УДК 517.9

©2017. **Е. А. Евгеньева**

РАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА СЕМЕЙСТВА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ

Изучение асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений в окрестности времени сингулярного обострения граничного режима основано на введении бесконечного семейства энергетических функций, связанных с последовательностью областей пространственно-временных слоев со стремящимися к 0 высотами. Эти энергетические функции удовлетворяют некоторой специальной бесконечной системе дифференциальных неравенств. Анализ свойств этой системы в зависимости от начальных данных, определяемых исходным сингулярным граничным режимом, является одним из ключевых моментов при изучении поведения решений описанной задачи. В работе получена равномерная оценка для решений этих систем при различных граничных режимах, приведено несколько примеров, иллюстрирующих результат.

MSC: 35K59, 35B44, 35K58, 35K65.

Ключевые слова: *квазилинейные параболические уравнения, энергетические решения, режимы с обострением, энергетические функции, дифференциальные неравенства.*

1. Введение и формулировка основного результата.

В цилиндре $Q := (0,T) \times \Omega$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ с C^2–гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим задачу для квазилинейного параболического уравнения:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p(u) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega,\, p > q > 0 \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \ \text{ в } \Omega, \quad u_0 \in L_{q+1}(\Omega). \tag{2}$$

Будем изучать асимптотическое поведение энергетических (слабых) решений $u(t,x)$ задачи (1)–(2) с сингулярно обостряющимся условием на энергию:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(t) := \int_\Omega |u(t,x)|^{q+1}dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant \\ &\leqslant F_\omega(t) := \omega(T-t) \cdot (T-t)^{-\alpha_0} \to \infty \ \text{ при } t \to T, \quad \alpha_0 := \frac{q+1}{p-q}, \end{aligned} \tag{3}$$

где функция ω – абсолютно непрерывная монотонно возрастающая на $(0,+\infty)$ функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $\omega(h) \to 0$ при $h \to 0$;

2) $h^{-\alpha}\omega(h) \to \infty$ при $h \to 0$ $\forall \alpha > 0$;

Это исследование финансируется проектом №0117U006353 Отдела целевой подготовки Киевского национального университета им. Тараса Шевченко при НАН Украины.

3) $\frac{h\omega'(h)}{\omega(h)} \to 0$ при $h \to 0$.

Условие (3) может порождаться граничными данными задачи. Так например, при изучении решений u задачи (1)–(2) с граничным условием Дирихле

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \quad \text{при } t \to T, \tag{4}$$

условие (3) возникает в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) \leqslant F(t) &:= \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x f(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau + \\ &+ \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \to \infty \ \text{ при } t \to T, \end{aligned} \tag{5}$$

где $F(t)$ описывает, так называемый, характер обострения граничной функции $f(t,x)$ из (4).

Известно, что при условии на энергию (3) имеет место локализация множества сингулярности Ω_{bl} (blow-up set) на границе ([4]), а именно

$$\Omega_{bl} := \{x : u(t,x) \to \infty \text{ при } t \to T\} \subset \partial\Omega.$$

Для изучения асимптотического поведения профиля энергетического решения u задачи (1)–(3) используется метод энергетических оценок ([1, 2, 3]). Суть метода заключается в эффективной оценке перетоков энергии, связанной с решением задачи, на бесконечном семействе полос, накапливающихся около времени обострения T. Исходя из этих соображений, разбиваем промежуток $[0,T)$ бесконечной последовательностью точек $\{t_j\}$ ($t_j \to T$ при $j \to \infty$) на промежутки $[t_{j-1}, t_j)$ длиной $\varepsilon_j := t_j - t_{j-1}$. Выбор такого разбиения проводится специальным образом и зависит от вида функции $F_\omega(t)$. Так как эта процедура не входит в круг исследований данной работы, то приводить ее мы не будем. Также необходимо параметризировать область Ω, введя в рассмотрение параметр $s > 0$, характеризующий расстояние до границы области, а именно

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) := dist(x, \partial\Omega) > s\}.$$

Таким образом получаем последовательность пространственно-временных слоев $Q_j(s) := [t_{j-1}, t_j) \times \Omega(s)$. На этих слоях вводим бесконечное семейство энергетических функций:

$$\mathcal{E}_j(s) := \sup_{t_{j-1} \leqslant \tau < t_j} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

При анализе этого семейства возникают системы дифференциальных неравенств следующего вида:

$$\begin{aligned} &M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda) \max\left\{ k_j^{(1)} (-M_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)} (-M_j'(s))^{1+\gamma_2} \right\} \quad \forall\, s > 0, \\ &M_j(0) \leqslant K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\lambda \in (0,1)$, $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$,

$$k_j^{(1)} = c_1 \varepsilon_j^{\gamma_1 \delta}, \quad k_j^{(2)} = c_2 \varepsilon_j^{\gamma_2 \delta}, \quad K_j = c_3 \varepsilon_j^{-\delta} \omega(c_4 \varepsilon_j), \quad \delta > 0,$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 > 0$, $\{\varepsilon_j\} : \varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$. Функция ω из (3).

Исследование этих систем является одним из ключевых этапов при изучении асимптотического поведения энергетических решений $u(t,x)$ задачи (1)–(3). При этом важно получить равномерную оценку для решений $M_j(s)$, так как она формирует вид окончательной оценки решения $u(t,x)$.

Основной результат работы заключен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{M_j(s)\}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяет системе дифференциальных неравенств* (7). *Тогда для решений $M_j(s)$ справедлива следующая равномерная оценка:*

$$M_j(s) \leqslant B\, s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \left[\omega^{-1}\left(b s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}}\right)\right]^{-\delta} \quad \forall\, s \in (0,\epsilon),\, \forall\, j \in \mathbb{N} : j \geqslant j_\infty, \tag{8}$$

где ω^{-1} – обратная функция к ω, $\epsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная, $j_\infty = j_\infty(\epsilon) \to \infty$ при $\epsilon \to 0$,

$$B = \frac{r_{11} c_4^{\delta} \bar{\epsilon}}{1 - \bar{\epsilon}}, \quad b = \left(\frac{\gamma_1}{(1+\gamma_1)(1-\bar{\epsilon})}\right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} c_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} c_3^{-1}, \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\epsilon) \to 0 \text{ при } \epsilon \to 0.$$

2. Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим последовательность задач Коши для семейства функций $\{\overline{M}_j(s)\}$:

$$\begin{aligned} &\overline{M}_j(s) = \max\left\{k_j^{(1)}(-\overline{M}'_j(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)}(-\overline{M}'_j(s))^{1+\gamma_2}\right\} \quad \forall\, s > 0, \\ &\overline{M}_j(0) = K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, k_j^{(1)}, k_j^{(2)}, K_j$ из (7). В силу леммы 1 решения задач могут быть записаны в виде:

$$\overline{M}_j(s) = \begin{cases} r_{11} \varepsilon_j^{-\delta} \left(r_{12}\, \omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} - s\right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall\, j \geqslant j_0,\, \forall\, s > 0, \\ r_{11} \varepsilon_j^{-\delta} \left(r_{22} + r_{23}\, \omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s\right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall\, j < j_0,\, \forall\, s \geqslant \bar{s}_{\varepsilon_j}, \\ r_{31} \varepsilon_j^{-\delta} \left(r_{23}\, \omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s\right)_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall\, j < j_0,\, \forall\, s \in (0, \bar{s}_{\varepsilon_j}), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$r_{11}=\left(\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}\right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} c_1^{-\frac{1}{\gamma_1}},\quad r_{12}=\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(c_1c_3^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}},\quad r_{22}=\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1\gamma_2}\left(\frac{c_1^{\gamma_2}}{c_2^{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}$$

$$r_{23}=\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}(c_2c_3^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_1}},\quad r_{31}=\left(\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}\right)^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} c_2^{-\frac{1}{\gamma_2}},$$

$$j_0=\max_{j\in\mathbb{N}}\left\{\omega(c_4\varepsilon_j)\geqslant B_0:=c_3^{-1}\left(c_1^{1+\gamma_2}c_2^{-(1+\gamma_1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}\right\},$$

$$\bar{s}_{\varepsilon_j}=r_{23}\left[\omega(c_4\varepsilon_j)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}-B_0^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}\right]_+ .$$

Теперь по последовательности $\{\overline{M}_j(s)\}$ построим монотонную последовательность $\widetilde{M}_j(s)$:

$$\widetilde{M}_j(s):=\max_{1\leqslant i\leqslant j}\{\overline{M}_i(s)\}\quad \forall\, j\in\mathbb{N},\,\forall\, s>0. \tag{11}$$

Можно показать (аналогично доказательству лемм 9.2.3 и 9.2.4 из [4]), что для любого номера j существует положительная строго монотонно возрастающая последовательность точек $\{s_l^{(j)}\}$ $(l=1,2,...,l_j\leqslant j)$ такая, что функцию $\widetilde{M}_j(s)$ можно записать в виде:

$$\widetilde{M}_j(s)=\overline{M}_{i_l}(s)\quad \forall\, s\in[s_{l+1}^{(j)},s_l^{(j)})\quad \forall\, l\leqslant l_j,\quad s_{l_j+1}^{(j)}=0, \tag{12}$$

$\{i_l\}$ $(l=1,2,...,l_j\leqslant j)$ – положительная строго возрастающая последовательность индексов. Рассмотрим теперь более широкое, чем $\{\overline{M}_j(s)\}$ семейство функций $\overline{N}_\tau(s)$, зависящее от непрерывного параметра $\tau>0$:

$$\overline{N}_\tau(s):=\begin{cases} r_{11}\tau^{-\delta}\left(r_{12}\;\omega(c_4\tau)^{\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}}-s\right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall\,\tau\leqslant B_1,\,\forall\, s>0,\\ r_{11}\tau^{-\delta}\left(r_{22}+r_{23}\;\omega(c_4\tau)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}-s\right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall\,\tau> B_1,\,\forall\, s\geqslant\bar{s}_\tau,\\ r_{31}\tau^{-\delta}\left(r_{23}\;\omega(c_4\tau)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}-s\right)_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall\,\tau> B_1,\,\forall\, s\in(0,\bar{s}_\tau),\end{cases} \tag{13}$$

где

$$B_1=\min_{\tau>0}\left\{\omega(c_4\varepsilon_j)\geqslant B_0\right\},\quad \bar{s}_\tau=r_{23}\left[\omega(c_4\tau)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}-B_0^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}\right]_+,\quad B_0 \text{ из } (10).$$

Очевидно, что $\overline{N}_{\varepsilon_j}(s)=\overline{M}_j(s)\;\;\forall\, j\in\mathbb{N}$. Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\widetilde{M}_j(s)=\max_{i\leqslant j}\{\overline{M}_i(s)\}\leqslant\max_{i\in\mathbb{N}}\{\overline{M}_i(s)\}\leqslant\max_{\tau>0}\{\overline{N}_\tau(s)\}\leqslant$$
$$\leqslant\max\left\{\max_{\tau<B_0}\{\overline{N}_\tau^{(1)}(s)\},\max_{\tau\geqslant B_0}\{\overline{N}_\tau^{(2)}(s)\}\right\}\leqslant\max\left\{\max_{\tau<B_0}\{\overline{N}_\tau^{(1)}(s)\},B_2\right\}, \tag{14}$$

где $B_2=\overline{N}_{B_1}^{(2)}(0)$.

Нам интересно только лишь поведение функций при сколь угодно больших j, а значит можем записать оценку (14) следующим образом:

$$\widetilde{M_j}(s) \leqslant \max_{\tau<\tau(\epsilon)} \{\overline{N}_\tau^{(1)}(s)\} \quad \forall\, s \in (0,\epsilon), \tag{15}$$

где $\epsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная, $\tau(\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Найдем теперь огибающую $N(s)$ для семейства кривых $\overline{N}_\tau^{(1)}(s)$. Будем искать огибающую стандартным способом. Исключим параметр τ из системы:

$$\frac{\partial \overline{N}_\tau^{(1)}(s)}{\partial \tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\, s\, \omega(c_4\tau)^{-\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} + r_{12}\left(-\delta + \frac{(c_4\tau)\,\omega'(c_4\tau)}{\omega(c_4\tau)}\right) = 0. \tag{16}$$

В силу условия 3) на функцию ω можем обозначить

$$\bar{\epsilon} := \frac{1}{\delta}\frac{(c_4\tau)\,\omega'(c_4\tau)}{\omega(c_4\tau)},$$

где $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Тогда, решая уравнение (16) относительно τ, получим:

$$\bar{\tau}(s) = \frac{1}{c_4}\,\omega^{-1}\left((\bar{r}_{12}^{-1} s)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}}\right), \tag{17}$$

где $\bar{r}_{12} = r_{12}(1-\bar{\epsilon})$. Таким образом получаем:

$$N(s) = \overline{N}_{\bar{\tau}(s)}^{(1)}(s) = \frac{r_{11} c_4^\delta \bar{\epsilon}}{1-\bar{\epsilon}}\, s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \left[\omega^{-1}\left((\bar{r}_{12}^{-1} s)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}}\right)\right]^{-\delta}. \tag{18}$$

В силу того, что $(\bar{\tau}(s))$ является точкой максимума функции $N_\tau^{(1)}(s)$, можем утверждать, что:

$$\max_{\tau<\tau(\epsilon)} \{\overline{N}_\tau^{(1)}(s)\} \leqslant N(s) \quad \forall\, s \in (0,\epsilon), \tag{19}$$

Покажем теперь, что для функций $M_j(s)$ из (7) справедлива следующая равномерная оценка:

$$M_i(s) \leqslant \widetilde{M_j}(s) \quad \forall\, i \leqslant j, \quad \forall\, s > 0, \tag{20}$$

где $\widetilde{M_j}(s)$ из (11). Используем метод индукции. При $j = 1$ оценка проверяется непосредственным интегрированием неравенства (7). Положим, что оценка (20) выполняется для $j-1$, но не выполняется для j. Тогда найдется такой интервал (a,b), $a > 0$, что имеет место

$$M_j(s) > \widetilde{M_j}(s) \quad \forall\, s \in (a,b), \quad M_j(s) \leqslant \widetilde{M_j}(s) \quad \forall\, s \leqslant a, \quad M_j(a) = \widetilde{M_j}(a). \tag{21}$$

Пусть для определенности

$$a \in [s_{l+1}^{(j)}, s_l^{(j)}), \quad l \leqslant l_j,$$

где l_j из (12). Тогда (21) можно переписать

$$M_j(s) > \overline{M}_l(s) \quad \forall\, s \in (a, \min\{s_l, b\}) \quad \text{и} \quad M_j(a) = \overline{M}_l(a). \tag{22}$$

Далее, в силу монотонного возрастания последовательности $\{\widetilde{M}_i(s)\}$ по i и в силу справедливости оценки (20) для $j-1$, имеем:

$$\widetilde{M}_j(s) \geqslant \widetilde{M}_{j-1}(s) \geqslant M_{j-1}(s),$$

а значит, в силу предположения (21),

$$M_{j-1}(s) \leqslant M_j(s) \quad \forall\, s \in [a, b).$$

Тогда система (7) для M_j перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &M_j(s) \leqslant \max\left\{k_j^{(1)}(-M_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)}(-M_j'(s))^{1+\gamma_2}\right\} \quad \forall\, s \in [a, \min\{s_l, b\}), \\ &M_j(a) = \overline{M}_l(a). \end{aligned} \tag{23}$$

Решая полученную систему с использованием леммы 1, получаем оценку:

$$M_j(s) \leqslant \overline{M}_l(s) \quad \forall\, s \in [a, \min\{s_l, b\}),$$

что противоречит предположению (21) и доказывает оценку (20).

Учитывая теперь (15), (19) и (20), получаем утверждение теоремы 1.

3. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим функцию ω вида:

$$\omega(h) = (-\alpha \ln h)^{-\beta}, \quad \alpha,\, \beta > 0.$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет условиям 1)–3). Тогда в силу теоремы получаем, что функции $M_j(s)$ будут удовлетворять оценке:

$$M_j(s) \leqslant B\, s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \exp\left\{\bar{b} s^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1 \beta}}\right\} \quad \forall\, s \in (0, \epsilon),\, \forall\, j \in \mathbb{N} : j \geqslant j_\infty,$$

где $\bar{b} = b^{-\frac{1}{\beta}} \alpha^{-1} \delta$.

Пример 2. Если теперь будем рассматривать функцию ω более общего вида, а именно,

$$\omega(h) = \left(\ln \ln ... \ln h^{-\alpha}\right)^{-\beta}, \quad \alpha,\, \beta > 0,$$

то оценка для функций $M_j(s)$ будет иметь вид:

$$M_j(s) \leqslant B\, s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \exp\left\{\exp\left\{... \exp\left\{\bar{b} s^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1 \beta}}\right\} ...\right\}\right\} \quad \forall\, s \in (0, \epsilon),\, \forall\, j \in \mathbb{N} : j \geqslant j_\infty.$$

4. Приложения.

Лемма 1. ([4], лемма 9.2.2) *Для произвольной неотрицательной невозрастающей абсолютно непрерывной функции $M(s)$ рассмотрим дифференциальное неравенство с начальным условием:*

$$\begin{aligned} &M(s) \leqslant \lambda \max\left\{k_1(-M'(s))^{1+\gamma_1}; k_2(-M'(s))^{1+\gamma_2}\right\} \quad \forall\, s > 0, \\ &M(0) \leqslant K \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{24}$$

где $k_1,\ k_2,\ K > 0$. Тогда если $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$, то для функции $M(s)$ справедлива следующая оценка:

$$M(s) = \begin{cases} a_{11} k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} \left[a_{12}\left(k_1 K^{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}} - s\right]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall\, s > 0,\ \text{если } K \leqslant \overline{K} \\ a_{21} k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_{22}\left(k_2 K^{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - s\right]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall\, s \in (0, \bar{s}],\ \text{если } K > \overline{K} \\ a_{11} k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} \left[a_{12}\left(k_1 K^{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}} - (s - \bar{s})\right]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall\, s > \bar{s},\ \text{если } K > \overline{K}, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$a_{11} = \left(\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}\right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}}, \quad a_{12} = \frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}, \quad a_{21} = \left(\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}\right)^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}}, \quad a_{22} = \frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}$$

$$\overline{K} = \overline{K}(k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2) := k_1^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}} k_2^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}}$$

$$\bar{s} : a_{21} k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_{22}\left(k_2 K^{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - \bar{s}\right]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} = \overline{K} \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = a_{22} k_2^{\frac{1}{1+\gamma_2}} \left(K^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - \overline{K}^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}}\right).$$

Цитированная литература

1. *Шишков А.Е., Щелков А.Г.* Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях // Матем. сб. – 1999. – Т. 190, № 3–4. – С. 129–160.
2. *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 2003. – V. 133, No. 5. – P. 1075–1119.
3. *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci. – 2004. – V. 460, No. 2051. –P. 3299–3325.
4. *Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E.* Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations // De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel. – 2016. – 435 p.

References

1. *Shishkov, A.E., Shchelkov, A.G.* (1999). Boundary regimes with peaking for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains. Math. Sb., 190, No. 3–4, pp. 129–160 (in Russian).

2. *Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E.* (2003). Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, 133, No. 5, 1075–1119.
3. *Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E.* (2004). Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., 460, No. 2051, pp. 3299–3325.
4. *Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E.* (2016). Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel, 435 p.

Ye. A. Yevgenieva

Uniform estimation of the energy functions family for quasilinear parabolic equations with singular boundary data.

The paper deals with a class of weak (energy) solutions of initial–boundary value problem for doubly degenerate parabolic equations with the singular (peaking) boundary data. Such problems have been studied by many authors (V. A. Galaktionov, B. H. Gilding, M. A. Herrero and so on) in order to obtain conditions for the localization of the solution. The main purpose was to find condition for the character of singularity of boundary regime such that a solution of mentioned problem was localized. Namely, it was introduced the domain in which the solution is singular (blow-up set). Galaktionov introduced a classification of singular boundary regimes in accordance with the size of blow-up set. If blow-up set is not contained in the definition domain of the problem, then this boundary regime is called HS-regime. If it is contained in the definition domain, then the regime is called S-regime. If blow-up set lies on the boundary of the definition domain, then the regime is called LS-regime. In addition to determining the localization conditions, it is also interesting to study the behavior of the solution. The purpose of current investigation is to study the asymptotic behavior of solutions of mentioned problem with LS-regime in the neighborhood of blow-up time. In this paper we have obtained some helpful result which will allow us to formed the final estimation for solution profile. The investigation of behavior of solutions is carried out by the method of energy estimations. Singular boundary data generate some estimation for the global energy function associated with the solution of the problem. The method of energy estimations is based on the introduction of an infinite family of energy functions associated with the sequence of domains of space-time layers with height tending to 0. Based on the estimation of global energy function we obtain the system of the differential inequalities for introduced family of energy functions. The main result of the paper is a uniform estimation for these functions. Also there are several examples, which show the dependence between initial energy estimation and final estimation. The result allows us to form an idea of the asymptotic behavior of solution of mentioned problem and it will be used in the future investigation for the obtaining of final estimation.

Keywords: *quasilinear parabolic equations, energy solutions, blow-up regimes, energy functions, differential inequality.*

Є. О. Євгеньєва

Рівномірна оцінка сімейства енергетичних функцій для квазілінійних параболічних рівнянь з сингулярними граничними даними.

Вивчення асимптотичної поведінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь в околі часу сингулярного загострення граничного режиму засновано на введенні нескінченного сімейства енергетичних функцій, пов'язаних з послідовністю областей просторово-часових шарів, висоти яких прямують до 0. Ці енергетичні функції задовольняють деякій спеціальній нескінченій системі диференціальних нерівностей. Аналіз властивостей цієї системи в залежності від початкових даних, що визначаються вихідним сингулярним граничним режимом, є одним з ключових моментів при вивченні поведінки розв'язків описаної задачі. У роботі отримана рівномірна оцінка для розв'язків цих систем при різних граничних режимах, наведено кілька прикладів, що ілюструють результат.

Ключові слова: *квазілінійні параболічні рівняння, енергетичні розв'язки, режими із загостренням, енергетичні функції, диференціальні нерівності.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
yevgeniia.yevgenieva@gmail.com
bashtynskaya.evgeniya@gmail.com

Получено 19.04.2018