УДК 519.7

©2017. С. В. Сапунов

О НАПРАВЛЕННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРАФОХОДНОГО АВТОМАТА БЕЗ КОМПАСА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПИ

Решена задача организации направленного перемещения графоходного автомата без компаса на бесконечной цепи (т. е. бесконечном связном 2-регулярном графе). Получены необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства автомата и разметку цепи, при которых автомат сохраняет направление перемещения на цепи. Предложены два типа вершинной разметки цепи, допускающие направленное перемещение автомата: так называемые детерминированная и слабо детерминированная разметки. Разработаны методы и алгоритмы обхода автоматом конечных и бесконечных помеченных цепей. Для обоих типов разметки разработаны алгоритмы разметки цепей, все вершины которых не помечены или помечены одной и той же меткой. Полученные результаты закладывают основы для изучения навигации автоматов без компаса и их коллективов в стационарных однородных дискретных средах.

MSC: 68R10, 05C85, 68Q45, 68T40.

Ключевые слова: *обход графа, вершинная разметка, лабиринт, конечный автомат, мобильный агент, робот, направленное перемещение.*

1. Введение.

Автоматы, перемещающиеся на графах, являются математической формализацией автономных мобильных агентов с ограниченной памятью функционирующих в дискретных средах. В рамках этой модели возникла обширная и интенсивно развивающаяся область исследований поведения автоматов в лабиринтах (лабиринты представляют собой орграфы специального вида, уложенные на целочисленной решетке) [1, 2]. Основными задачами для автоматов и лабиринтов являются задачи синтеза автоматов (коллективов автоматов), которые обходят лабиринты из заданного класса, и задачи описания по заданному автомату (коллективу автоматов) всех лабиринтов, которые обходятся этими автоматами. Для автоматов и лабиринтов решены задачи обхода лабиринта автоматом и коллективом автоматов, отличения вершин лабиринта друг от друга и лабиринта-эталона от класса лабиринтов. Исследование в этом направлении получили широкий спектр приложений, например, в задачах анализа изображений [3–5] и навигации мобильных роботов [6]. Результаты, полученные для автоматов и лабиринтов, опираются на важное допущение — функционирующие в лабиринтах автоматы могут различать направления, т. е. обладают «компасом» [7–10].

В настоящей работе рассматривается автомат без компаса, который перемещается на бесконечной помеченной цепи (бесконечном 2-регулярном неориентированном графе с помеченными вершинами). Автомат получает на вход информацию о разметке локальной окрестности текущей вершины цепи, а его выходом является перемещение в одну из наблюдаемых вершин. Автомат не различает направление и взаимное расположение этих вершин, но различает метки вершин. В работе приводятся достаточные и необходимые условия в виде ограничений на свойства автомата и разметку цепи, при которых автомат сохраняет постоянное направление перемещения.

2. Постановка задачи.

В начальный момент времени автомат устанавливается в произвольную вершину бесконечной помеченной цепи. Далее вершину, в которой находится автомат, будем называть текущей вершиной. Автомат наблюдает метки вершин, смежных текущей. Автомат не имеет компаса, т.е. не различает направления и взаимное расположение вершин. Автомат может перемещаться из текущей вершины в смежную с ней вершину. Требуется найти необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства автомата и разметку цепи, при которых автомат сохраняет постоянное направление перемещения.

3. Основные определения.

Все неопределяемые здесь понятия из теории автоматов и теории графов общеизвестны и могут быть найдены, например, в [11].

Бесконечной в обе стороны цепью (или, короче, бесконечной цепью) будем называть бесконечный связный неориентированный граф у которого степень каждой вершины равна 2. Конечной цепью будем называть всякий конечный связный подграф бесконечной цепи. Висячие вершины конечной цепи будем называть ее концами.

Помеченным графом назовем простой связный неориентированный граф с помеченными вершинами $G = (V, E, M, \mu)$, где V – множество вершин, E – множество ребер, M – множество меток, $\mu : V \to M$ – сюръективная функция разметки. Путем в графе G будем называть последовательность вершин $p = v_1 \dots v_k$ такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1, \dots, k-1$. Число $k \in \mathbb{N}$ будем называть длиной пути p. Меткой $\mu(p)$ пути p назовем слово $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ в алфавите меток M. Будем говорить, что слово w определяется вершиной v_1. Через M^* обозначим множество всех конечных слов в алфавите M, включая пустое слово e длины 0, а через M^+ обозначим множество $M^* \setminus \{e\}$. Множество L_v всех слов $w \in M^+$, определяемых вершиной $v \in V$, будем называть языком, определяемым этой вершиной. Граф G будем называть приведенным, если для любых вершин $v, s \in V$ из $v \neq s$ следует $L_v \neq L_s$. Определим на M^+ частичную операцию $\circ$ композиции слов. Пусть $a, b \in M$, $w, u \in M^*$, тогда $wa \circ au = wau$ и $wa \circ bu$ не определено, если $a \neq b$. Введем операцию $\star : V \times M^+ \to 2^V$ соотношением: для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ через $v \star w$ обозначим множество всех вершин $s \in V$ таких, что существует путь p из v в s, и $\mu(p) = w$. Ясно, что если слово $w \in L_v$, то $|v \star w| > 0$ и $|v \star w| = 0$ в противном случае.

Обходом графа будем называть любой путь, который проходит через все вершины графа. В случае конечного графа обход может быть конечным или бесконечным, в случае бесконечного графа, естественно, только бесконечным.

Графоходным автоматом (graph walking automaton) на помеченном графе G

назовем шестерку $A = (S, X, Y, s_0, \varphi, \psi)$, где S – конечное множество состояний, $X = \{(a_0, \{a_1, \ldots, a_k\})\,|a_i \in M, 0 \leqslant i \leqslant k\}$ – конечный входной алфавит (a_0 – метка вершины, в которой находится автомат (текущей вершины), $\{a_1, \ldots, a_k\}$ – множество (или мультимножество) меток всех вершин из окрестности текущей вершины, k – степень текущей вершины), $Y = M$ – конечный выходной алфавит ($y = a$ означает, что автомат переходит из текущей вершины в смежную с ней вершину с меткой $a \in M$), $s_0 \in S$ – начальное состояние, $\varphi : S \times X \to S$ – функция переходов, $\psi : S \times X \to Y$ – функция выходов. Автомат функционирует следующим образом: наблюдает разметку окрестности текущей вершины, выбирает одну из меток и переходит в вершину с этой меткой.

Для того, чтобы определить понятие направления движения автомата, уложим бесконечную цепь на одномерной целочисленной решетке так, что разным вершинам цепи соответствуют разные вершины решетки и две вершины соединены ребром, если соответствующие им точки различаются на 1. При этом именем вершины цепи будем считать ее координату в решетке.

Пусть автомат A в момент времени t находится в вершине $v(t)$ цепи G. Перемещение автомата будем называть равномерным и направленным, если существует такой натуральный период T, что для любого момента времени t выполняется $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$.

4. Разметка, способствующая перемещениям автомата.

Разметку уложенной бесконечной цепи G можно рассматривать как функцию $\mu : \mathbb{Z} \to M$. Разметку назовем периодической в направлении $l \in \mathbb{Z}$, если $\mu(i + l) = \mu(i)$ для любого $i \in \mathbb{Z}$

Функцию разметки $\mu : V \to M$ будем называть детерминированной или Д-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $s, t \in O_{(v)}$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$ ($O_{(v)} = v \cup \{v' \in V|\,(v, v') \in E\}$ – замкнутая окрестность вершины v). Помеченный граф с детерминированной функцией разметки будем называть детерминированным или Д-графом.

Рассмотрим свойства Д-графов.

Лемма 1. *Помеченный граф G является Д-графом тогда и только тогда, когда для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v \star w| = 1$, если $w \in L_v$, и $|v \star w| = 0$ в противном случае.*

Доказательство. Пусть помеченный граф G является Д-графом. Пусть, далее, $v \in V$ и $a \in M$. Тогда $v \star a = v$, если $a = \mu(v)$, и $v \star a = \varnothing$, если $a \neq \mu(v)$. Следовательно, для всех слов длины 1 утверждение леммы выполняется. Для всех слов длины 2 утверждение леммы непосредственно следует из определения Д-разметки. Пусть слово $w \in L_v$ и его дина больше 2. Слово w можно единственным способом представить в виде композиции $w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_{|w-1|}$ его подслов длины 2. По определению Д-разметки $|v \star w_1| = 1$, $|(v \star w_1) \star w_2| = 1$, $|((v \star w_1) \star w_2) \star w_3| = 1$ и т. д. Из этого следует, что $|v \star (w_1 \circ w_2)| = 1$, $|v \star (w_1 \circ w_2 \circ w_3)| = 1$ и т. д. Продолжая эти рассуждения получаем, что $|v \star w| = 1$. Пусть для любой вершины v и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v \star w| \leqslant 1$. Тогда это условие выполняется для всех слов длины 2. Следовательно все вершины в $O_{(v)}$ имеют разные метки и на вершинах графа G определена Д-разметка. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, Д-граф определяется или через локальные свойства его вершин, или через нелокальное свойство множества всех путей, определяемых каждой из его вершин.

Свойство, описанное леммой 1, предоставляет принципиальную возможность целенаправленного перемещения графоходного автомата по Д-графу. Например, зная метки путей, соединяющих между собой вершины Д-графа, можно построить графоходный автомат, способный перемещаться по этим путям.

Лемма 2. *Для любых различных вершин $v', v'' \in V$ Д-графа G и любого слова $w \in L_{v'} \cap L_{v''}$ расстояние между вершинами $v' \star w$ и $v'' \star w$ не меньше* 4.

Доказательство. Пусть $w = a_1 \dots a_k$, где $a_i \in M$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Предположим, что расстояние между вершинами $s = v' \star w$ и $t = v'' \star w$ меньше 4. Пусть это расстояние равно 1, т.е. $s = v' \star a_1 \dots a_{k-1} a_k = v'' \star a_1 \dots a_{k-1} a_k = t$. Тогда в окрестности $O_{(s)}$ окажутся две различные вершины с одной и той же меткой a_{k-1}, что невозможно по определению Д-графа. Следовательно, $v' \star a_1 \dots a_{a-1} = v'' \star a_1 \dots a_{k-1}$. По индукции получаем, что $v' = v''$, что невозможно по условию теоремы. Пусть расстояние между вершинами s и t равно 2, т.е. $(s, t) \in E$. Тогда в окрестности $O_{(s)}$ находится вершина t с меткой $\mu(t) = \mu(s) = a_k$, что невозможно по определению Д-графа. Пусть расстояние между вершинами s и t равно 3, т.е. существует вершина $q \in V$ такая, что путь sqt является кратчайшим путем из s в t. Тогда $s, t \in O_{(q)}$ и $\mu(s) = \mu(t)$, что невозможно по определению Д-графа. Лемма доказана. $\square$

Д-разметку графа назовем минимальной, если она использует наименьшую возможное количество типов меток.

Теорема 1. *Минимальная Д-разметка бесконечной цепи использует метки трёх различных типов.*

Доказательство. Для любой вершины $v \in V$ бесконечной цепи выполняется равенство $\left|O_{(v)}\right| = 3$. Следовательно, для Д-разметки замкнутой окрестности этой вершины необходимы метки трёх различных типов. Выберем произвольно вершину $v \in V$. Пусть $O_{(v)} = \{v, s, t\}$, $\mu(s) = a$, $\mu(v) = b$, $\mu(t) = c$, где $M = \{a, b, c\}$. Пусть, далее, $h \in O_{(s)}$ и $q \in O_{(t)}$, где $h \neq v$ и $q \neq v$. Тогда вершина h находится на расстоянии 4 от вершины t и, по лемме 2, может быть помечена только меткой c. Аналогично, вершина q находится на расстоянии 4 от вершины s и может быть помечена только меткой a. Продолжая рассуждения, по индукции получаем Д-разметку бесконечной цепи с использованием меток трех различных типов. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Минимальная Д-разметка бесконечной цепи является периодической разметкой.*

Доказательство. Пусть бесконечная цепь G с заданной на ней минимальной

Д-разметкой уложена на одномерной целочисленной решетке. Пусть, далее, $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина этой цепи. Из леммы 2 следует, что $\mu(i) \neq \mu(i+1)$, $\mu(i) \neq \mu(i+2)$ и $\mu(i+1) \neq \mu(i+2)$. Из теоремы 1 следует, что $\mu(i) = \mu(i+3)$. Так как вершина i выбрана произвольно, то из последнего равенства следует, что минимальная Д-разметка бесконечной цепи является периодической в направлении 3. Следствие доказано. $\square$

Далее, если не оговорено противное, будем рассматривать только минимальную Д-разметку бесконечной цепи. Следующее утверждение показывает, что минимальная Д-разметка способствует направленному перемещению автомата на бесконечной цепи.

Теорема 2. *Существует графоходный автомат, осуществляющий направленной перемещение на бесконечной Д-размеченной цепи.*

Доказательство. На бесконечной Д-размеченной цепи G, уложенной на одномерной целочисленной решетке, естественным образом выделяются два направления движения из произвольной начальной вершины – в сторону роста имен вершин и в сторону их убывания. Так как автомат не «видит» имена вершин, а только их метки, то для доказательства теоремы покажем как перемещается автомат в каждом из направлений с использованием периодичности Д-разметки цепи.

Без потери общности предположим, что $M = \{0, 1, 2\}$. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина детерминированной цепи G. Тогда вершины из ее окрестности имеют метки $\mu(i) \oplus_3 1$ и $\mu(i) \oplus_3 (-1)$ (здесь $\oplus_3$ обозначает сложение по модулю 3). Пусть, далее, $\mu(i+1) = \mu(i) \oplus_3 1$. Тогда, в силу периодичности Д-разметки цепи, $\mu(i+2) = \mu(i+1) \oplus_3 1$ и т.д. Ясно, что в этом случае $\mu(i-1) = \mu(i) \oplus_3 (-1)$, $\mu(i-2) = \mu(i-1) \oplus_3 (-1)$ и т.д. Таким образом, на бесконечной детерминированной цепи можно определить два направления движения, которые условно назовем «восток» и «запад». Перемещение автомата по цепи на «восток» заключается в следующем. Автомат наблюдает метку $\mu(v)$ текущей вершины v и для перемещения выбирает в окрестности $O_{(v)}$ вершину, метка которой равна $\mu(v) \oplus_3 1$. Соответственно, для перемещения на «запад» автомат выбирает вершину, метка которой равна $\mu(v) \oplus_3 (-1)$.

Пусть автомат движется только на «восток» (или только на «запад»). Тогда для любого момента времени t равенство $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$ выполняется при $T = 1$. Следовательно, описанный выше алгоритм действительно приводит к равномерному направленному перемещению автомата. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Существует графоходный автомат, который обходит любую конечную Д-размеченную цепь.*

Доказательство. Докажем утверждение при помощи непосредственного построения алгоритма обхода произвольной цепи. Так как автомат за один шаг может переместиться только в вершину, смежную текущей, то, посетив обе висячие вершины цепи, он тем самым с необходимостью посетит и все вершины, расположенные между ними. Следовательно, посещение обоих концов цепи можно считать признаком окончания обхода. Составим алгоритм перемещений графоходного автомата так, чтобы гарантировано побывать в этих вершинах.

1. Двигаться на «восток» (метка следующей вершины определяется путем сложения метки текущей вершины с 1 по модулю 3) до тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется в одной из висячих вершин) и повернуть на «запад».

2. Двигаться на «запад» (метка следующей вершины определяется путем сложения метки текущей вершины с -1 по модулю 3) до тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется во второй висячей вершине).

Следуя этому алгоритму, автомат посетит обе висячие вершины цепи и, следовательно, все вершины, расположенные между ними. □

Графоходный автомат имеет конечное число состояний и, таким образом, не может обойти бесконечную цепь без использования дополнительных средств. При исследованиях поведения автоматов в лабиринтах одним из таких средств считаются камни, то есть переносные маркеры, которые автомат может переносить, устанавливать и подбирать в вершинах графа [1, 2]. Для автоматов на графах камни играют роль внешней памяти. Положим, что камень обнаруживается автоматом при посещении вершины, в которой он расположен. Положим, далее, что камень, находящийся в вершине, не изменяет и не скрывает ее метку.

Теорема 3. *Существует графоходный автомат с двумя камнями, который обходит бесконечную Д-размеченную цепь.*

Доказательство. Докажем утверждение непосредственным построением алгоритма обхода цепи. Изначально автомат с обоими камнями находится в произвольной начальной вершине. Пусть $a \in \{0, 1\}$ – метка этой вершины. Прежде чем войти в бесконечный цикл, автомат выполняет следующие действия:

1. Перейти на одну вершину на «восток» (в вершину с меткой $b = a \oplus_3 1$) и установить в текущей вершине один камень.

2. Перейти в начальную вершину (в вершину с меткой $a = b \oplus_3 (-1)$).

3. Перейти на на одну вершину на «запад» (в вершину с меткой $c = a \oplus_3 (-1)$) и установить в ней второй камень.

В теле бесконечного цикла автомат повторяет следующую последовательность действий:

1. Двигаться на «восток» до тех пор, пока не обнаружен камень и подобрать его.

2. Перейти на одну вершину на «восток», установить в ней камень и перейти на одну вершину на «запад».

3. Двигаться на «запад» до тех пор, пока не обнаружен камень и подобрать его.

4. Перейти на одну вершину на «запад», установить в ней камень и перейти на одну вершину на «восток».

Покажем, что, следуя этому алгоритму, автомат действительно обходит бесконечную цепь. Выберем произвольную вершину цепи, отличную от начальной.

Пусть расстояние между этими вершинами равно $k > 1$. За каждую итерацию основного цикла автомат отодвигает камни на расстояние в одну вершину от начальной (один камень на «восток», второй – на «запад»). Тогда после $(k-1)$-й итерации автомат посетит как вершину, находящуюся на расстоянии k «восточнее» начальной, так и вершину, расположенную на расстоянии k «западнее» начальной. Так как вершина была выбрана произвольно, то, выполняя алгоритм, автомат побывает в любой вершине цепи. Следовательно, автомат обходит бесконечную Д-помеченную цепь. $\square$

Ввиду применимости Д-разметки для организации направленного перемещения автомата возникает следующая задача: можно ли построить автомат, который способен строить минимальную Д-разметку непомеченной (или, что то же самое, помеченной одной меткой) цепи? Положительный ответ на вопрос этой задачи дает следующая теорема.

Теорема 4. *Существует автомат, который строит на бесконечной цепи минимальную Д-разметку.*

Доказательство. Докажем утверждение при помощи непосредственного построения алгоритма Д-разметки цепи. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ и все вершины цепи помечены одной и той же меткой $\lambda \notin M$. Вершины с меткой λ будем называть непомеченными. Положим, что автомат может переходить на непомеченные вершины, т. е. его выходной алфавит $Y = M \cup \{\lambda\}$. Расширим возможности автомата так, чтобы он мог переносить метки и устанавливать их в вершинах цепи. Положим, что автомат не может заменять и удалять метки, установленные им ранее. Положим, далее, что автомат восстанавливает запас переносимых им меток при посещении начальной вершины. Прежде, чем войти в бесконечный основной цикл алгоритма, автомат устанавливает в начальной вершине метку 0 и выбирает текущее направление движения «восток». Выбор направления заключается в фиксации слагаемого, 1 или -1, которое автомат прибавляет к метке текущей вершины для определения метки следующей вершины. Первоначальный выбор направления не принципиален и «восток» здесь указан для определенности. В теле бесконечного основного цикла алгоритма автомат повторяет следующую последовательность действий:

1. Двигаться в выбранном направлении (на первой итерации на «восток») до тех пор, пока не окажется в первой вершине, в окрестности которой есть вершина с меткой λ.

2. Запомнить метку текущей вершины.

3. Перейти на вершину с меткой λ.

4. Пометить текущую вершину меткой, соответствующей текущему направлению движения («восток» – к метке предыдущей вершины прибавить 1 по модулю 3, «запад» – прибавить -1).

5. Перейти на предыдущую вершину.

6. Сменить направление движения на противоположное.

Покажем, что автомат, следуя приведенному алгоритму, действительно осуществляет Д-разметку бесконечной цепи. На каждой итерации основного цикла одна непомеченная вершина цепи получает метку из M. Причем на эту вершину автомат приходит из вершины, помеченной им ранее. Поэтому после каждой итерации получаем связную конечную помеченную цепь, которая включает в себя цепь, полученную на предыдущей итерации, и содержит на одну вершину больше. Предположим, что на некоторой итерации автомат оказался в непомеченной вершине v_i (здесь индексы вершин обозначают порядок их посещения при перемещениях автомата). Пусть он двигался на «восток» и $\mu\left(v_{i-1}\right) = a$, где $a \in M$. Тогда метка $\mu\left(v_{i-2}\right) = c$, где $c = a \oplus_3 (-1)$. Выполняя предписания алгоритма, автомат устанавливает $\mu\left(v_i\right) = b$, где $b = a \oplus_3 1$. На следующей итерации автомат движется на «запад» и помеченная цепь увеличивается на одну «западную» вершину. Следовательно, в процессе исполнения алгоритма любая вершина бесконечной цепи получит метку за конечное число шагов и разметка связной конечной цепи, полученной после очередной итерации, является детерминированной и минимальной. $\square$

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Существует автомат, который строит на конечной цепи минимальную Д-разметку.*

Действительно, для построения алгоритма поведения такого автомата достаточно дополнить алгоритм разметки цепи из доказательства теоремы 4 реакцией на достижение конца цепи. Пусть в процессе разметки автомат посетил, например, «восточный» конец цепи и, следовательно, дальнейшая разметка в «восточном» направлении невозможна. Тогда автомат продолжает челночное перемещение по помеченному подграфу цепи (т. к. по предварительной договоренности автомат может пополнить запас меток только проходя начальную вершину), но метки получают только непомеченные вершины, обнаруженные при движении на «запад». Автомат останавливается после разметки «западного» конца дуги.

5. Минимальная разметка, допускающая перемещения автомата.

В этом разделе рассматривается следующая задача: можно ли построить графоходный автомат, который сохраняет направление перемещения на бесконечной помеченной цепи, у которой число типов меток меньше трёх? В [12] показано, что для сохранения направления перемещения на бесконечной непомеченной (или, что то же самое, помеченной одной меткой) цепи автомату необходимо и достаточно наличие трёх различных камней. Здесь рассматривается случай, когда число типов меток равно двум.

Функцию разметки $\mu : V \to M$ будем называть слабо детерминированной или СД-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $s, t \in O_v$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$ ($O_v = \{v' \in V | (v, v') \in E\}$ – окрестность вершины v). Помеченный граф со слабо детерминированной функцией разметки будем называть слабо детерминированным или СД-графом.

Покажем, что для СД-графов выполняется свойство Д-графов, описанное леммой 1, т. е. для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ справедливо $|v \star w| =$

1, если $w \in L_v$ и $|v \star w| = 0$ в противном случае. Предположим, что это не так и для некоторой вершины v некоторого СД-графа G существует слово $w \in L_v$ такое, что $|v \star w| > 1$. Представим w в виде композиции $w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_{|w|-1}$ его двухбуквенных подслов. Из определения СД-разметки следует, что $|v \star w_1| = 1$, $|\,(v \star w_1) \star w_2| = 1$ и так далее. Следовательно, $|v \star (w_1 \circ w_2)\,| = 1$, $|v \star (w_1 \circ w_2 \circ w_3)\,| = 1$ и так далее. Продолжая рассуждения получаем, что $|v \star w| = 1$, что противоречит нашему предположению. Из этого противоречия вытекает справедливость рассматриваемого утверждения. Приведенные рассуждения доказывают принципиальную возможность целенаправленного перемещения графоходного автомата по СД-графу.

Для СД-графов выполняются утверждения, аналогичное лемме 2 для Д-графов: для любых различных вершин $v', v'' \in V$ СД-графа G и любого слова $w \in L_{v'} \cap L_{v''}$ расстояние между вершинами $v' \star w$ и $v'' \star w$ или равно 2, или не меньше 4. Действительно, пусть $w = a_1 \ldots a_k$, где $a_i \in M$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $s = v' \star w$, $t = v'' \star w$. Доказательство того, что расстояние между s и t не может быть равно 1 или 3 аналогично доказательству леммы 2 с поправкой на то, что рассматриваются окрестности вершин (в лемме 2 рассматривались замкнутые окрестности). Пусть расстояние между вершинами s и t равно 2, т. е. $(s,t) \in E$. Тогда в окрестности O_s находится вершина t с меткой $\mu(t) = \mu(s) = a_k$, что не противоречит определению СД-разметки. Более того, других вершин с меткой a_k ни в O_s, ни в O_t нет. Пусть расстояние между s и t равно 4. Тогда $O_s \cap O_t = \varnothing$ и одинаковая разметка вершин s и t не противоречит определению СД-разметки.

Теорема 5. *Минимальная СД-разметка бесконечной цепи использует метки двух различных классов.*

Доказательство. Для любой вершины $v \in V$ бесконечной цепи выполняется равенство $|O_v| = 2$. Следовательно, для СД-разметки окрестности этой вершины необходимы метки не менее двух различных классов. Выберем произвольно вершину $v \in V$. Пусть $O_v = \{s, t\}$, $\mu(s) = a$, $\mu(t) = b$, где $M = \{a, b\}$. Исходя их определения СД-разметки вершина v может иметь или метку a, или метку b. Положим, для определенности, что $\mu(v) = a$. Пусть $h \in O_s$, $q \in O_t$, $h \neq v$, $q \neq v$. Тогда, по определению СД-разметки, $\mu(h) = b$ и $\mu(q) = b$. Продолжая рассуждения, по индукции получим СД-разметку бесконечной цепи с использованием меток двух различных типов. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Минимальная СД-разметка бесконечной цепи является периодической разметкой.*

Доказательство. Пусть бесконечная цепь с заданной на ней минимальной СД-разметкой уложена на одномерной целочисленной решетке. Пусть, далее, $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина этой цепи. Если $\mu(i) = \mu(i-1)$, то по определению СД-разметки, $\mu(i) \neq \mu(i+1)$ и $\mu(i) \neq \mu(i+2)$, но $\mu(i) = \mu(i+3)$ и $\mu(i) = \mu(i+4)$. Если $\mu(i) \neq \mu(i-1)$, то $\mu(i) = \mu(i+1)$, $\mu(i) \neq \mu(i+2)$, $\mu(i) \neq \mu(i+3)$, но $\mu(i) = \mu(i+4)$. Таким образом, метки вершин i и $i+4$ всегда совпадают. Так как вершина i выбрана произвольно, то из приведенных рассуждений следует, что минимальная СД-разметка бесконечной цепи является периодической в направлении 4. Следствие доказано. □

Следующее утверждение показывает, что минимальная СД-разметка способствует направленному перемещению графоходного автомата на бесконечной цепи.

Теорема 6. *Существует графоходный автомат, осуществляющий направленное перемещение на бесконечной СД-размеченной цепи.*

Доказательство. Без потери общности предположим, что $M = \{a, b\}$. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина слабо детерминированной цепи G и $\mu(i) = a$. Тогда вершины из ее окрестности имеют метки a и b. Пусть далее, $\mu(i-1) = a$ и $\mu(i+1) = b$. Тогда, по следствию 2, $\mu(i+2) = b$, $\mu(i+3) = \mu(i-1) = a$, $\mu(i+4) = \mu(i) = a$, $\mu(i+5) = \mu(i+1) = b$ и т. д. В этом случае $\mu(i-2) = \mu(i+2) = b$, $\mu(i-3) = \mu(i+1) = b$, $\mu(i-4) = \mu(i) = a$ и т. д.

Таким образом, для автомата, начинающего движение из произвольной вершины СД-размеченной цепи, есть два возможных направления движения: первое – на вершину, метка которой совпадает с меткой текущей вершины, и второе – на вершину, метка которой отличается от нее. Первое направление условной назовем «запад», а второе – «восток». Пусть $i, i+1 \in V$ и $\mu(i) = \mu(i+1)$. Тогда «восток» для автомата в вершине i означает «запад» для автомата в вершине $i+1$ и наоборот. В этом заключается отличие СД-разметки цепи от её Д-разметки, для которой «восток» и «запад» в любой вершине определены однозначно.

Перемещение автомата по цепи на «восток» заключается в последовательном повторении двух шагов: (1) перейти на вершину, метка которой отличается от метки текущей; (2) перейти на вершину, метка которой совпадает с меткой текущей. Перемещение на «запад» получаем если шаги (1) и (2) поменяем местами.

Пусть автомат движется только на «восток» (или только на «запад»). Тогда для любого момента времени t равенство $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$ выполняется при $T = 1$. Следовательно, описанный выше алгоритм действительно приводит к направленному перемещению автомата. Теорема доказана. □

Из теоремы 6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Существует графоходный автомат, который обходит любую конечную СД-размеченную цепь.*

Доказательство. Признаком окончания обхода, как и при обходе конечной Д-размеченной цепи, будем считать посещение автоматом обоих висячих вершин. Составим алгоритм перемещений автомата. Начальное направление движения автомата не имеет принципиального значения. Положим для определенности, что автомат начинает двигаться на «восток».

1. Двигаться на «восток» до тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется на «восточном» конце цепи). Пусть v_k обозначает «восточный» конец цепи (здесь нижние индексы в именах вершин обозначают только последовательность их посещения автоматом при выполнении алгоритма).

2. Если $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$, то двигаться на «запад». Если $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$, то двигаться на «восток». Движение в выбранном направлении продолжать до

тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется на «западном» конце цепи).

Покажем, что автомат, выполняя предписания пункта 2, будет двигаться в направлении, противоположном тому, в котором он двигался в пункте 1. Пусть при движении на «восток» из начальной вершины v_0, автомат последовательно посетил вершины v_0, v_1, ..., v_k. Возможны два варианта разметки окрестности вершины v_k: либо $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$, либо $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$. Пусть $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$. Тогда, по определению движения на «запад», автомат переходит на вершину, метка которой совпадает с $\mu(v_k)$. Единственной такой вершиной в окрестности O_{v_k} является v_{k-1}. Далее автомат переходит на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_{k-1})$. Единственной такой вершиной в окрестности $O_{v_{k-1}}$ является v_{k-2}. Продолжая этот процесс автомат последовательно посетит вершины v_k, v_{k-1}, ..., v_1, v_0 и далее будет двигаться к противоположному концу цепи. Пусть $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$. Тогда, по определению движения на «восток», автомат переходит на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_k)$. Единственной такой вершиной в окрестности O_{v_k} является v_{k-1}. Далее автомат переходит на вершину, метка которой совпадает с $\mu(v_{k-1})$. Единственной такой вершиной в окрестности $O_{v_{k-1}}$ является v_{k-2}. Продолжая этот процесс автомат последовательно посетит вершины v_k, v_{k-1}, ..., v_1, v_0 и далее будет двигаться к противоположному концу цепи. Таким образом, автомат посетит обе висячие вершины цепи и, следовательно, все вершины, расположенные между ними. □

Следующее утверждение является аналогом Теоремы 3 для бесконечной СД-размеченной цепи.

Теорема 7. *Существует графоходный автомат с двумя камнями, который обходит бесконечную СД-размеченную цепь.*

Доказательство. Изначально автомат с обоими камнями находится в произвольной начальной вершине. Обозначим метку этой вершины через $a \in M$. Тогда в ее окрестности находятся вершины с метками a и b, где $b \in M$, $b \neq a$. Прежде, чем войти в бесконечный цикл, автомат выполняет следующие действия:

1. Перейти на вершину с меткой b и оставить в ней один из камней.

2. Перейти на вершину с меткой a.

3. Перейти на вершину с меткой a и оставить в ней второй камень.

Для дальнейших перемещений автомату потребуется запоминать метку предыдущей вершины, т. е. вершины, из которой автомат непосредственно перешел в текущую. В начале каждой итерации основного цикла алгоритма автомат находится на вершине, в которой расположен один из камней. Автомату предстоит выполнить следующие действия:

1. Перейти на предыдущую вершину.

2. Если метка текущей вершины совпадает с меткой предыдущей, то двигаться на «восток» до тех пор, пока не будет обнаружен камень. Если метка текущей вершины отличается от метки предыдущей, то двигаться на «запад» до тех пор, пока не будет обнаружен камень.

3. Подобрать камень, перейти на вершину, метка которой отличается от метки предыдущей, и установить в ней камень.

Покажем, что автомат, следуя этому алгоритму, действительно обходит бесконечную СД-размеченную цепь. Автомат, совершая перемещения, описанные в пунктах 1 и 2, проходит только те вершины, которые он уже посетил ранее. Он оказывается на новой для него вершине только тогда, когда устанавливает в ней камень. После этого автомат возвращается на предыдущую вершину. Следовательно, является невозможной ситуация, когда автомат бесконечно перемещается в одном направлении в неисследованной части цепи. Выберем произвольную вершину цепи, отличную от начальной. Пусть расстояние между этой вершиной и начальной равно $k > 1$. На каждой итерации основного цикла автомат отодвигает один из камней на расстояние в одну вершину от начальной, а на следующей итерации – отодвигает на одну вершину второй камень. Если $k = 2$, то автомат посетит искомую вершину при первоначальной расстановке камней. Если $k > 2$, то после $(2k-5)$-й итерации автомат посетит как вершину, находящуюся на расстоянии k «западнее» начальной, так и вершину, расположенную на расстоянии k «восточнее» начальной. Так как вершина была выбрана произвольно, то, выполняя алгоритм, автомат посетит любую вершину цепи. Следовательно, автомат обходит бесконечную СД-размеченную цепь. □

Рассмотрим следующую задачу: можно ли построить автомат, который способен строить минимальную СД-разметку непомеченной цепи? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 8. *Существует автомат, который строит на бесконечной цепи минимальную СД-разметку.*

Доказательство. Докажем утверждение при помощи непосредственного построения алгоритма, следуя которому автомат выполнит СД-разметку цепи. Пусть $M = \{a, b\}$ и все вершины цепи помечены одной и той же меткой $\lambda \notin M$. Положим, что автомат может переходить на вершины с меткой λ, то есть его входной алфавит $Y = M \cup \{\lambda\}$. Расширим возможности автомата так, чтобы он мог переносить метки из M и устанавливать их в вершинах цепи. Положим, что автомат не может заменять и удалять метки, которые он уже установил. Положим, далее, что автомат восстанавливает запас переносимых меток при посещении начальной вершины.

Прежде, чем войти в бесконечный цикл автомат выполняет следующие действия:

1. Пометить текущую (т. е. начальную) вершину меткой a.

2. Перейти на вершину с меткой λ (случайным образом выбирается из двух вершин, смежных с начальной).

3. Пометить текущую вершину меткой a.

В теле бесконечного цикла автомат повторяет следующую последовательность действий:

1. Перейти на предыдущую вершину.

2. Двигаться на «восток» (см. теорему 6) до тех пор, пока не окажется в первой вершине, в окрестности которой есть вершина с меткой λ.

3. Перейти на вершину с меткой λ.

4. Пометить текущую вершину меткой, отличающейся от метки предыдущей вершины.

5. Перейти на вершину с меткой λ.

6. Пометить текущую вершину меткой, совпадающей с меткой предыдущей вершины.

На каждой итерации основного цикла алгоритма две смежные непомеченные вершины цепи последовательно получают одинаковые метки из M. Причем автомат переходит в непомеченную вершину из вершины, которая была помечена им ранее. Поэтому после каждой итерации цикла получаем связную конечную помеченную цепь, которая включает в себя цепь, полученную на предыдущей итерации, и содержит на две вершины больше. Предположим, что на некоторой итерации автомат оказался в непомеченной вершине v_i (здесь нижние индексы обозначают только порядок посещения вершин при перемещениях автомата). Пусть метка предыдущей вершины $\mu(v_{i-1}) = a$ (в этом случае, согласно предписаниям алгоритма, $\mu(v_{i-2}) = a$). Автомат устанавливает $\mu(v_i) \neq \mu(v_{i-1})$, т. е. $\mu(v_i) = b$. Таким образом, $\mu(v_{i-1}) \neq \mu(v_{i+1})$ и разметка окрестности вершины v_i удовлетворяет условию слабой детерминированности. Следовательно, разметка связной конечной цепи, полученной на этой итерации, является слабо детерминированной. Затем автомат переходит на непомеченную вершину v_{i+1} и устанавливает $\mu(v_{i+1}) = \mu(v_i)$, т. е. $\mu(v_{i+1}) = b$. На следующей итерации автомат переходит на вершину v_i и, далее, совершает перемещения, которые заключаются в повторении двух шагов: (1) перейти на вершину, метка которой отличается от метки текущей; (2) перейти на вершину, метка которой совпадает с меткой текущей. Из сказанного выше следует, что $\mu(v_i) = \mu(v_{i+1})$ и $\mu(v_i) \neq \mu(v_{i+1})$, т. е. автомат на этой итерации будет перемещаться в направлении, противоположном тому, в котором он перемещался на предыдущей итерации. Таким образом, автомат достигнет противоположного конца помеченной части цепи и, затем, увеличит ее длину еще на две вершины. Следовательно, в процессе выполнения алгоритма любая вершина бесконечной цепи получит метку за конечное число шагов и разметка связной конечной цепи, полученной после каждой итерации, является слабо детерминированной и минимальной. $\square$

Из теоремы 8 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Существует автомат, который строит на конечной цепи минимальную СД-разметку.*

Доказательство. Для построения алгоритма поведения искомого автомата достаточно дополнить алгоритм разметки цепи из теоремы 8 реакцией на достижение конца цепи. Пусть G – конечная цепь, у которой $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ и $(v_i, v_{i+1}) \in E$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$. Положим, что автомат, исполняя алгоритм СД-разметки, установил метку в одном из концов цепи, например, в вершине v_k. Следовательно, дальнейшая разметка в этом направлении невозможна. Автомат возвращается на предыдущую вершину и далее перемещается, следуя правилу: перейти на вершину, метка которой отличается от метки предыдущей. Покажем, что автомат, исполняя это предписание, будет перемещаться в направлении, противоположном тому, в котором он перемещался на предыдущей итерации. Предположим, что на предыдущей итерации автомат последовательно посетил помеченные ранее вершины v_i, ..., v_k, где $1 < i < k$. Возможны два варианта разметки окрестности вершины v_k: либо $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$, либо $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$. В обоих случаях $\mu(v_{k-2}) \neq \mu(v_k)$ и $\mu(v_{k-3}) \neq \mu(v_{k-1})$. На текущей итерации автомат возвращается на вершину v_{k-1} и должен перейти на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_k)$. В окрестности v_{k-1} единственной такой вершиной является v_{k-2}. Из v_{k-2} автомат должен перейти на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_{k-1})$. В окрестности v_{k-2} единственной такой вершиной является v_{k-3}. Продолжая этот процесс автомат посетит вершину v_i. Таким образом, на каждой итерации автомат движется в направлении, противоположном тому, в котором он двигался на предыдущей. Далее автомат продолжает челночные перемещения по помеченному подграфу цепи (т. к. по предварительной договоренности автомат может пополнить запас меток только посещая начальную вершину), но добавляет помеченные вершины только к одному его концу. Автомат останавливается после разметки второй висячей вершины цепи. □

6. Выводы.

В работе получены необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства графоходного автомат и разметку бесконечной цепи, при которых автомат без компаса сохраняет направление перемещения на цепи. Предложены два типа вершинной разметки цепи, допускающие направленное перемещение автомата. Разработаны методы и алгоритмы автоматного обхода конечных и бесконечных помеченных цепей и построения обоих типов разметки для непомеченных цепей. Полученные результаты закладывают основы для изучения навигации автоматов без компаса и их коллективов в стационарных однородных дискретных средах.

Цитированная литература

1. *Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш.М.* Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 2. – С. 3–39.
2. *Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш.М.* Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 3. – С. 3–39.
3. *Стаматович Б.* Распознавание односвязных цифр автоматом // Интеллектуальные системы. – 1998. – Т. 3, вып. 3–4. – С. 281–305.
4. *Стаматович Б.* Распознавание двусвязных цифр коллективом автоматов // Интеллектуальные системы. – 1998. – Т. 4, вып. 1–2. – С. 321–337.
5. *Деглина Ю.Б., Козловский В.А., Костогрыз К.А.* Автоматное распознавание оцифрованных многоугольников // Искусственный интеллект. – 2004. – № 3. – С. 443–452.
6. *Dudek G., Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. – Cambridge University Press, 2010. – 406 p.

7. *Blum M., Kozen D.* On the Power of the Compass // SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. – IEEE Computer Society Washington, 1978. – P. 132–142.
8. *Donald B.R.* The Compass That Steered Robotics // Logic and Program Semantics. – Springer, 2012. – P. 50–65.
9. *Bhatt S., Even S., Greenberg D., Tayar R.* Traversing Directed Eulerian Mazes // Journal of Graph Algorithms and Applications. – 2002. – Vol. 6, N. 2. – P. 157–173.
10. *Бабичев А.В.* Ориентирование в лабиринте // Автоматика и телемеханика. – 2008. – Вып. 2. – С. 135–145.
11. *Дистель Р.* Теория графов. – Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
12. *Курганский А.Н., Сапунов С.В.* О направленном перемещении коллектива автоматов без компаса на одномерной целочисленной решетке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, Вып. 3. – С. 356–365.

References

1. *Kilibarda, G., Kudryavtsev, V.B., Ušćumlić, Š.* (2003). Independent systems of automata in labyrinths. Discrete Mathematics and Applications, 13, is. 3, pp. 221–255.
2. *Kilibarda, G., Kudryavtsev, V.B., Ušćumlić, Š.* (2003). Collectives of automata in labyrinths. Discrete Mathematics and Applications, 13, is. 5, pp. 429–466.
3. *Stamatovich, B.* (1998). Recognizing simply connected numerals by automata. Intellektualnyie sistemyi, 3, is. 3–4, pp. 281–305 (in Russian).
4. *Stamatovich, B.* (1998). Recognizing doubly connected numerals by collectives of automata. Intellektualnyie sistemyi, 4, is. 1–2, pp. 321–337 (in Russian).
5. *Deglina, Yu.B., Kozlovskii, V.A., Kostogryz, K.A.* (2004). Automata recognition of digitized polygons. Iskusstvennyiy intellekt, No. 3, pp. 443–452 (in Russian).
6. *Dudek, G., Jenkin, M.* (2010). Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge University Press, 406 p.
7. *Blum, M., Kozen, D.* (1978). On the Power of the Compass. SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. IEEE Computer Society Washington, pp. 132–142.
8. *Donald, B.R.* (2012). The Compass That Steered Robotics. Logic and Program Semantics. Springer, pp. 50–65.
9. *Bhatt, S., Even, S., Greenberg, D., Tayar, R.* (2002). Traversing Directed Eulerian Mazes. Journal of Graph Algorithms and Applications, 6, No. 2, pp. 157–173.
10. *Babichev, A.V.* (2008). Orientation in a maze. Automation and Remote Control, 69, is. 2, pp. 299–309.
11. *Diestel, R.* (2005). Graph Theory. Springer, 411 p.
12. *Kurganskyy, O.M., Sapunov, S. V.* (2016). On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice. Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform., 16, is. 3, pp. 356–365.

S. V. Sapunov

On the Directional Movement of a Graph Walking Automaton without a Compass on Infinite Path Graph.

Automata walking on graphs are a mathematical formalization of autonomous mobile agents with limited memory operating in discrete environments. Under this model arose an intensively developing broad area of studies of the behaviour of automata in labyrinths (labyrinth is an embedded directed graph of special form). Research in this regard received a wide range of applications, for example, in the problems of image analysis and navigation of mobile robots. The results for automata and labyrinths are based on the important assumption that automata operating in labyrinths can distinguish directions, that is, they have a compass. This paper deals with the problem of organizing a directional movement of a graph-walking automaton on infinite path graph (i.e. infinite connected two-regular graph). We consider the following problem. Initially the automaton located at an arbitrary vertex of the vertex-labelled path graph. The automaton looking over neighbourhood of the current vertex and may travel to some neighbouring vertex selected by its label. The automaton does not distinguish between equally labelled vertices by their coordinates of direction (that means automaton has no compass). It is required to find necessary and sufficient conditions in the form of restrictions on the properties of the automaton and on the labelling of the graph under which the automaton maintain movement direction. Two types of vertex labelling sufficient for automaton navigation are proposed. Labelling function is called weakly deterministic if all vertices in open neighbourhood of every vertex have different labels. Labelling function is called deterministic all vertices in closed neighbourhood of every vertex have different labels. It is shown that for the deterministic labelling the directions at any vertex are uniquely determined, but for the weakly deterministic labelling not. A vertex labelling that minimize the number of different label types is called a minimal labelling. It is demonstrated that for infinite chain: (1) minimal deterministic labelling uses three label types; (2) minimal weakly deterministic labelling uses two label types. Algorithms for constructing both types of labelling for finite and infinite unlabelled path graphs are developed. The obtained results lay the basis for studying navigation of automata without a compass and their collectives in stationary homogeneous discrete environments.

Keywords: *graph traversal, vertex labelling, labyrinth, finite automaton, mobile agent, robot, directional movement.*

С. В. Сапунов

Про спрямоване переміщення графохідного автомату без компаса на нескінченному ланцюзі.

Розв'язано задачу організації спрямованого переміщення графохідного автомату без компаса на нескінченному ланцюзі (тобто нескінченному зв'язному 2-регулярному графі). Отримані необхідні та достатні умови у вигляді обмежень на властивості автомата і розмітку ланцюга, за яких автомат зберігає напрямок переміщення на ланцюзі. Запропоновано два типи вершинної розмітки ланцюгу, що допускають спрямоване переміщення автомата: так звані детермінована і слабо детермінована розмітки. Розроблено методи та алгоритми обходу автоматом скінченних і нескінченних помічених ланцюгів. Для обох типів розмітки розроблено алгоритми розмітки ланцюгів, усі вершини яких не позначені або позначені однією і тією ж позначкою. Отримані результати закладають основи для вивчення навігації автоматів без компасу та їх колективів у стаціонарних однорідних дискретних середовищах.

Ключові слова: *обхід графу, вершинна розмітка, лабіринт, скінченний автомат, мобільний агент, робот, спрямоване переміщення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
`sapunov_sv@yahoo.com`
Получено 19.05.17