УДК 517.5

©2017. **Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов**

О КЛАССАХ СОБОЛЕВА С КРИТИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В статье установлено, что любой гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}$ с внешней дилатацией $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}$ является так называемым нижним Q-гомеоморфизмом с $Q(x)=K_O(x,f)$, а также кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(x)=K_O^{n-1}(x,f)$. Это позволяет исследовать локальное и граничное поведение отображений класса $W^{1,n-1}_{\rm loc}$.

MSC: Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

Ключевые слова: *классы Соболева, критический показатель, внешняя дилатация, нижние и кольцевые Q-гомеоморфизмы.*

1. Введение.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J_f(x) \tag{1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)\geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ – её операторная норма, $\|f'(x)\|:=\sup\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$, и $J_f(x)=\det f'(x)$ – якобиан отображения f.

Напомним, что впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [4], см. также [5]. Впоследствии это условие было заменено требованием $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагавшим однако дополнительно, что $J_f\in L^1_{\rm loc}$, см., напр., монографию [5], а также дальнейшие ссылки в монографии [7].

Заметим, что условие $J_f\in L^1_{\rm loc}$ излишне в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, имеющего п.в. частные производные в D, существует множество E лебеговой меры ноль, такое что f обладает (N)-свойством Лузина в $D\setminus E$ и

$$\int\limits_A |J_f(x)|\,dm(x)=m(f(A)) \tag{2}$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A\subset D\setminus E$ (см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [23]. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $J_f(x)$ – якобиан отображения f, имеющего все первые частные производные в точке x. Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством

$$K_O(x,f)\ =\ \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}\ , \tag{3}$$

если $J_f(x) \neq 0$; $K_O(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_O(x,f) = \infty$ в остальных точках.

Внутренней дилатацией отображения f в точке x называется величина

$$K_I(x,f) \;=\; \frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))^n} \tag{4}$$

где $l\,(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, если $J_f(x) \neq 0$; $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках.

Следуя разд. 9.2, гл. 9 в [7], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S,y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega : \; S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{5}$$

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., разд. 9.2 в [7].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S,y)\, dH^k y. \tag{6}$$

Пусть Γ – семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{7}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$.

Модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,. \tag{8}$$

В дальнейшем через $\Delta(E,F;G)$ обозначаем совокупность всех кривых $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, соединяющих произвольные множества E и F в множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ для всех $t \in (0,1)$.

2. О кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмах.

Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если соотношение

$$M(\Delta(f(K_1), f(K_2); f(D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x) \tag{9}$$

выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D, которые принадлежат разным компонентам дополнения в $\mathbb{R}^n$ кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1$. Также говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ есть *кольцевой Q-гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма впервые было введено в работе [9] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай в работе [21], см. также монографии [3] и [7].

Говорят, см. разд. 9.2 в [7], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$ - мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{10}$$

для почти всех $S \in \Gamma$, т.е. за исключением подсемейства Γ нулевого модуля.

Гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *нижним Q-гомеоморфизмом в точке* x_0, если

$$M\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \inf_{\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{11}$$

для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, а Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *нижним Q-гомеоморфизмом в области* D, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие нижнего Q-гомеоморфизма введено в работе [14] и теория таких отображений нашла интересные приложения в изучении краевых задач для уравнений Бельтрами, а также локального и граничного поведения классов Орлича-Соболева, см., например, статьи [13, 16] и монографию [17].

Следующее утверждение устанавливает связь между нижними и кольцевыми Q-гомеоморфизмами в $\mathbb{R}^n$, см. следствие 5 в [16].

Предложение 1. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и функция $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ интегрируема в степени $n-1$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{D}$. Если $f : D \to D'$ – нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0, то f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = Q^{n-1}(x)$.*

Замечание 1. В определениях нижних и кольцевых Q-гомеоморфизмов функцию Q достаточно задать только в области D или продолжить нулем вне D. По замечанию 8 в [16], заключение предложения 1 остается в силе, если функция

Q интегрируема в степени $n-1$ лишь на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0.

3. О некоторых свойствах отображений класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}$.

По теореме 1.1 из недавней работы [11] имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и $f:D\to\mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое дискретное отображение класса $W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$ с локально интегрируемой внутренней дилатацией. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду.*

При $n\geqslant 3$ этот результат был новым даже для гомеоморфизмов. При $n=2$ по известной теореме Геринга-Лехто любое непрерывное открытое отображение, имеющее п.в. частные производные, дифференцируемо п.в., см., например, [2] или [6]. Заметим, что последний результат для гомеоморфизмов был доказан еще Меньшовым в работе [8] и его доказательство без изменений проходило и для непрерывных открытых отображений. По теореме Вяйсяля заключение сохраняет силу для непрерывных открытых отображений класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при любых $p>n-1$ и $n\geqslant 3$, см. лемму 3 в [12]. В то же время, известны примеры функций $f\in W^{1,n}_{\rm loc}\subset W^{1,n-1}_{\rm loc}$, которые нигде не дифференцируемы, см., например, [10].

Следствие 1. *Если открытое дискретное отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$ имеет внешнюю дилатацию локально интегрируемую в степени $n-1$, то f дифференцируемо почти всюду.*

Далее, по теореме 1.3 работы [1] имеем следующий важный результат.

Предложение 3. *Пусть $f:C\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, – гомеоморфизм класса $W^{1,n-1}_{\rm loc}(C)$ в единичном кубе $C:=(0,1)^n$. Тогда f обладает (N)-свойством Лузина относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, т.е., для любого множества $E\subset\mathcal{P}$, если $H^{n-1}(E)=0$, то $H^{n-1}(f(E))=0$.*

Этот результат был распространен на произвольные непрерывные открытые дискретные отображения $f:D\to\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n-1}_{\rm loc}$, см. предложение 3.3 в [11]. Более того, любое непрерывное отображение $f:D\to\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 1$, класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$ обладает указанным свойством, см., например, теорему 3 в [16]. Однако, это неверно даже для гомеоморфизмов $f:D\to\mathbb{R}^n$ в классах $W^{1,p}_{\rm loc}$ ни при каком $p<n-1$. Действительно, известны примеры С.П. Пономарева гомеоморфизмов $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, принадлежащих классу $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $p<n$, и не обладающих (N)-свойством Лузина, см. [20]. Если теперь $g(x)$ – такой пример в $\mathbb{R}^{n-1}$, то $f(x,y):=(g(x),y)$, $x\in\mathbb{R}^{n-1}$, $y\in\mathbb{R}$, не удовлетворяет (N)-свойству Лузина на всех гиперплоскостях $y=\rm const$.

Лемма 1. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $f:D\to D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$ с $K_O\in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда $\|f'\|\in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$.*

Доказательство. Пусть V – компакт в D. Тогда, применяя неравенство Гёльдера с показателями $p = n$ и $p' = \frac{n}{n-1}$, будем иметь

$$\int\limits_V \|f'(x)\|^{n-1}\, dm(x) \ = \ \int\limits_V K_O^{\frac{n-1}{n}}(x)\cdot J_f^{\frac{n-1}{n}}(x)\ dm(x) \ \leqslant$$

$$\leqslant \ \left(\ \int\limits_V K_O^{n-1}(x)\ dm(x)\right)^{\frac{1}{n}} \left(\ \int\limits_V J_f(x)\ dm(x)\right)^{\frac{n-1}{n}} \ < \ \infty$$

и заключение леммы следует, поскольку $J_f \in L^1_{\rm loc}$. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, имеющего п.в. частные производные в D, существует множество E лебеговой меры ноль, такое что f обладает (N)-свойством Лузина в $D\setminus E$ и

$$\int\limits_A J_f(x)\, dm(x) = m(f(A)) \tag{12}$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A\subset D\setminus E$, см., например, пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [23]. $\Box$

4. Основная лемма.

Лемма 2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $f : D\to\mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$ с $K_O(\ \cdot\ ,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$ и пусть C – куб в $\mathbb{R}^n$ с гранями параллельными координатным гиперплоскостям, такой что $\overline{C}\subset D$. Тогда сужение отображения f на C абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких гиперплоскостях $\mathcal{P}$ выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E\subset\mathcal{P}$.*

Доказательство. По лемме 1 $\|f'(x)\|\in L^{n-1}(C)$ и по теореме Фубини, см., например, теорему III(8.1) в [22], на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$,

$$\int\limits_{C\cap\mathcal{P}} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} < \infty\ ,$$

а по следствию 1 и предложению 3 можно считать дополнительно, что отображение f дифференцируемо в почти всех точках множества $C\cap\mathcal{P}$ и обладает там (N)-свойством Лузина относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. Зафиксируем произвольную гиперплоскость $\mathcal{P}_*$ с указанными свойствами.

Тогда каждое измеримое множество $E\subset C\cap\mathcal{P}_*$ допускает разложение $E = E_0\cup E_*$, где $H^{n-1}(E_0) = 0$, и $E_* := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k, $k = 1,2,\ldots$, – измеримые множества, такие, что отображения $f_k := f|_{E_k}$ являются липшицевыми, см. теорему

3.1.8 в [23]. По построению $H^{n-1}(f(E_0)) = 0$, а каждое отображение f_k допускает липшицево продолжение на всю гиперплоскость $\mathcal{P}_*$ по теореме Кирсбрауна, см., например, теорему 2.10.43 в [23]. Таким образом, по теореме 3.2.5 в [23] и счетной аддитивности интеграла имеем равенство:

$$H^{n-1}(f(E)) \ = \int\limits_{E_*} J_{n-1}(x)\ d\mathcal{A}\ ,$$

где J_{n-1} обозначает $(n-1)$-мерный якобиан отображения f на гиперплоскости $\mathcal{P}_*$ и, наконец, по пункту 1.7.6 в [23] получаем оценку

$$H^{n-1}(f(E)) \ \leqslant \ \int\limits_{E} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A}\ .$$

Отсюда приходим к абсолютной непрерывности отображения f на гиперплоскости $\mathcal{P}_*$ в силу абсолютной непрерывности неопределенного интеграла, а также – ко второму заключению леммы. $\Box$

Заметим тот очевидный факт, что хаусдорфовы меры квазиинвариантны при квазиизометриях, а классы Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ инвариантны, см., например, секцию 1.1.7 в монографии [19]. По свойству Линделефа в $\mathbb{R}^n$, см., например, секцию I.5.XI в [18], множество $D \setminus \{x_0\}$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $D \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0, и каждый такой сегмент может быть отображен на единичный куб в $\mathbb{R}^n$ посредством квазиизометрии, переводящих куски сфер в куски гиперплоскостей.

Таким образом, на основе предложений 2 и 3, а также применяя лемму 2, приходим к следующим выводам.

Следствие 2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду и обладает (N)-свойством Лузина относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех сферах S с центром в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Более того, если дополнительно $K_O(\ \cdot\ , f) \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$, то отображение f на почти всех таких сферах S локально абсолютно непрерывно и, кроме того, $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset S$.*

5. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда гомеоморфизм f является нижним Q-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_O(x, f)$.*

Доказательство. Обозначим через B (борелевское) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., например, соответственно теоремы 2.10.43 и 3.1.2 в [23], заключаем, что множество B представляет собой счетное объединение борелевских множеств B_l,

$l = 1, 2, \ldots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [23]. Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f' = 0$.

По следствию 1 множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет лебегову меру нуль. Поэтому $\mathcal{A}_S(B_0) = 0$ для почти всех гиперповерхностей S в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$, см., например, теорему 2.4 в [15] или теорему 9.1 в [7]. Таким образом, по следствию 2 получаем, что $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_0)) = 0 = \mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_*))$ для почти всех S_r, где $S_r^* = f(S_r)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D. Для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho(x) := \rho_*(f(x))\|f'(x)\|$ при $x \in D \setminus B_0$ и $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0.

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, согласно 1.7.6 в [23], получаем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \;=\; \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\, d\mathcal{A} \;\geqslant\; \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}\, d\mathcal{A}_* \;\geqslant\; 1 \qquad (13)$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$.

Наконец, используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, см., напр., теорему 3.2.5 в [23], ввиду счетной аддитивности интеграла, приходим к оценке

$$\int\limits_D \frac{\rho^n(x)}{K_O(x, f)}\, dm(x) \;\leqslant\; \int\limits_{f(D)} \rho_*^n(y)\, dm(y)\;, \qquad (14)$$

что и завершает доказательство. □

Комбинируя предложение 1 и теорему 1, получаем еще одно важное следствие.

Следствие 3. *Пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $K_O(\,\cdot\,, f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом с $Q_*(x) = K_O^{n-1}(x, f)$.*

Ввиду ограничений на объём данной публикации, приложения полученных результатов к теории локального и граничного поведения отображений классов Соболева с критическим показателем будут опубликованы отдельно.

Цитированная литература

1. *Csörnyei M., Hencl S., Maly J.* Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // J. Reine Angew. Math. – 2010. – No. 644. – P. 221–235.
2. *Gehring F.W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – No. 272. – P. 3–8.
3. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Developments of Mathematics, V. 26. – New York etc.: Springer, 2012.
4. *Iwaniec T., Šverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 118. – P. 181–188.

5. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non–linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
6. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – New York: Springer–Verlag, 1973.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer, 2009.
8. *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – V. 105. – P. 75–85.
9. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117–150.
10. *Serrin J.* On the differentiability of functions of several variables // Arch. Rational Mech. Anal. – 1961. – V. 7. – P. 359–372.
11. *Tengvall V.* Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2014. – V. 51, No. 1–2. – P. 381–399.
12. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1961. – No. 298. – P. 1–36.
13. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанова В.И., Салимов Р.Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, No. 4. – С. 101–124.
14. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 159–184.
15. *Kovtonyuk D., Ryazanov R.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – V. 104. – P. 291–306.
16. *Ковтонюк Д.А., Рязанова В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, № 6. – С. 50–102.
17. *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева (под общей ред. Рязанова В.И.). – К.: Наукова думка, 2013.
18. *Куратовский К.* Топология 1. – Москва: Мир, 1966.
19. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Ленинград: ЛГУ, 1985.
20. *Пономарёв С.П.* Об N-свойстве гомеоморфизмов класса W^1_p // Сиб. матем. ж. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 140–148.
21. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. – 2007. – Т. 48, № 6. – С. 1361–1376.
22. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
23. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

References

1. *Csörnyei, M., Hencl, S., Maly, J.* (2010). Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. J. Reine Angew. Math., no. 644, pp. 221–235.
2. *Gehring, F.W., Lehto, O.* (1959). On the total differentiability of functions of a complex variable. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., no. 272, pp. 3–8.
3. *Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2012). The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Developments of Mathematics. V. 26. New York etc.: Springer.
4. *Iwaniec, T., Šverák, V.* (1993). On mappings with integrable dilatation. Proc. Amer. Math. Soc., 118, pp. 181–188.
5. *Iwaniec, T., Martin, G.* (2001). Geometrical Function Theory and Non–linear Analysis. Oxford: Clarendon Press.
6. *Lehto, O., Virtanen, K.* (1973). Quasiconformal Mappings in the Plane. New York: Springer–Verlag.
7. *Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2009). Moduli in Modern Mapping Theory. New York: Springer.
8. *Menchoff, D.* (1931). Sur les differencelles totales des fonctions univalentes. Math. Ann., 105, pp. 75–85.

9. *Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2005). On ring solutions of Beltrami equation. J. Anal. Math., 96, pp. 117–150.
10. *Serrin, J.* (1961). On the differentiability of functions of several variables. Arch. Rational Mech. Anal., 7, pp. 359–372.
11. *Tengvall, V.* (2014). Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. Calc. Var. Partial Differential Equations, 51, no. 1–2, pp. 381–399.
12. *Väisälä, J.* (1961). On quasiconformal mappings in space. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., no. 298, pp. 1–36.
13. *Kovtonyuk, D.A., Petkov, I.V., Ryazanov, V.I., Salimov, R.R.* (2014). The boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations. St. Petersburg Math. J., 25, no. 4, pp. 587–603.
14. *Kovtonyuk, D., Ryazanov, R.* (2008). On the theory of lower Q-homeomorphisms. Ukr. Math. Bull., 5, no. 2, pp. 157–181.
15. *Kovtonyuk, D., Ryazanov, R.* (2008). On the theory of mappings with finite area distortion. J. Anal. Math., 104, pp. 291–306.
16. *Kovtonyuk, D.A., Ryazanov, R.R., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A.* (2014). Toward the theory of the Orlicz–Sobolev classes. St. Petersburg Math. J., 25, no. 6, pp. 929–963.
17. *Kovtonyuk, D.A., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (ed. Ryazanov, V.I.)* (2013). Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz-Sobolev, Kiev: Naukova dumka (in Russian).
18. *Kuratowski, K.* (1968). Topology, V. 1. New York: Academic Press.
19. *Maz'ya, V.* (1985). Sobolev Classes. Berlin: Springer-Verlag.
20. *Ponomarev, S.P.* (1987). On the N-property of homeomorphisms of the class W_p^1. Siberian Math. J., 28, no. 2, pp. 291–298.
21. *Ryazanov, V.I., Sevost'yanov, E.A.* (2007). Equicontinuous classes of ring Q-homeomorphisms. Siberian Math. J., 48, no. 6, pp. 1093–1105.
22. *Saks, S.* (1964). Theory of the Integral. Second revised edition. English translation by L. C. Young. With two additional notes by Stefan Banach Dover Publications, Inc., New York.
23. *Federer, H.* (1969). Geometric Measure Theory. Springer.

O. S. Afanas'eva, V. I. Ryazanov, R. R. Salimov

On Sobolev classes with critical exponent.

It is established in the present paper that an arbitrary homeomorphism $f : D \to \mathbb{R}^n$ of a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, in the Sobolev class $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$ with the outer dilatation $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ is the so–called ring Q-homeomorphism with $Q(x) = K_O^{n-1}(x,f)$ and also the so–called lower $Q-$homeomorphism with $Q(x) = K_O(x,f)$. These facts make possible to apply the theory of the local and boundary behavior of ring and lower homeomorphisms to the study of the Sobolev mappings with the critical exponent. Recall, given bounded domains D and D' in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, and a measurable function $Q : D \to (0,\infty)$, a homeomorphism $f : D \to D'$ is called a **ring Q-homeomorphism at a point** $x_0 \in \overline{D}$ if $M(f(\Delta(C_1,C_2,D))) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\, dm(x)$ for all continua C_1 and C_2 in D from different components of the completion of any ring $A = A(x_0,r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x-x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \delta_0 = \sup\limits_{x\in D} |x-x_0|$, and for every measurable function $\eta : (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ such that $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$. Here $\Delta(C_1,C_2,D)$ denotes the collection of all paths joining C_1 and C_2 in D and $M(\Gamma)$ is the conformal modulus of the family Γ of paths γ in D (for a ring, it coincides with its capacity). A homeomorphism $f : D \to D'$ is said to be a **ring Q-homeomorphism in the domain** in D if f is so at every point $x_0 \in \overline{D}$. The conception of ring Q-homeomorphisms was first introduced in the paper Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal.

Math. 96 (2005), 117–150; in the connection of investigations of the Beltrami equations in the plane and, later on, it was extended to the spatial case in the paper Ryazanov V.I., Sevost'yanov E.A. Equicontinuous classes of ring Q-homeomorphisms // Sibirsk. Mat. Zh. 48 (2007), no. 6, 1361–1376; transl. in Siberian Math. J. 48 (2007), no. 6, 1093–1105; see also the monographs Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation. A geometric approach. Developments in Mathematics, 26. Springer, New York, 2012; and Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009. The ring Q-homeomorphisms are also studied in metric spaces by Smolovaya E.S. (at present Afanas'eva E.S.) in the paper Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces // Ukrain. Mat. Zh., 62 (2010), no. 5, 682–689 (Russian); transl. in Ukrainian Math. J. 62 (2010), no. 5, 785–793. The conception of lower Q-homeomorphisms was introduced in the paper D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, On the theory of lower Q-homeomorphisms // Ukr. Mat. Visn. 5, no. 2 (2008), 159–184; transl. in Ukr. Math. Bull. 5, no. 2 (2008), 157–181; and the theory of these mappings has found interesting applications to the study of boundary value problems for the Beltrami equations, and also to the theory of the local and boundary behavior for the Orlicz–Sobolev classes, see e.g. the papers Kovtonyuk D.A., Petkov I.V., Ryazanov V.I., Salimov R.R. Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Algebra i Analiz 25 (2013), no. 4, 101–124; transl. in St. Petersburg Math. J. 25 (2014), no. 4, 587–603; and Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On the theory of Orlicz-Sobolev classes // Algebra i Analiz 25 (2013), no. 6, 50–102; transl. in St. Petersburg Math. J. 25 (2014), no. 6, 929–963; see also the monograph Kovtonyuk D.A., Salimov R.R. Sevost'yanov E.A. (ed. Ryazanov V.I.). Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz-Sobolev. – Kiev: Naukova dumka, 2013 (in Russian).

Keywords: *Sobolev's classes, critical exponent, outer dilatation, lower and ring Q-homeomorphisms.*

О. С. Афанасьєва, В. І. Рязанов, Р. Р. Салімов

Щодо класів Соболєва з критичним показником.

У статті встановлено, що будь-який гомеоморфізм f класа Соболєва $W^{1,n-1}_{\rm loc}$ із зовнішньою ділатацією $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}$ є так званим нижнім Q-гомеоморфізмом із $Q(x)=K_O(x,f)$ та кільцевим Q-гомеоморфізмом із $Q(x)=K_O^{n-1}(x,f)$.

Ключові слова: *класи Соболєва, критичний показник, зовнішня ділатація, нижні і кільцеві Q-гомеоморфізми.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск;
Ин-т математики НАН Украины, Киев
es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com,
ruslan.salimov1@gmail.com

Получено 11.12.17