n$ и w_0 – неизвестные константы.

Подставив (17) в уравнение (13), и воспользовавшись соотношением $\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = -k_n^2\psi_n$, получим

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n}{k_n d_n} w_n,\ C = q w_0 \tag{19}$$

где $d_n = Tk_n^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2$.

Подставив (17) в (14), и принимая во внимание (19), найдем выражение для w_n через неизвестные константы A_k^0

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^{4} A_k^0 E_{kn}^0. \tag{20}$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} w_k^0 \psi_n dx. \tag{21}$$

С учетом (16), (19) и (20) окончательное выражение для формы прогиба пластины w, примет вид

$$w = \sum_{k=1}^{2} \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \tag{22}$$

где $\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} w_k^0 dx$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$, $\tilde{d}_n = Tk_n^2 + g\Delta\rho$.

В отличии от работ [10–11] в формуле (22) появляется константа $\tilde{w}_k^0$, которая для несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости равна нулю, а для симметричных колебаний отлична от нуля.

В (22) входит две неизвестные константы A_k^0. Из граничных условий закрепления мембраны (15) имеем два линейных однородных уравнений относительно A_k^0

$$\sum_{k=1}^{2}\left(B_{jk}-\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0 B_{jn}^*\right)A_k^0=0,\ (j=1,2). \tag{23}$$

Здесь $\alpha_n = a_n/(\omega^2 a_n - k_n d_n) = a_n/(\omega^2\tilde{a}_n - k_n\tilde{d}_n)$, $B_{jk} = w_k^0\big|_{x=\pm a} - \tilde{w}_k^0$,

$$B_{jn}^* = \begin{cases} 1,\ x=-a\,(j=1),\\ (-1)^n,\ x=a\,(j=2).\end{cases}$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (23) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой мембраны и жидкости

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|_{j,k=1}^2\right|=0, \tag{24}$$

где $C_{jk} = B_{jk} - \omega^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0 B_{jn}^*\ (j,k=\overline{1,2})$.

Собственные формы колебаний будут найдены из однородной системы (23) и выражения (22).

Воспользовавшись разложением функций w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе функций ψ_n, условием $\int\limits_{-a}^{a}\psi_n dx = 0$ и обозначением (21), уравнение (24) можно переписать так [10-11]

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|_{j,k=1}^2\right|=0, \tag{25}$$

где $C_{jk} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n E_{kn}^0 B_{jn}^*\ (j,k=\overline{1,2})$, $\ \beta_n = 1+\alpha_n = \frac{k_n d_n}{\omega^2\tilde{a}_n - k_n\tilde{d}_n}$.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2, являющихся корнями характеристических уравнений (24) и (25), а соответствующие им собственные функции $w_l\,(x)$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[-a,\ a]$. Однако, следует отметить, что при определенных соотношениях параметров механической системы частотные уравнения могут не иметь положительных корней, т.е. плоская форма равновесия упругой мембраны может быть неустойчивой [10–11].

Решения однородного уравнения w_k^0 и значения коэффициента E_{kn}^0 зависят от знака величины q.

При $q>0$ фундаментальная система решений ${}_k^0$ имеет вид $w_k^0 = \{\sin px,\ \cos px\}$, а коэффициенты E_{kn}^0 и C_{jk} –

$$E_{kn}^0 = \frac{Tp}{ad_n}\left\{[(-1)^n-1]\cos\tilde{p},\ [(-1)^n+1]\sin\tilde{p}\right\},$$

$$C_{11} = \frac{pT}{a} \cos \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n - 1\right] \tilde{\beta}_n, \; C_{12} = \frac{pT}{a} \sin \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + 1\right] \tilde{\beta}_n,$$

$$C_{21} = \frac{pT}{a} \cos \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^n\right] \tilde{\beta}_n, \; C_{22} = \frac{pT}{a} \sin \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^n\right] \tilde{\beta}_n \,,$$

и частотное уравнение (25) запишется так

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{4p^2T^2}{a^2} \sin 2\tilde{p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1}\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m}\right) = 0. \tag{26}$$

Здесь $p^2 = q, \tilde{p} = pa$.

При $q < 0$ фундаментальная система решений w_k^0 имеет вид

$$w_k^0 = \{\sinh \tilde{p}x, \, \cosh \tilde{p}x\} \,,$$

а коэффициенты E_{kn}^0 и C_{jk} –

$$E_{kn}^0 = \frac{T\tilde{p}}{ad_n} \left\{\left[(-1)^n - 1\right] \cosh \tilde{p}_1, \; \left[(-1)^n + 1\right] \sinh \tilde{p}_1\right\},$$

$$C_{11} = \frac{T\tilde{p} \cosh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n - 1\right] \tilde{\beta}_n, \; C_{12} = \frac{T\tilde{p} \sinh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + 1\right] \tilde{\beta}_n,$$

$$C_{21} = -\frac{T\tilde{p} \cosh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n - 1\right] \tilde{\beta}_n, \; C_{22} = \frac{T\tilde{p} \sinh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + 1\right] \tilde{\beta}_n,$$

и частотное уравнение принимает вид

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = -\frac{qT^2}{4a^2} \sinh 2\tilde{p}_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1}\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m}\right) = 0, \tag{27}$$

где $\tilde{p}^2 = -q > 0$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}a$.

Так как $\sin 2\tilde{p} \neq 0$ и $\sinh 2\tilde{p}_1 \neq 0$, то из вида уравнений (26) и (27) следует, что частотное уравнение (25) имеет вид $\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1}\right) \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m}\right) = 0$, не зависит от условий $k_0\omega^2 - g\Delta\rho > 0$ или $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0$, распадается на четные и нечетные частоты и может быть записано в единой форме для этих частот [10-11] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \tag{28}$$

Несложно показать, что нули знаменателя левой части уравнения (28) описывают частоты колебаний незакрепленной мембраны.

Таким образом, если $n = 2m - 1$, то уравнение (28) описывает нечетные частоты, а если $n = 2m$, то – четные частоты. Следует отметить, что такого упрощения удалось достигнуть за счет разложения функции w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n и рассмотрении уравнения (25). При использовании уравнения (24) значительно возросли бы аналитические вычисления, и такого упрощения можно было бы достигнуть, если разложить тригонометрические и гиперболические функции на простейшие дроби так, как это сделано, например, в работах [4–6].

Левая часть уравнения (28) является монотонно возрастающей функцией параметра ω^2 на интервале $\left(k_n\tilde{d}_n \middle/ \tilde{a}_n,\ \ k_{n+1}\tilde{d}_{n+1} \middle/ \tilde{a}_{n+1}\right)$ $(n = 1, 2, ...)$, принимающая на нем значения от $-\infty$ до ∞ . Следовательно, между двумя последовательными значениями $k_n\tilde{d}_n \big/ \tilde{a}_n$ лежит только один корень уравнения (28). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

5. Устойчивость колебаний упругой мембраны, разделяющей жидкости разной плотности.

Если в ряде уравнения (28) удержать два члена, то из неравенства $\omega^2 > 0$ следует условие устойчивости плоской формы равновесия мембраны $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 > 0$. Для нечетных и четных форм колебаний оно соответственно примет вид [10-11]

$$T > \frac{4g\left(\rho_1 - \rho_2\right)a^2}{5\pi^2},\ (n = 1, 3) \tag{29}$$

$$T > \frac{2g\left(\rho_1 - \rho_2\right)a^2}{5\pi^2},\ (n = 2, 4). \tag{30}$$

Условия устойчивости (29)–(30) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы мембраны. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужно значительно большая величина предварительного натяжения, чем для симметричных. Неравенства (29)–(30) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов n-ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования. Из условий (29)–(30) следует, что, с учетом принятой точности, при $g \geqslant 0$ и естественной стратификации $\rho_1 \leqslant \rho_2$ частотное уравнение (28) всегда имеет положительные корни и плоская форма равновесия упругой мембраны устойчива. Неустойчивость может иметь место только в случае $g\Delta\rho < 0$, а при $g > 0$ только если нарушается естественная стратификация, т.е. при условии $\rho_1 > \rho_2$. Выписанные неравенства (29)–(30) совпадают с неравенствами, полученными при наличии свободной поверхности у верней жидкости в статье [3] и при $T = 0$ с неравенствами работы [1–2].

Для нахождения критических значений механических параметров при которых происходит потеря устойчивости в частотном уравнении (28) положим $\omega^2 = 0$ и оно примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\tilde{d}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Tk_n^2 + g\Delta\rho} = 0. \tag{31}$$

Из уравнения (31) следует, что при $\Delta\rho \geqslant 0$ $(g > 0)$ оно не имеет решений и в этом случае механическая система всегда будет устойчива. Неустойчивость может возникнуть только при $\Delta\rho < 0$.

Перепишем уравнение (31) в безразмерном виде при $\Delta\rho < 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = 0, \tag{32}$$

где

$$\alpha^2 = -\frac{4g\Delta\rho a^2}{T\pi^2} > 0.$$

Числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - \alpha^2)$ для нечетных и четных значений n могут быть представлены следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \tan\frac{\pi\alpha}{2}, \tag{33}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{4\alpha^2} \left(\pi\alpha \cot\frac{\pi\alpha}{2} - 2\right). \tag{34}$$

Решение уравнения (32) при $n = 2k - 1$ с учетом (33) имеет вид $\alpha = 2l$, а критическое значение натяжения $T = g(\rho_1 - \rho_2)\, a^2/\pi^2 l^2$, которое при $l = 1$ даст следующее точное условие устойчивости

$$T > \frac{1}{\pi^2} g(\rho_1 - \rho_2)\, a^2 = 0.101321 g(\rho_1 - \rho_2)\, a^2. \tag{35}$$

Приближенное значение, выписанное из условия (29), запишется так

$$T > \frac{4}{5\pi^2} g(\rho_1 - \rho_2)\, a^2 = 0.081057 g(\rho_1 - \rho_2)\, a^2. \tag{36}$$

Условие устойчивости (35), полученное для несимметричных частот, уточняет ранее полученное условие (36). Из неравенств (35)–(36) следует, что приближенное значение критического натяжения является заниженным в 4/5 раза.

Первый корень уравнения (32) при $n = 2k$ с учетом (34) имеет вид $\frac{\pi\alpha}{2} = 4.493409458$ из которое следует следующее точное условие устойчивости

$$T > 0.049528 g(\rho_1 - \rho_2)\, a^2. \tag{37}$$

Приближенное значение, выписанное из условия (30) при $n = 2k$, примет вид

$$T > \frac{2}{5\pi^2} g\left(\rho_1 - \rho_2\right) a^2 = 0.040528 g\left(\rho_1 - \rho_2\right) a^2. \tag{38}$$

Условие устойчивости (38), полученное для четных частот, уточняет ранее полученное условие (37). Из неравенств (37)–(38) следует, что приближенное значение критического натяжения является заниженным в 0.818 раз, что на 2.3% больше, чем для несимметричны частот.

Таким образом, уточнено ранее полученное частотное уравнение для случая осесимметричных колебаний и уточнены приближенные условия устойчивости. Показано, что учет двух членов в ряде частотного уравнения дает достаточную для практики точность.

Цитированная литература

1. *Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М.* Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 341–346.
2. *Ильгамов М.А.* Введение в нелинейную гидроупругость. – М.: Гостехиздат, Наука, 1991. – 200 с.
3. *Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А.* Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.
4. *Троценко В.А.* Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 8. – С. 74–80.
5. *Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А.* Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на “свободной” и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 44–52.
6. *Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А.* Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная механика. – 2008. – Т. 10, № 1. – С. 23–32.
7. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
8. *Троценко В.А.* Свободные колебания жидкости в канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, № 2.- С. 215–228.
9. *Богун Р.I., Троценко В.А.* Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 3.- С. 53–76.
10. *Кононов Ю.Н., Лимарь А.А.* Вільні коливанні рідини в прямокутному каналі з довільним симетричним дном та пружною мембраною на вільній поверхні // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2015. – № 1–2. – С. 97–108.
11. *Кононов Ю.Н., Лимарь А.А.* Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2016. – Т. 25. – С. 69–84.
12. *Kononov Yu.N., Lymar A.A.* Oscillations of rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with else basis // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17–19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl’ Stus Donetsk National University, 2017. – P. 31–33.

13. *Гончаров Д.А.* Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. – 2013. – № 11. DOI: 10.7463/1113.0619258 [Электронный ресурс] URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html (дата обращения: 19.02.2014).
14. *Пожалостин А.А., Гончаров Д.А.* Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 12. [Электронный ресурс] URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html (дата обращения: 19.02.2014).

References

1. *Ilgamov, M.A., Sakhabutdinov Zh.M.* (1974). On the stability of an elastic plate between liquids of different density. Izb. problems prikl. mechanics. Sat. articles for the sixtieth birthday of Acad. N. Chelomey. M. (in Russian).
2. *Ilgamov, M.A.* (1991). Introduction to nonlinear hydroelasticity. M.: Nauka (in Russian).
3. *Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A.* (2002). Free vibrations of a two-layer liquid separated by an elastic plate in a rectangular channel. Theory. and prikl. Mechanics, 36, pp. 170–176 (in Russian).
4. *Trotsenko, V.A.* (1995). Free oscillations of a liquid in a rectangular channel with an elastic membrane on a free surface. Prikl. Mechanics, 31, No. 8, pp. 74–80 (in Russian).
5. *Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A.* (2003). Free oscillations of a liquid in a rectangular channel with an elastic membrane on a free surface. Free vibrations of a two-layer liquid with elastic membranes on “free” and inner surfaces. Acoustical Visnik, 6, No. 4, pp. 44–52 (in Russian).
6. *Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A.* (2008). Free vibrations of elastic membranes and a two-layer liquid in a rectangular channel with an elastic bottom. Applied hydromechanics, No. 1, pp. 23–32 (in Russian).
7. *Dokuchaev, L.V.* (1987). Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements. M.: Mechanical Engineering (in Russian).
8. *Trotsenko, V.A.* (2007). Free Vibrations of a Liquid in a Channel with an Elastic Membrane on a Free Surface. Problems of the Dynamics of the System of Bagatom Systems: Zb. prats Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 4, No. 2, pp. 215–228 (in Russian).
9. *Bohun, R. I., Trotsenko, V. A.* (2009). Free fluid fluctuations in a rectangular channel with arbitrary symmetric bottom and an elastic membrane on a free surface. Problems of Dynamics and Static Systems of Multidimensional Systems: Zb. prats Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 6, No. 3, pp .53–76 (in Russian).
10. *Kononov, Yu.N., Limar, A.A.* (2015). Oscillations of a rectangular membrane separating ideal fluids of different density in a rectangular channel with rigid bases. Bulletin of the Donetsk University. Ser A. Natural sciences, No. 1–2, pp. 97–108 (in Russian).
11. *Kononov, Yu.N., Limar, A.A.* (2016). On the stability of the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with rigid bases. Problems of the computational mechanics and design, 25, pp. 69–84 (in Russian).
12. *Kononov, Yu.N., Lymar, A.A.* (2017). Oscillations of a rectangular plate separating the ideal liquids of different density in a rectangular channel. International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17-19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts. Vinnytsia: Vasyl’ Stus Donetsk National University, pp. 31–33.
13. *Goncharov, D.A.* (2013). Dynamics of a two-layer fluid separated by an elastic partition taking into account the surface tension forces. Electronic scientific and technical publication: Science and Education. No. 11. DOI: 10.7463 / 1113.0619258 [Electronic resource] URL: http://technomag.bmstu.ru /doc/619258.html (date of circulation: February 19, 2014) (in Russian).
14. *Pozhalostin, A.A., Goncharov, D.A.* (2013). Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers in the presence of surface tension forces. Engineering Journal: Science and Innovation. Vol. 12. [Electronic resource] URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html (reference date: February 19, 2014) (in Russian).

A. A. Lymar, Yu. N. Kononov

On the update of the conditions of the stability of vibrations of the membrane separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations.

In the linear formulation, the frequency equation of the proper joint oscillations of a rectangular membrane and a liquid, corrected for the case of axisymmetric oscillations, is derived.The membrane horizontally separates ideal incompressible fluids of different densities in a rectangular channel with rigid bases. The frequency equation for symmetric and asymmetrical joint vibrations of a membrane and a liquid is presented in a uniform form. The previously obtained approximate conditions for the stability of the vibrations of a membrane and a fluid are refined. It is shown that for asymmetric frequencies the approximate value of the critical tension is 4/5 times lower, and for symmetric frequencies it is 0.818 times.

Keywords: *hydroelasticity, rectangular membrane, ideal incompressible fluid, flat oscillations, stability.*

О. О. Лимар, Ю. М. Кононов

Про уточнення умов стійкості коливань мембрани, яка поділяє ідеальні рідини в прямокутному канал з жорсткими основами.

У лінійній постановці виведено уточнене, на випадок осесиметричних коливань, частотне рівняння власних спільних коливань прямокутної мембрани і рідини. Мембрана горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної щільності в прямокутному каналі з жорсткими основами. Частотне рівняння для симетричних і несиметричних спільних коливань мембрани і рідини представлено в єдиній формі. Уточнено раніше отримані наближені умови стійкості коливань мембрани і рідини. Показано, що для несиметричних частот наближене значення критичного натягу є заниженими в 4/5 рази, а для симетричних – в 0.818 раз.

Ключові слова: *гідропружність, прямокутна мембрана, ідеальна нестислива рідина, плоскі коливання, стійкість.*

Николаевский нац. аграрный ун-т, Николаев
Донецкий нац. ун-т им. Васыля Стуса, Винница
`kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com`

Получено 25.12.17