

UDK 513.83

©2017. Т. М. Осіпчук

**ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО СИСТЕМИ КУЛЬ,  
ЯКІ СТВОРЮЮТЬ ТІНЬ В ТОЧЦІ**

В даній роботі розглядаються задачі, пов'язані з відшукуванням мінімального числа системи куль, які створюють тінь у фіксованій точці багатовимірного евклідового простору  $\mathbb{R}^n$ . Тут вираз "набір куль створює тінь в точці" означає, що кожна пряма, яка проходить через задану точку, перетинає хоча б одну кулю з набору. В роботі встановлено нові властивості системи неперетинних куль з центрами на сфері, що створюють тінь в довільній фіксованій точці внутрішності сфери у просторі  $\mathbb{R}^3$ . А також, побудовано систему з  $n + 1$  неперетинних куль з рівними радіусами у просторі  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , які створюють тінь у фіксованій точці простору.

MSC: 32F17, 52A30.

**Ключові слова:** задача про тінь, система куль, сфера, еліпсоїд обертання, область, багатовимірний дійсний евклідовий простір.

**1. Вступ.**

У 1982 році Г. Худайбергановим [1] була поставлена задача про тінь.

Нехай  $x$  фіксована точка у багатовимірному дійсному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^n$ . Скажемо, що кулі  $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$  в  $\mathbb{R}^n$ , які не містять  $x$ , створюють в цій точці тінь, якщо довільна пряма, що проходить через точку  $x$ , перетинає хоча б одну кулю з набору. Тоді задача про тінь може бути сформульована наступним чином: *знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль у просторі  $\mathbb{R}^n$  з центрами на сфері  $S^{n-1}$  та радіусами меншими радіуса сфери, які не містять центр сфери та створюють в ньому тінь.*

Задачу про тінь в такому формулюванні будемо називати класичною. Тут і надалі, під сферою  $S^{n-1}$  будемо розуміти множину всіх точок простору  $\mathbb{R}^n$ , які знаходяться на однаковій відстані від деякої фіксованої точки простору [2].

Класична задача про тінь була розв'язана Г. Худайбергановим при  $n = 2$ : було показано, що для кола на площині достатньо двох кругів [1]. Там же було зроблено припущення про те, що і для випадку при  $n > 2$  мінімальне число таких куль рівне  $n$ . Вона також цікава з точки зору опуклого аналізу тим, що є частковим випадком питання про належність точки узагальнено опуклій оболонці сім'ї компактних множин [3].

В [3] Ю. Зелінський довів, що для  $n = 3$  трьох куль не достатньо, разом з тим, чотири кулі вже будуть створювати тінь в центрі сфери. Там же встановлено, що для загального випадку у просторі  $\mathbb{R}^n$ , для довільного  $n \geq 3$ , мінімальною кількістю є  $n+1$  куля. Таким чином, класична задача про тінь повністю розв'язана.

Розглянемо наступні задачі, близькі до класичної задачі про тінь.

**Задача 1.** *Знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль у просторі  $\mathbb{R}^n$  з центрами на сфері  $S^{n-1}$  та радіусами меншими*

радіуса сфери, які не містять фіксовану точку всередині сфери та створюють в цій точці тінь.

**Задача 2.** [4] Знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з рівними радіусами у просторі  $\mathbb{R}^n$ , які не містять фіксовану точку простору та створюють в цій точці тінь.

В даній роботі доводяться дві теореми, які частково розв'язують поставлені задачі.

**Теорема 1.** Нехай  $S^2(r)$  сфера з центром в нулі та радіусом  $r$  у просторі  $\mathbb{R}^3$ . Позначимо через  $n(x)$  найменше число відкритих куль, що не перетинаються, з центрами на сфері  $S^2(r)$  і таких, що не містять фіксовану точку  $x \in \mathbb{R}^3$  та створюють в цій точці тінь. Тоді  $n(x) = 3$ , для кожної точки  $x \in \mathbb{R}^3$  такої, що  $0 \leq |x| \leq \frac{7}{9}r$ .

**Теорема 2.** Нехай  $n(x)$  найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , та створюють в цій точці тінь. Тоді  $n(x) \leq n + 1$ .

В [5, 6, 8] зроблено огляд цілої низки результатів, аналогічних до класичної задачі про тінь, та їх узагальнень, отриманих Ю. Б. Зелінським та його учнями.

У наступному розділі зроблено огляд тих результатів, які також частково дають розв'язок задач 1, 2, та тих, які розв'язують деякі інші задачі про тінь. Ці результати будуть сформульовані як леми, оскільки в межах даної роботи вони є допоміжними та використовуються для доведення теорем 1, 2.

## 2. Допоміжні результати.

Наступний приклад дає один із способів побудови системи з  $n + 1$  кулі із задачі 1, які створюють тінь в центрі сфери.

**Приклад 1.** [3] Якщо у сферу вписати правильний  $n$ -вимірний симплекс (див. [2]) та розмістити у його вершинах замкнені кулі з радіусами, величини яких дорівнюють половині довжини ребра симплекса, то ця система куль створить тінь в центрі сфери. Однак, кулі будуть попарно дотикатись одна одної, що протирічить умові задачі 1. Нехай  $a$  — половина довжини ребра симплекса. Для досить малого  $\varepsilon > 0$  розглянемо систему куль, що складається з  $n + 1$  кулі, величини радіусів яких, відповідно, дорівнюють  $a + \varepsilon$ ,  $a - \varepsilon/2$ ,  $a - \varepsilon/2^2$ ,  $a - \varepsilon/2^3$ ,  $\dots$ ,  $a - \varepsilon/2^n$ . Розмістимо ці кулі так, щоб вони дотикались одна одної, а їх центри утворювали симплекс, який, очевидно, незначно відрізняється від правильного. Тоді через центри цих куль проходить єдина сфера, в центрі якої відкриті кулі з тими ж радіусами створюють тінь. Якщо вихідні замкнені кулі трішки зменшити, то, в силу неперервності, такі кулі також будуть створювати тінь в центрі сфери.

У [7, 8] розглядаються задачі про тінь для куль у просторах  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  з центрами, розташованими на інших поверхнях.

**Лемма 1.** [7] *Нехай задано видовжений еліпсоїд обертання з великою піввіссю  $b$  та малою  $a$  і нехай  $n(x_0)$  найменше число попарно неперетинних відкритих куль, з центрами на заданому еліпсоїді, які не містять його центр  $x_0$  та створюють в  $x_0$  тінь. Тоді,*

- 1)  $n(x_0) = 3$ , якщо  $b/a > 2\sqrt{2}$ ;
- 2)  $n(x_0) > 3$ , якщо  $b/a \leq 2\sqrt{2}$ .

Наступна лема дає розв'язок задачі про тінь для кругів з центрами, розміщеними на довільній замкненій кривій на площині, а також оцінку зверху мінімального числа куль, що створюють тінь в точці, з центрами на довільній замкненій поверхні у просторі  $\mathbb{R}^3$ .

**Лемма 2.** [8] *Нехай задано деяку обмежену область  $D \subset \mathbb{R}^3$  ( $D \subset \mathbb{R}^2$ ) і нехай  $n(x)$  найменше число попарно неперетинних відкритих чи замкнених куль, з центрами на  $\partial D$ , які не містять фіксовану точку  $x \in D$  та створюють в точці  $x$  тінь. Тоді  $n(x) \leq 4$  ( $n(x) = 2$ ).*

Для її доведення застосовується наступна лема, яка в даній роботі буде використана також.

**Лемма 3.** [8] *Нехай задано дві відкриті (замкнені) кулі  $\{B_i = B(r_i)\}$ ,  $i = 1, 2$ , у просторі  $\mathbb{R}^n$ , які не перетинаються, з центрами на сфері  $S^{n-1}(r)$  та радіусами  $r_2 \leq r_1 < r$ . Тоді кожна куля, гомотетична кулі  $B_2$  відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії  $k_2$ , не перетинає кожну кулю, гомотетичну кулі  $B_1$  відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії  $k_1$ , якщо  $k_2 \geq k_1$ .*

В [9] розглядається задача про тінь для деякого набору куль з вільно розташованими центрами. Наступна лема дає оцінку знизу для числа неперетинних куль у просторі  $\mathbb{R}^n$ , які не містять фіксовану точку простору та створюють в ній тінь.

**Лемма 4.** [9] *Нехай  $n(x)$  найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль, які не містять фіксовану точку  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , та створюють в цій точці тінь. Тоді  $n(x) = n$ .*

В [4] ставиться задача про тінь для набору куль з вільно розташованими центрами, але з рівними радіусами і будується приклад з чотирьох відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль  $\{B_i\}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , однакового радіуса у просторі  $\mathbb{R}^3$ , які створюють тінь у фіксованій точці  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup_i B_i$ . Таким чином встановлена наступна

**Лемма 5.** [4] *Нехай  $n(x)$  найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку  $x \in \mathbb{R}^3$  та створюють в цій точці тінь. Тоді  $n(x) \leq 4$ .*

Неважко показати (в тому числі способом, запропонованим у доведенні теореми 2, що для випадку простору  $\mathbb{R}^2$ , мінімальною кількістю є дві кулі. В роботі [10] доведено, що ніякі три попарно неперетинні, замкнені (відкриті) кулі з рівними

радіусами у просторі  $\mathbb{R}^3$  не створюють тінь у фіксованій точці простору по-за кулями. Таким чином, встановлено, що чотири є мінімальною кількістю вказаних куль у просторі  $\mathbb{R}^3$ .

### 3. Доведення теорем 1 та 2.

У наступному прикладі запропоновано один із способів побудови системи з трьох відкритих куль, центри яких розташовано на видовженому еліпсоїді обертання з відношенням великої півосі до малої  $b/a > 2\sqrt{2}$ , і таких, що створюють тінь в центрі еліпсоїда.

**Приклад 2.** Спочатку розглянемо еліпсоїд з відношенням  $b/a = 2\sqrt{2}$  та набір відкритих куль  $B_i, i = \overline{1,3}$ , заданих наступним чином.

Якщо центр першої кулі  $B_1$  з радіусом, рівним малій півосі  $a$ , розмістити в основі цієї півосі, тоді відкритою залишиться тільки площина  $\Sigma$ , дотична до кулі  $B_1$  в центрі еліпсоїда. Розглянемо кулі, дотичні до першої та з центрами на лінії обертання малої півосі. Неважко показати, що, якщо центр такої кулі прямує до точки, діаметрально протилежної до центру кулі  $B_1$ , тоді кут, який ця куля закриває для прямих, що проходять через центр еліпсоїда в площині  $\Sigma$ , прямує до свого максимального значення  $\pi/2$ . Третя куля  $B_3$ , дотична до першої  $B_1$  та з центром в основі великої півосі  $b = 2\sqrt{2}a$ , також закриває кут

$$\varphi = 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{a^2 + (b)^2} - a}{b} \right) = \pi/2.$$

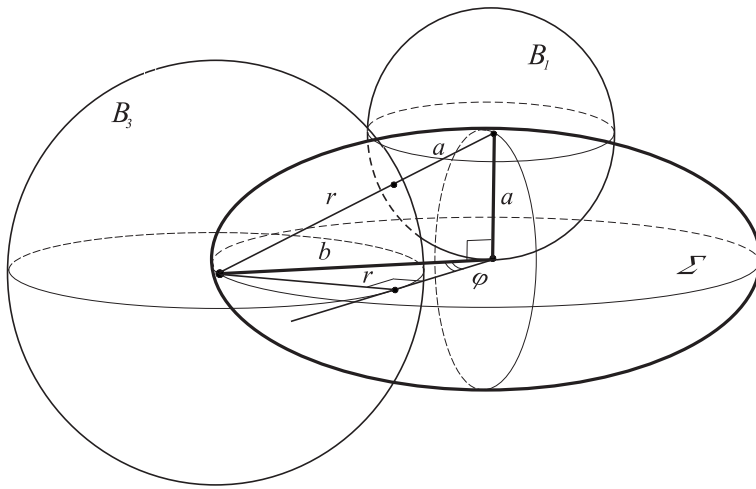


Рис. 1

Далі розглянемо еліпсоїд, центр та мала піввісь якого співпадають з центром та малою піввіссю попереднього еліпсоїда, а велика піввісь  $b' > b$ . Для таких еліпсоїдів побудуємо систему відкритих куль  $B'_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , наступним чином.

$$B'_1 \equiv B_1.$$

Куля  $B'_3$  дотикається до кулі  $B'_1$ , а її центр знаходиться в основі великої півосі  $b'$ . Тоді  $B'_3$  закриває кут  $\varphi(b')$  для прямих, що проходять через центр еліпсоїда в площині  $\Sigma$ , такий що

$$\sin \frac{\varphi(b')}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (b')^2} - a}{b'}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin \varphi(b')/2)}{db'} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + (b')^2} - a}{(b')^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2}} - \frac{(\sqrt{a^2 + (b')^2} - a)(\sqrt{a^2 + (b')^2} + a)}{(b')^2(\sqrt{a^2 + (b')^2} + a)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2} + a} > 0 \end{aligned}$$

і  $\varphi(b) = \pi/2$ , тоді  $\varphi(b') > \pi/2$  для  $b' > b$ .

Нарешті, центр кулі  $B'_2$ , яка дотикається до  $B'_1$ , розмістимо на лінії обертання малої півосі так, щоб кут, який вона закриває в площині  $\Sigma$  був більший  $\pi - \varphi(b')$ .

**Доведення теореми 1.** Зафіксуємо точку  $x$  внутрішності сфери  $S^2(x_0, r)$  на відстані  $h > (7/9)r$  від її центра  $x_0$ , рис. 2. Побудуємо видовжений еліпсоїд обертання з центром в точці  $x$ , великою піввіссю  $b = h + r$ , розміщеною на прямій, що проходить через точку  $x$  і центр сфери  $x_0$ , та малою піввіссю  $a = \sqrt{r^2 - h^2}$ . Тоді неважко переконатись в тому, що для такого еліпсоїда відношення  $b/a > 2\sqrt{2}$ . Система із трьох куль, розміщених в точках перетину сфери з еліпсоїдом так, як це зроблено в прикладі 2, є шуканою, оскільки, за лемою 4, не можливо побудувати систему куль, з кількістю менше трьох куль, які створюють тінь в довільній точці сфери.  $\square$

Для центра сфери задача про тінь розв'язана в [3]. Для решти точок всередині сфери  $n(x) \leq 4$  за лемою 2. Питання про те, чи для таких точок  $n(x) = 4$ , залишається відкритим.

**Доведення теореми 2.** Зафіксуємо деяку точку  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $2 < n < \infty$ , та побудуємо систему з  $n + 1$  кулі  $\{B_i = B(r_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ , з радіусами  $r_i$ , як у прикладі 1, розміщені на сфері з центром в точці  $x$ . Нехай, без обмеження загальності,  $r_1 > \dots > r_i > r_{i+1} > \dots > r_{n+1}$ .

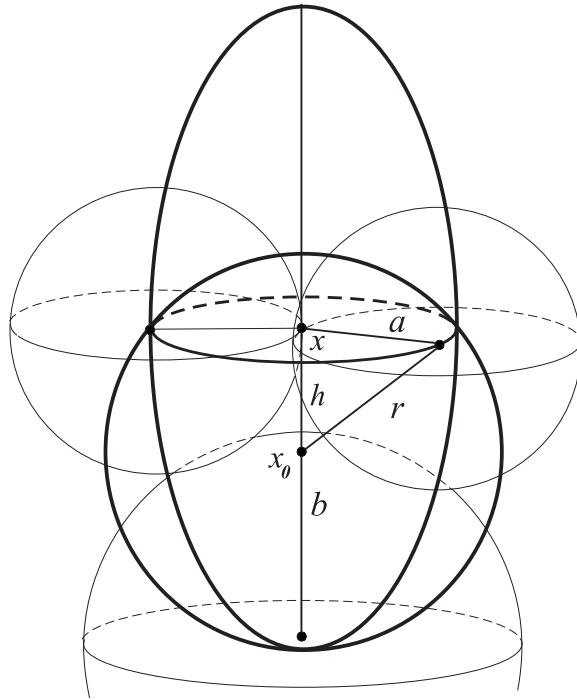


Рис. 2

До кожної кулі  $B_i$  застосуємо, відповідно, гомотетію з коефіцієнтом  $k_i = r_1/r_i$ . Тоді  $k_{n+1} > \dots > k_{i+1} > k_i > \dots > k_1$  і отримана система складається з куль однакового радіуса, рівного  $r_1$ . За лемою 3, отримані кулі попарно не перетинаються і, за побудовою, не містять точку  $x$  та створюють в ній тінь.  $\square$

Таким чином, лему 5 узагальнено на простір  $\mathbb{R}^n$  довільної скінченної розмірності  $n \geq 3$ .

На даний момент залишається відкритим питання про те, чи справедливо, що в загальному випадку  $n(x) = n + 1$ . Очевидно лише те, що згідно з лемою 4, це число не може бути менше  $n$ .

#### Цитована література

1. Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.
2. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – Москва: Наука, 1966. – 668 с.
3. Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Стефанчук М.В. Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1658–1666.
4. Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Дакхил Х.К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Укр. мат. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 599–603.

5. *Зелінський Ю.Б.* Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 278–289.
6. *Зелінський Ю.Б.* Варіації до задачі про “тінь” // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 163–170.
7. *Ткачук М.В., Осипчук Т.М.* Задача о тени для еллипсоида вращения // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 246–253.
8. *Осипчук Т.М., Ткачук М.В.* Задача о тени для областей в евклидовых пространствах // Укр. мат. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 278–289.
9. *Зелінський Ю.Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 197–204.
10. *Дакхил Х.К.* Задачі про тінь та відображення постійної кратності // Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – Київ, 2017.

## References

1. *Khudaiberganov, G.* (1982). On the homogeneous polynomially convex hull of a union of balls. M.: VINITI, Manuscr.dep. 21.02.1982, No 1772–85 dep. (in Russian).
2. *Rozenfeld, B.A.* (1966). Multi-dimensional spaces. M.: Nauka (in Russian).
3. *Zelinskii, Y.B., Stefanчук, M.V., Vyhovskaya, I.Y.* (2015). Generalized convex sets and the problem of shadow. Ukr. Mat. J., 67, No. 12, pp. 1658–1666 (in Russian).
4. *Zelinskii, Y.B., Vyhovskaya, I.Y., Dakhil, H.K.* (2016). The problem of shadow for balls with fixed radius. Ukr. mat. vestnik, 13, No. 4, pp. 599–603 (in Russian).
5. *Zelinskii, Y.B.* (2015). Generally convex hulls of sets and problem of shadow. Ukr. mat. vestnik, 12, No. 2, pp. 278–289 (in Russian).
6. *Zelinskii, Y.B.* (2017). Variations to the problem of “shadow”. Zbirn. Prats Inst. Mat. NANU, 14, No. 1, pp. 163–170 (in Ukrainian).
7. *Tkachuk, M.V., Osipchuk, T.M.* (2015). The problem of shadow for ellipsoid of revolution. Zbirn. Prats Inst. Mat. NANU, 12, No. 4, pp. 246–253 (in Russian).
8. *Osipchuk, T.M., Tkachuk, M.V.* (2016). The problem of shadow for domains in Euclidean spaces. Ukr. mat. vestnik, 13, No. 4, pp. 278–289 (in Russian).
9. *Dakhil, H.K.* (2017). The shadow problems and mappings of fixed multiplicity. Manuscr. thesis / Inst. of Math. of NASU. Kyiv (in Ukrainian).
10. *Zelinskii, Y.B.* (2015). Problem of shadow for family of sets. Zbirn. Prats Inst. Mat. NANU, 12, No. 3, pp. 197–204 (in Russian).

## T. M. Osipchuk

### Some remarks about systems of balls generating shadow at a point.

Problems, related to the determination of the minimal number of balls that generate a shadow at a fixed point in the multi-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ , are considered in present work. Here, the statement “a system of balls generate shadow at a point” means that any line passing through the point intersects at least one ball of the system. New properties of pairwise-disjoint balls centered on the sphere in space  $\mathbb{R}^3$ , not containing a fixed point inside of the sphere, and generating shadow at the point are established. And a system of  $n + 1$  pairwise-disjoint balls with equal radii in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , that do not contain a fixed point of the space and generate shadow at the point is constructed in the work.

**Keywords:** *problem of shadow, system of balls, sphere, ellipsoid of revolution, domain, multi-dimensional real Euclidean space.*

**Т. М. Осипчук**

**Некоторые замечания о системах шаров, создающих тень в точке.**

В данной работе рассматриваются задачи, связанные с отысканием минимального количества шаров, которые создают тень в фиксированной точке многомерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Здесь выражение “набор шаров создает тень в точке” означает, что любая прямая, проходящая через заданную точку, пересекает хотя бы один шар из набора. В работе установлены новые свойства системы непересекающихся шаров с центрами на сфере, которые создают тень в произвольной фиксированной точке внутренней сферы в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . А также, построено систему из  $n + 1$  непересекающегося шара с равными радиусами в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , которые создают тень в фиксированной точке пространства.

**Ключевые слова:** задача о тени, система шаров, сфера, эллипсоид вращения, область, многомерное действительное евклидово пространство.

Институт математики Національної академії наук України, Київ,  
Україна  
*osipchuk.tania@gmail.com*

*Отримано 05.12.2017*