УДК 517.9

©2017. **С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев**

НЕЛИНЕЙНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Исследована задача о нахождении условий существования и построении решений периодической задачи для нелинейного уравнения Дюффинга. При этом, исследованная нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга не является слабонелинейной, в отличие от наиболее изученных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучен случай наличия простых корней уравнения для порождающих амплитуд. Для нахождения решений поставленной задачи в критическом случае получены конструктивные необходимые и достаточные условия существования, а также построена сходящаяся итерационная схема. Актуальность изучения нелинейного уравнения Дюффинга связана с многочисленными применениями уравнения Дюффинга в теории колебаний, механике, электронике, кардиологии. Для промежуточного вычисления корней нелинейных вещественных уравнений построена оригинальная итерационная техника с кубической сходимостью. Предложенная итерационная техника определяет на каждом шаге точное выполнение условий разрешимости, гарантирующее отсутствие вековых (или секулярных) членов, при этом приближения к решениям периодической задачи для уравнения Дюффинга являются периодическими функциями. Для контроля скорости сходимости итерационной схемы к точному решению периодической задачи для уравнения Дюффинга использованы невязки полученных приближений в уравнении Дюффинга в пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке, длина которого определяется на каждом шаге итерационной схемы. Заметим также, что итерационная схема с кубической сходимостью применима для нахождения приближенных решений автономных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых каждое приближение в точности удовлетворяет краевому условию.

MSC: 34B15.

Ключевые слова: *периодическая краевая задача, критический случай, итерационная техника с кубической сходимостью, уравнение Дюффинга.*

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о нахождении 2π-периодических решений $y(t) \in \mathbb{C}^1[0; 2\pi]$ нелинейного уравнения Дюффинга с возмущением [1, 2]

$$y'' + y = f(t) + Y(y), \ Y(y) := y^3. \tag{1}$$

Неоднородность $f(t)$ считаем непрерывной $f(t) \in \mathbb{C}[0; 2\pi]$ 2π-периодической функцией. Периодические решения нелинейного уравнения Дюффинга (1) будем искать в окрестности решения

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t, \ c_0 \in \mathbb{R}^1$$

однородной части этого уравнения. Полагаем выполненным условие разрешимости

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

2π-периодической задачи для линейной части уравнения Дюффинга (1)

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t\, f(t)\, dt = 0, \tag{2}$$

при этом линейная часть этой задачи имеет однопараметрическое семейство решений

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t + G\Big[f(s)\Big](t), \;\; c_0 \in \mathbb{R}^1,$$

представимое оператором Грина

$$G\Big[f(s)\Big](t) := \int\limits_0^t \sin(t - s)\, f(s)\, ds$$

2π-периодической задачи для линейной части

$$y'' + y = f(t)$$

уравнения Дюффинга (1). Периодические решения нелинейного уравнения Дюффинга (1)

$$y(t) = y_0(t, c_0) + x(t)$$

будем искать в окрестности решения $y_0(t, c_0)$ линейной части этого уравнения в виде разложения по косинусам независимой переменной. Для нахождения возмущения $x(t) \in \mathbb{C}^1[0; 2\pi]$ приходим к 2π-периодической задаче для уравнения

$$x'' + x = Y(y_0 + x),$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0) + x(t))\, \cos t\, dt = 0. \tag{3}$$

Для нахождения амплитуды $c_0 \in \mathbb{R}^1$ порождающего решения $y_0(t, c_0)$ приходим к уравнению

$$F_0(c_0) := \int\limits_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0))\, \cos t\, dt = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) традиционно называют уравнением для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения Дюффинга (1). Уравнение (4) при $f(t) = \cos 3t$ имеет единственный простой

$$B_0 = \frac{3\pi}{128} \neq 0$$

действительный корень

$$c_0^* = -\frac{1}{8},\ B_0 := F'(c_0^*).$$

Приближения к периодическому решению нелинейного уравнения Дюффинга (1) будем искать в окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*)$ в виде

$$y_{k+1}(t) = y_0(t, c_0^*) + c_{k+1}\, \cos t + x_{k+1}(t), \tag{5}$$

$$x_{k+1}(t) := G\Big[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k\, \cos s + x_k(s))\Big](t),\ k = 0,\ 1,\ 2\ ,\ \ldots\ .$$

Итерационная схема (5) соответствует методу простых итераций [3, 4]. Условием сходимости итерационной схемы (5) является требование сжимаемости

$$\left|\left|G'_x\Big[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k\, \cos s + x_k(s))\Big]\right|\right| < 1,\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

для оператора G. Условие сходимости выполнено для первого шага:

$$\left|\left|G'_x\Big[Y(y_0(s, c_0^*))\Big]\right|\right| \approx 0,0455\ 389 \ll 1.$$

Периодическая задача для уравнения первого приближения

$$x''_1(t) + x_1(t) = Y(y_0(t, c_0^*))$$

разрешима в силу равенства $F_0(c_0^*) = 0$, при этом

$$x_1(t) = -\frac{31 \cos t}{163\ 840} + \frac{3 \cos 3t}{16\ 384} + \frac{\cos 9t}{163\ 840}.$$

Условие существования 2π-периодического решения уравнения Дюффинга (1) для первого шага имеет вид

$$F_1(c_1) := \int\limits_0^{2\pi} Y(y_1(t, c_1))\, \cos t\, dt = 0. \tag{6}$$

Условия существования 2π-периодического решения уравнения Дюффинга (1) для каждого шага, и, в частности, уравнение (6) являются ключевыми при построении 2π-периодического решения уравнения Дюффинга (1). Традиционно, для облегчения вычислений, применялась линеаризация этих условий, приводящая к появлению вековых членов в приближениях к решению 2π-периодической задачи для уравнения Дюффинга [3, 4]. Для избежания появления вековых членов в приближениях к решению краевых задач нами ранее был использован метод наименьших квадратов [5]. Целью данной статьи является построение итерационной схемы, основанной на максимально точном решении уравнений, представляющих собой условия существования 2π-периодического решения уравнения Дюффинга (1) для каждого шага, в частности, уравнения (6).

2. Итерационная схема с кубической сходимостью.

Исследуем задачу о нахождении решения $z^* \in \mathbb{R}^1$ скалярного уравнения

$$f(z) := z + \varepsilon\varphi(z) = 0, \tag{7}$$

где $\varphi(z) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – нелинейная функция, трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и ε – малый положительный параметр. Предположим, что уравнение (7) имеет на отрезке $[a, b]$ корень $z^* \in \mathbb{R}^1$. В малой окрестности $z_0 + x \in [a, b]$ нулевого приближения $z_0 \in (a, b)$ к решению уравнения (7) имеет место разложение

$$f(z_0 + x) = f(z_0) + f'(z_0)\, x + \frac{f''(z_0)}{2}\, x^2 + \ \dots\ .$$

Полагая

$$f(z_0) + f'(z_0)\, x + \frac{f''(z_0)}{2}\, x^2 \approx 0,$$

для нахождения приближенного решения $z_0 + x$ уравнения (7) приходим к квадратному уравнению

$$f(z_0) + f'(z_0)\, x + \frac{f''(z_0)}{2}\, x^2 = 0; \tag{8}$$

здесь

$$f'(z_0) = 1 + \varepsilon\varphi'(z_0),\ \ f''(z_0) = \varepsilon\varphi''(z_0).$$

Дискриминант квадратного уравнения (8)

$$D(z_0) := (1 + \varepsilon\varphi'(z_0))^2 - 2\varepsilon(z_0 + \varepsilon\varphi(z_0))\varphi''(z_0) =$$

$$= 1 + 2\,\varepsilon\,\varphi'(z_0) - 2\,\varepsilon\,(z_0 + \varepsilon\varphi(z_0))\varphi''(z_0) + \varepsilon^2\,(\varphi'(z_0))^2$$

для достаточно малых положительных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ положителен, поэтому уравнение (8) имеет действительный корень

$$x = \frac{\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)},$$

который определяет приближенное решение уравнения (7)

$$z = z_0 + \frac{\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)},\ \ D(z_0) \geq 0.$$

Кроме того, при условии $D(z_0) \geq 0$ уравнение (8) может иметь действительный корень

$$x = \frac{-\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}.$$

Таким образом, при условии $D(z_0) \geq 0$ для различных значений параметра ε и нулевого приближения $z_0 \in (a, b)$ уравнение (8) имеет по меньшей мере один корень

$$x = \frac{\pm\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}, \ D(z_0) \geq 0,$$

который определяет приближенные решения уравнения (7)

$$z = z_0 + \frac{\pm\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}, \ D(z_0) \geq 0.$$

Заметим, что решение $z = z(\varepsilon)$ уравнения (7) при $\varepsilon = 0$ обращается в нуль, поэтому для достаточно малых положительных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ квадратное уравнение (8) имеет единственный действительный корень. Поскольку

$$z(\varepsilon) = \left(\varphi(z_0)\varphi'(z_0) + z_0\varphi'(z_0) - \frac{z_0^2}{2}\,\varphi''(z_0)\right)\varepsilon + \ \dots\ ,$$

постольку найденное для достаточно малых положительных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ приближенное решение $z = z(\varepsilon)$ уравнения (7) при $\varepsilon = 0$ также обращается в нуль. Кроме того, при условии $D(z_0) > 0$ уравнение (7) может иметь действительный корень, который при $\varepsilon = 0$ не обращается в нуль. Таким образом, при условии $D(z_0) \geq 0$ для различных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ и нулевого приближения $z_0 \in (a, b)$ уравнение (7) имеет по меньшей мере один действительный корень.

Покажем, что для нахождения точного решения $z^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (7) при условии $D(z_k) \geq 0$ применима итерационная схема

$$z_{k+1} = z_k + \frac{\pm\sqrt{D(z_k)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_k)}{\varepsilon\varphi''(z_k)}, \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ . \tag{9}$$

Согласно принятому соглашению функция $f(z)$ трижды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, следовательно, имеет место формула Тейлора (11):

$$f(z^*) = f(z^* - z_k + z_k) = f(z_k) + \tag{10}$$

$$+ f'(z_k)\,(z^* - z_k) + \frac{1}{2}\,f''(z_k)(z^* - z_k)^2 + r_2(z_k, z^* - z_k) := 0,$$

где

$$r_2(z_k, z^* - z_k) := \frac{1}{3!}\,f'''(\xi)\,(z^* - z_k)^3, \ a < z_k \leq \xi \leq z^* < b$$

– дополнительный член в форме Лагранжа [6, с. 257]. Нами использована формула Тейлора

$$f(z_0 + x) = f(z_0) + f'(z_0)x + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{2!}\,f''(z_0)x^2 + \ \dots\ + \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(z_0)x^k + \ r_k(z_0, x), \ k = 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

где
$$r_k(z_0, x) := \frac{1}{(k+1)!}\, f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1}, \ z_0 \le \xi \le z_0 + x$$
– дополнительный член в форме Лагранжа:
$$f(z^*) = f(z_k) + f'(z_k)\,(z^* - z_k) + \frac{1}{2}\, f''(z_k)(z^* - z_k)^2,$$
здесь произведена замена точного решения $z^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (7) приближенным решением z_{k+1} :
$$f(z_k) + f'(z_k)\,(z_{k+1} - z_k) + \frac{1}{2}\, f''(z_k)(z_{k+1} - z_k)^2 = 0. \tag{12}$$
Равенства (10) и (12) приводят к оценке
$$|z^* - z_{k+1}| \le \frac{||f'''(\xi)|| \cdot |z^* - z_k|^3}{|3f''(z_k)(z^* - 2z_k + z_{k+1}) + 6f'(z_k)|}.$$
Предположим, что для любых $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ имеют место неравенства
$$||f'''(\xi)||_{\mathbb{C}[|z_0 - q, z_0 + q|]} \le \psi_1(k), \tag{13}$$
$$|f''(z_k)(z^* - 2z_k + z_{k+1}) + 2f'(z_k)|^{-1} \le \psi_2(k).$$
Пусть существует константа
$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\psi_1(k)\, \psi_2(k)}{3} \right\}.$$
В этом случае имеет место оценка
$$|z^* - z_{k+1}| \le \theta \cdot |z^* - z_k|^3,$$
свидетельствующая о том, что если итерационная схема (9) сходится к точному решению z^* уравнения (7), то эта сходимость — кубическая. Найдем условие сходимости итерационной схемы (9) к точному решению z^* уравнения (7); для этого используем оценки
$$|z^* - z_1| \le \theta \cdot |z^* - z_0|^3,\ |z^* - z_2| \le \theta \cdot |z^* - z_1|^3 \le \theta^{1+3} \cdot |z^* - z_0|^{3^2},$$
$$|z^* - z_3| \le \theta \cdot |z^* - z_2|^3 \le \theta^{1+3+3^2} \cdot |z^* - z_0|^{3^3},\ \dots,$$
$$|z^* - z_k| \le \theta \cdot |z^* - z_{k-1}|^3 \le \theta^{1+3+3^2+\ \dots\ +3^{k-1}} \cdot |z^* - z_0|^{3^k},\ \dots .$$
Таким образом, имеет место неравенство
$$|z^* - z_k| \le \theta^{\frac{3^k - 1}{3 - 1}} \cdot |z^* - z_0|^{3^k} = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \Big(\theta \cdot |z^* - z_0|\Big)^{3^k},$$

свидетельствующее о сходимости итерационной схемы (9) к точному решению z^* уравнения (7) при условии

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1,$$

причем эта сходимость — кубическая. На практике последнее неравенство можно заменить следующим: $\theta \cdot |z_k - z_0| < 1$.

Теорема. *Предположим, что для уравнения (7) выполнены следующие условия*

1. *Нелинейная функция $\varphi(z) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$, имеет на отрезке $[a, b]$ корень $z^* \in \mathbb{R}^1$.*
2. *В окрестности $(z_0 - q, z_0 + q) \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ нулевого приближения z_0 для значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ имеют место неравенства*

$$||f'''(\xi)||_{\mathbb{C}[|z_0-q,z_0+q|]} \leq \psi_1(k),\ \ |f''(z_{k+1})(z_{k+1} - z_k) + f'(z_{k+1})|^{-1} \leq \psi_2(k+1).$$

3. *В указанной окрестности нулевого приближения z_0 для значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ имеют место неравенства*

$$D(z_k) \geq 0,\ \ \theta \cdot |z_k - z_0| < 1,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ , \tag{14}$$

где

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\psi_1(k)\, \psi_2(k)}{6} \right\}.$$

Тогда для нахождения решения z^* уравнения (7) применима итерационная схема (9), при этом скорость сходимости итерационной схемы (9) к решению z^* уравнения (7) кубическая.

Заметим, что итерационная схема (9) не повторяет метод Шредера [7, с. 154], комбинированный метод Дэккера и Брэнта [8, 9], метод Мюллера [10], а также четырехшаговый метод Риддерса [11].

3. Итерационная схема в случае периодической задачи для уравнения Дюффинга.

Для нахождения решения $c_1 \in \mathbb{R}^1$ уравнения (6) применим итерационную схему (9), при этом $D(c_0) \approx 0,0053\ 898 \neq 0$, следовательно

$$c_1^* \approx \frac{1\ 184\ 219}{6\ 286\ 734\ 039},\ \ F(c_1^*) \approx 0,$$

при этом условие (14) на первом шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_1^*| \approx 0,00\ 726\ 098 \ll 1.$$

Положим для второго шага

$$y_2(t) = y_0(t, c_0^*) + c_2 \cos t + x_2(t), \ c_2 \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$x_2(t) = -\frac{2\ 679\ 191 \cos t}{14\ 223\ 197\ 261} + \frac{11\ 140\ 594 \cos 3t}{61\ 113\ 645\ 011} + \frac{220\ 541 \cos 9t}{36\ 303\ 344\ 650} - \frac{835 \cos 15t}{2\ 622\ 815\ 013\ 818}.$$

Требование сжимаемости оператора G для уравнения второго приближения выполнено:

$$\left|\left| G'_x \left[Y(y_1(s, c_1^*)) \right](\cdot) \right|\right|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0,0454\ 055 \ll 1\ .$$

Для нахождения константы $c_2 \in \mathbb{R}^1$ применим итерационную схему (9), при этом $D(c_1^*) \approx 0,00538\ 994 \neq 0$, следовательно

$$c_2^* \approx \frac{1\ 184\ 219}{6\ 286\ 734\ 039}, \ F_2(c_2^*) \approx 0,$$

при этом условие (14) на втором шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_2^*| \approx 0,0362\ 726 \ll 1.$$

Требование сжимаемости для оператора G для уравнения третьего приближения выполнено:

$$\left|\left| G'_x \left[Y(y_2(s, c_2^*)) \right](\cdot) \right|\right|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0,0454\ 064 \ll 1\ .$$

Для нахождения константы $c_3 \in \mathbb{R}^1$ применим итерационную схему (9), при этом $D(c_2^*) \approx 0,00538\ 994 \neq 0$, следовательно

$$c_3^* \approx \frac{2\ 395\ 933}{12\ 719\ 180\ 575}, \ F_3(c_3^*) \approx 0,$$

при этом условие (14) на третьем шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_3^*| \approx 0,0362\ 733 \ll 1.$$

Заметим, что в отличие от использованного ранее метода Ньютона, итерационная схема (9) позволяет нахождение констант $c_1, \ c_2, \ c_3 \in \mathbb{R}^1$ за одну итерацию. Таким образом, найдено третье приближение к решению нелинейного уравнения Дюффинга (1):

$$y_3(t) = -\frac{345 \cos t}{1\ 608\ 254\ 353\ 012} - \frac{19\ 084\ 003 \cos 3t}{152\ 895\ 002} + \frac{85\ 835 \cos 9t}{14\ 129\ 039\ 197} - \frac{1763 \cos 15t}{5\ 564\ 301\ 169\ 003}.$$

Для оценки точности найденных приближений к решению периодической задачи для уравнения Дюффинга (1) определим невязки

$$\Delta_k := \left|\left| y_k''(t) + y_k(t) - f(t) - y_k^3(t) \right|\right|_{C[0;2\pi]}, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ 3.$$

В частности

$$\Delta_0 \approx 0,00195\ 313,\ \ \Delta_1 \approx 8,87\ 541 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2 \approx 3,93\ 095 \times 10^{-8},\ \ \Delta_3 \approx 1,77\ 160 \times 10^{-10}.$$

В заключение, отметим, что исследованная нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга (1) не является слабонелинейной, в отличие от наиболее изученных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4, 12, 13, 14, 15]. Кроме того, при построении приближений к решению периодической задачи для уравнения Дюффинга (1), в отличие от статьи [16], на каждом шаге обеспечено точное выполнение условий разрешимости, гарантирующее отсутствие вековых членов. Заметим также, что итерационная схема (9) применима для нахождения приближенных решений автономных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [17], для которых каждое приближение в точности удовлетворяет краевому условию.

Цитированная литература

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
2. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал. – 1997. – 512 с.
3. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
4. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
5. *Chuiko S.M.* On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.) – 2008. – **11**, № 4. — P. 585–604.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: ГИФМЛ. 1962. – 607 с.
7. *Хаусхолдер А.* Основы численного анализа. – М.: ГИИЛ. – 1956. – 320 с.
8. *Brent R.P.* An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function // Comput. J. – **14**. – 1971. – P. 422–425.
9. *Dekker T.J.* Finding a zero by means of successive linear interpolation // 1969 Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra. Proc. Sympos., Zurich-Ruschlikon, 1967. – Wiley-Interscience, New York. – P. 37–48.
10. *Muller D.E.* A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer // MTAC. – 1956. – **10**. – P. 208–215.
11. *Ridders C.* A new algorithm for computing a single root of a real continuous function // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1979. – **26**. – P. 979–980.
12. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев.: Наук. думка, 1990. – 96 с.
13. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1995. – 318 с.
14. *Chuiko S.M., Boichuk I.A., Pirus O.E.* On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **189**, № 5. – P. 867–881.
15. *Chuiko S.M., Pirus O.E.* On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **191**, № 3. – P. 449–464.

16. *Boichuk A.A.* Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – **50**, № 2. – P. 186–195.
17. *Chuiko S.M., Boichuk I.A.* An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.). – 2009. – **12**, № 3. – P. 405–416.

References

1. *Malkin, I. G.* (1956). Nekotoryie zadachi teorii nelineynih kolebaniy. Moscow: Gostehizdat (in Russian).
2. *Zaytsev, V. F., Polyanin, A. D.* (1997). Spravochnik po nelineynyim obyiknovennyim differentsialnyim uravneniyam. Moscow: Faktorial (in Russian).
3. *Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M.* (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). Berlin; Boston: De Gruyter.
4. *Grebenikov, E. A., Ryabov, Yu. A.* (1979). Konstruktivnyie metodyi analiza nelineynyih sistem. Moscow: Nauka (in Russian).
5. *Chuiko, S. M.* (2008). On approximate solution of boundary value problems by the least square method. Nonlinear Oscillations (N.Y.), 11, No. 4, pp. 585–604.
6. *Fihtengolts, G. M.* (1962). Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T. 1. Moscow: GIFML (in Russian).
7. *Hausholder A.* (1956). Osnovyi chislennogo analiza. Moscow: GIIL (in Russian).
8. *Brent, R. P.* (1971). An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. Comput. J., 14, pp. 422–425.
9. *Dekker, T. J.* (1969). Finding a zero by means of successive linear interpolation. Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra. Proc. Sympos.: Zurich-Ruschlikon; (1967) Wiley-Interscience: New York.
10. *Muller, D. E.* (1956). A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer. MTAC, 10, pp. 208–215.
11. *Ridders, C.* (1979). A new algorithm for computing a single root of a real continuous function. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 26, pp. 979–980.
12. *Boychuk, A. A.* (1990). Konstruktivnyie metodyi analiza kraevyih zadach. Kiev: Nauk. dumka (in Russian).
13. *Boychuk, A. A., Zhuravlev, V. F., Samoylenko, A. M.* (1995). Obobschenno-obratnyie operatoryi i neterovyi kraevyie zadachi. Kiev: In-t matematiki NAN Ukrainyi (in Russian).
14. *Chuiko, S. M., Boichuk, I. A., Pirus, O. E.* (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method. Journal of Mathematical Sciences. 189, No. 5, pp. 867–881.
15. *Chuiko, S. M., Pirus, O. E.* (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. Journal of Mathematical Sciences. 191, No. 3, pp. 449–464.
16. *Boichuk, A. A.* (1998). Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. Ukrainian Mathematical Journal. 50, No.2, pp. 186–195.
17. *Chuiko, S. M., Boichuk, I. A.* (2009). An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. Nonlinear Oscillations (N.Y.). 12, No. 3, pp. 405–416.

S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova (Starkova), D. V. Sysoev

Periodic value problem for an equation of Duffing in the critical case.

We studied the problem of finding conditions of existence and constructing solutions of the periodic problem for the nonlinear Duffing equation. Moreover, the studied nonlinear periodic problem for the Duffing equation is not weakly nonlinear, in contrast to the most studied boundary-value problems for ordinary differential equations. We studied the case of simple roots of the equation for generating amplitudes. To find solutions to the problem in the critical case, constructive necessary and sufficient conditions for existence were obtained, and a convergent iterative scheme was constructed. Actuality of studying the nonlinear Duffing equation is connected with numerous applications of the Duffing equation in the theory of oscillations, mechanics, electronics, and cardiology. For an intermediate calculation of roots of non-linear real equations, an original iterative technique with cubic convergence was constructed. The proposed iterative technique determines an exact fulfillment of solvability conditions at each step, guaranteeing the absence of secular terms, wherein approximations to solutions of the periodic problem for the Duffing equation are periodic functions. To control the rate of convergence of the iterative scheme to the exact solution of the periodic problem for the Duffing equation, the discrepancies of the approximations were used in the Duffing equation in the space of continuous functions defined on an interval whose length is determined at each step of the iteration scheme. We also note that the iterative scheme with cubic convergence is applicable for finding approximate solutions of autonomous boundary value problems for ordinary differential equations for which every approximation exactly satisfies the boundary condition.

Keywords: *periodic boundary value problem, critical case, iterative technique with cubic convergence, Duffing equation.*

С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова (Старкова), Д. В. Сисоєв

Нелінійна періодична задача для рівняння Дюффінга в критичному випадку.

Досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язків періодичної задачі для нелінійного рівняння Дюффінга. При цьому, досліджена нелінійна періодична задача для рівняння Дюффінга не є слабконелінійною, на відміну від найбільш вивчених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Вивчено випадок наявності простих коренів рівняння для породжують амплітуд. Для знаходження розв'язків поставленої задачі в критичному випадку отримані конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також побудована збіжна ітераційна схема. Актуальність вивчення нелінійного рівняння Дюффінга пов'язана з численними застосуваннями рівняння Дюффінга в теорії коливань, механіці, електроніці, кардіології. Для проміжного обчислення коренів нелінійних дійсних рівнянь побудована оригінальна ітераційна техніка з кубічною збіжністю. Запропонована ітераційна техніка визначає на кожному кроці точне виконання умов розв'язності, які гарантують відсутність вікових (або секулярних) членів, при цьому наближення до розв'язків періодичної задачі для рівняння Дюффінга є періодичними функціями. Для контролю швидкості збіжності ітераційної схеми до точного розв'язання періодичної задачі для рівняння Дюффінга використані невязки отриманих наближень в рівнянні Дюффінга в просторі неперервних функцій, визначених на відрізку, довжина якого визначається на кожному кроці ітераційної схеми. Зауважимо також, що ітераційна схема з кубічної збіжністю застосовна для знаходження наближених розв'язків автономних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, для яких кожне наближення в точності задовольняє крайовій умові.

Ключові слова: *періодична крайова задача, критичний випадок, ітераційна техніка з кубічною збіжністю, рівняння Дюффінга.*

Донбасский государственный педагогический университет
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`chujko-slav@inbox.ru, star-o@ukr.net`

Получено 27.12.17