

УДК 533.6.013.42

DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-8

©2018. Ю.М. Кононов, Ю.О. Джуха

## ПРО СПРОЩЕННЯ ЧАСТОТНОГО РІВНЯННЯ ВЛАСНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ПРУЖНИМИ ОСНОВАМИ

Проведено спрощення раніше отриманого частотного рівняння власних осесиметричних коливань важкої ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких кругових пластин. Усунено особливість в частотному рівнянні при збігу масових характеристик пластин. Розглянуто довільні способи закріплення контурів пластин і різні граничні випадки виродження пластин в мембрани та абсолютно жорсткі, випадок відсутності верхньої пластини (рідина з вільною поверхнею), а також випадок невагомості. Показано, що частотний спектр сумісних осесиметричних коливань пружних основ та ідеальної рідини складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ, і додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого.

MSC: 74F10.

**Ключові слова:** гідропружність, кругові пружні пластини, ідеальна нестислива рідина, осесиметричні коливання.

### 1. Вступ.

В статті [1] розглянуто задачу про власні осесиметричні коливання важкої ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких ізотропних кругових пластин. Частотне рівняння представлено у вигляді визначника п'ятого порядку, що має особливість при збігу масових характеристик пластин. Розглянуто різні граничні випадки виродження пластин в мембрани, в абсолютно жорсткі, а також випадок відсутності верхньої пластини (випадок наявності вільної поверхні в рідині). Ця задача була узагальнена в статті [2] на випадок коаксимального циліндра з пружними основами у вигляді кільцевих пластин з довільними способами закріплення контурів, а в статті [3] – на випадок двошарової рідини. В роботах [4] розглянуто окремі задачі, аналогічні задачі [1] у випадку невагомості, а в [5] – у випадку відсутності верхньої пластини (випадок наявності вільної поверхні в рідині). Стаття [6] присвячена дослідженню впливу перевантаження на осесиметричні коливання ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з закріпленою на вільній поверхні рідини мембраною. Існує велика кількість робіт, в яких в лінійній та нелінійній постановках досліджено коливання вільної поверхні ідеальної рідини в круговому резервуарі з пружним дном, наприклад, [7–9]. Поздовжні (симетричні) та поперечні (несиметричні)

---

Роботу виконано відповідно до програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U002522).

коливання пластини або мембрани на вільній поверхні ідеальної рідини в круговому резервуарі з абсолютно жорсткою нижньою основою докладно досліджено в статті [10]. Аналітично аналізуються сумісні гідропружні частоти нестисливої та нев'язкої рідини в круговому циліндричному резервуарі з гнучкою мембраною чи пружною пластиною на вільній поверхні. Близькою за темою до нашої статті є робота [11], в якій досліджуються коливання однорідної ідеальної рідини в циліндричному резервуарі з однаковими пружними основами у вигляді кругових пластин. В ній запропоновано аналітичний метод, заснований на розкладанні в ряд Фур'є-Бесселя та методі Релея-Рітца. Для випадку пластини розглянуто різні граничні умови. У даній статті проведено спрощення частотного рівняння, отриманого в [1]. Воно представлено у вигляді визначника четвертого порядку, усунуто особливість в частотному рівнянні при збігу масових характеристик пластин, розглянуто довільні способи закріплення контурів пластин, граничні випадки виродження пластин в абсолютно жорсткі, а також випадок невагомості. Показано, що частотний спектр сумісних осесиметричних коливань пружних основ та ідеальної рідини складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ і додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого. Проведені числові дослідження впливу способів закріплення пластин на частотний спектр.

## 2. Постановка задачі.

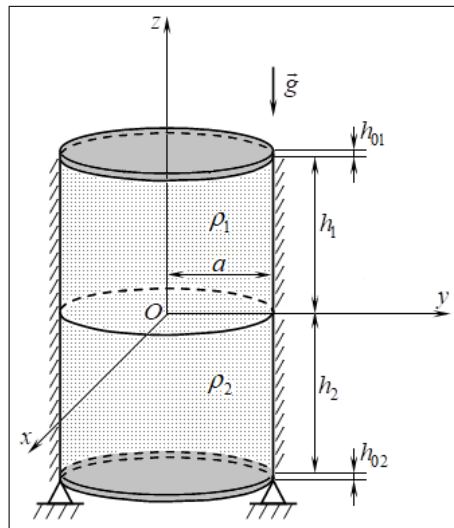


Рис. 1. Постановка задачі.

Розглянемо сумісні коливання пружних основ і важкої ідеальної нестисливої рідини з густиною  $\rho$ , що повністю заповнює прямий круговий циліндричний резервуар висоти  $h$  і радіуса  $a$  з жорсткою боковою поверхнею (рис. 1). Основи резервуара представляють собою кругові ізотропні пластини зі згинальними жорсткостями  $D_i$ , на які впливають розтягуючі зусилля  $T_i$  в серединній площині ( $i = 1, 2$ ).

Індекс  $i = 1$  відповідає верхній основі, а  $i = 2$  – нижній основі. Циліндричну систему координат  $Or\theta z$  розмістимо так, щоби площина  $Or\theta$  знаходилась на однаковій відстані від основ, а вісь  $Oz$  була спрямована за віссю циліндра протилежно до вектора прискорення сили тяжіння  $\vec{g}$ . Задачу будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи рух рідини потенціальним, а сумісні коливання пластин і рідини – безвідривними.

Рівняння руху механічної системи, що розглядається, мають вигляд [1–5, 12]:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left( Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=\frac{h}{2}} - g \frac{h}{2} \right) - g k_{01}, \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left( Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-\frac{h}{2}} + g \frac{h}{2} \right) - g k_{02}, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

з урахуванням наступних граничних умов:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$(\mathfrak{L}_{ip} [W_i])|_{\gamma} = 0 \quad (i = \overline{1, 2}, p = \overline{1, 2}), \quad (4)$$

$$\frac{1}{S} \int_S W_1 dS = \frac{1}{S} \int_S W_2 dS. \quad (5)$$

Тут  $k_{0i} = \rho_{0i} h_{0i}$ ;  $W_i$ ,  $\rho_{0i}$  і  $h_{0i}$  – відповідно прогин, густина та товщина  $i$ -ої пластини;  $\Phi$  – потенціал швидкостей рідини;  $Q$  – довільна функція часу;  $\Delta_2$  і  $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – відповідно двомірний та тримірний оператори Лапласа;  $S$  – кругова область, а  $\gamma$  – її контур ( $r = a$ ).

### 3. Виведення статичної крайової задачі та частотного рівняння сумісних коливань пружних основ і рідини.

Розглянемо задачу про власні сумісні коливання пружних пластин і рідини. Для цього представимо прогини пластин у вигляді суми статичного та динамічного прогинів і покладемо  $W_i(r, t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$ ,  $\rho(Q - \dot{a}_0) = \tilde{Q} e^{i\omega t} + g(\rho \frac{h}{2} + k_{01}) + C$ ,  $\rho \dot{a}_1 \frac{h}{2} = \tilde{w} e^{i\omega t}$ . Рівняння (1)–(2) та граничні умови (4)–(5) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g] w_i = \\ = \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{in} \psi_n + (-1)^{i+1} \tilde{Q} - \tilde{w} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$(\mathfrak{L}_{ip} [w_i])|_{\gamma} = 0 \quad (i = \overline{1, 2}, p = \overline{1, 2}), \quad (7)$$

$$w = \frac{2}{a^2} \int_0^a r w_1 \, dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a r w_2 \, dr, \quad (8)$$

де  $W_i^{st}(r)$  – статичний прогин пластин,  $\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ ,

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n} \cosh \kappa_n - w_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n} \cosh \kappa_n - w_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w} = -\rho\omega^2 \frac{h}{2} w,$$

$$w_{in} = \frac{2\pi}{N_n^2} \int_0^a r w_i \psi_n \, dr, \quad (9)$$

Розв'язання статичної задачі зводиться до наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} D_1 \Delta_2^2 W_1^{st} - T_1 \Delta_2 W_1^{st} + \rho g W_1^{st} &= C - g \left( \rho \frac{h}{2} + k_{01} \right), \\ D_2 \Delta_2^2 W_2^{st} - T_2 \Delta_2 W_2^{st} - \rho g W_2^{st} &= -C - g \left( \rho \frac{h}{2} + k_{02} \right), \\ (\mathfrak{L}_{ip} [W_i^{st}])|_{\gamma} &= 0, \\ \int_0^a r W_1^{st} \, dr &= \int_0^a r W_2^{st} \, dr. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут невідомі функції  $W_i^{st}$  та константа  $C$ . Розв'язок крайової задачі (10) наведено в статті [12].

Розв'язок кожного рівняння (6) будемо шукати у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного [1–6, 12, 13]:

$$w_i = \sum_{k=1}^2 w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{in}}{d_{in}} \psi_n + \tilde{k}_{0i} \left[ \tilde{Q} + (-1)^{i+1} \rho\omega^2 \frac{h}{2} w \right] \quad (i = 1, 2), \quad (11)$$

де

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i} \omega^2} \left( \omega^2 \neq \frac{\rho g}{k_{01}} \right), \quad d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g] \neq 0,$$

$A_{ik}^0$  ( $i, k = 1, 2$ ),  $w_{in}$ ,  $\tilde{Q}$  і  $w$  – невідомі константи.

Підставивши (11) в умову (9) і розв'язавши систему двох лінійних рівнянь

відносно  $w_{1n}$  і  $w_{2n}$ , остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \sum_{k=1}^2 \left[ \left( w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right] + \\
 &+ \tilde{k}_{01} \left( \tilde{Q} + \rho \omega^2 \frac{h}{2} w \right), \\
 w_2 &= \sum_{k=1}^2 \left[ \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left( w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right] + \\
 &+ \tilde{k}_{02} \left( \tilde{Q} - \rho \omega^2 \frac{h}{2} w \right).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 a_{11n} &= \omega^2 \rho \frac{k_n \coth \kappa_n d_{2n} - \omega^2 \rho}{\Delta_n}, & a_{12n} &= -\omega^2 \frac{k_n b_n d_{2n}}{\Delta_n}, \\
 a_{21n} &= -\omega^2 \frac{k_n b_n d_{1n}}{\Delta_n}, & a_{22n} &= \omega^2 \rho \frac{k_n \coth \kappa_n d_{1n} - \omega^2 \rho}{\Delta_n}, \\
 \Delta_n &= (k_n d_{1n} - \omega^2 \rho \coth \kappa_n) (k_n d_{2n} - \omega^2 \rho \coth \kappa_n) - \omega^4 b_n^2 = \\
 &= k_n^2 d_{1n} d_{2n} - \omega^2 \rho k_n \coth \kappa_n (d_{1n} + d_{2n}) + \omega^4 \rho^2, & b_n &= \frac{\rho}{\sinh \kappa_n},
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{2\pi}{N_n^2} \int_0^a r w_{ik}^0 \psi_n \, dr. \tag{14}$$

Так, наприклад, при  $T_2 = \infty$  коефіцієнт  $a_{11n}$  матиме вигляд:

$$a_{11n} = \frac{\omega^2 \rho}{k_n d_{1n} \tanh \kappa_n - \omega^2 \rho}$$

і збігається з аналогічним співвідношенням з роботи [13].

#### 4. Частотне рівняння сумісних симетричних (поздовжніх) коливань ідеальної рідини та пружних основ.

Для отримання частотного рівняння симетричних коливань рідини та пружних основ необхідно мати ще два рівняння для невідомих  $\tilde{Q}$  і  $w$ . Для цього, підставивши (12) в (8), отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_{01} Q + \tilde{k}_1 w &= - \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0, \\
 \tilde{k}_{02} Q + \tilde{k}_2 w &= - \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0,
 \end{aligned}$$

з якої знайдемо  $Q$  і  $w$ :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\Delta} \left( -\tilde{k}_2 \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \tilde{k}_1 \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right), \\ w &= \frac{1}{\Delta} \left( \tilde{k}_{02} \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{k}_{01} \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_{01} \rho \frac{h}{2} \omega^2 - 1$ ,  $\tilde{k}_2 = -\tilde{k}_{02} \rho \frac{h}{2} \omega^2 - 1$ ,  $\Delta = \tilde{k}_{01} \tilde{k}_2 - \tilde{k}_{02} \tilde{k}_1$ ,

$$\tilde{w}_{ik}^0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a r w_{ik}^0 dr. \quad (16)$$

Підставивши (15) в (12), остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=1}^2 \left[ \left( w_{1k}^0 + \alpha_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \alpha_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right], \\ w_2 &= \sum_{k=1}^2 \left[ \left( \beta_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( w_{2k}^0 + \beta_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{k_{02} + \rho(h + g/\omega^2)}{k_{12}}, & \alpha_2 &= \frac{k_{02} + \rho g/\omega^2}{k_{12}}, \\ \beta_1 &= \frac{k_{01} - \rho g/\omega^2}{k_{12}}, & \beta_2 &= -\frac{k_{01} + \rho(h - g/\omega^2)}{k_{12}}, \\ k_{12} &= k_{01} + k_{02} + \rho h. \end{aligned}$$

Таким чином, форми коливань пружних пластин мають вигляд (17).

З умов закріплення пластин (7) витікає частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань двошарової рідини та пружних основ:

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=1}^4 \right| = 0, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned}
 C_{1,k} &= \mathfrak{L}_{1k1}^0 + \alpha_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathfrak{L}_{11}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \mathfrak{L}_{1n1}, \\
 C_{1,k+2} &= \alpha_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathfrak{L}_{11}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \mathfrak{L}_{1n1}, \\
 C_{2,k} &= \mathfrak{L}_{1k2}^0 + \alpha_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathfrak{L}_{12}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \mathfrak{L}_{1n2}, \\
 C_{2,k+2} &= \alpha_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathfrak{L}_{12}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \mathfrak{L}_{1n2}, \\
 C_{3,k} &= \beta_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathfrak{L}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \mathfrak{L}_{2n1}, \\
 C_{3,k+2} &= \mathfrak{L}_{2k1}^0 + \beta_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathfrak{L}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \mathfrak{L}_{2n1}, \\
 C_{4,k} &= \beta_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathfrak{L}_{22}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \mathfrak{L}_{2n2}, \\
 C_{4,k+2} &= \mathfrak{L}_{2k2}^0 + \beta_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathfrak{L}_{22}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \mathfrak{L}_{2n2} \quad (k = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Тут

$$\mathfrak{L}_{ikp}^0 = (\mathfrak{L}_{ip} [w_{ik}^0])|_{\gamma}, \quad \mathfrak{L}_{inp} = (\mathfrak{L}_{ip} [\psi_n])|_{\gamma}, \quad \mathfrak{L}_{ip}^0 = (\mathfrak{L}_{ip} [1])|_{\gamma}.$$

Частотний спектр сумісних симетричних коливань буде складатися з двох наборів частот, що відповідають коливанням пружних основ, і додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого.

У статті [1] було отримано у вигляді визначника п'ятого порядку рівняння, аналогічне рівнянню (18). Якщо привести визначник п'ятого порядку до визначника четвертого порядку, то ці рівняння збігаються. Слід зазначити, що рівняння роботи [1] мало особливість при збігу масових характеристик пластин ( $k_{01} = k_{02}$ ). У рівнянні (18) цю особливість було усунуто.

Випишемо оператори  $\mathfrak{L}_{ip}$  і значення функцій  $\mathfrak{L}_{inp}$ ,  $\mathfrak{L}_{ip}^0$  для різних способів закріплення пружних пластин, а саме закріпленого, опертого та вільного контурів [14]: у випадку закріпленого контуру

$$\mathfrak{L}_{i1} \equiv 1, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{in1} = 1, \quad \mathfrak{L}_{in2} = 0, \quad \mathfrak{L}_{i1}^0 = 1, \quad \mathfrak{L}_{i2}^0 = 0,$$

у випадку опертого контуру

$$\mathfrak{L}_{i1} \equiv 1, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\nu_i}{r} \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{in1} = 1, \quad \mathfrak{L}_{in2} = -\frac{\xi_n^2}{a^2}, \quad \mathfrak{L}_{i1}^0 = 1, \quad \mathfrak{L}_{i2}^0 = 0,$$

у випадку вільного контуру

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{i1} &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\nu_i}{r} \frac{d}{dr}, & \mathfrak{L}_{i2} &= \frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}, \\ \mathfrak{L}_{in1} &= -\frac{\xi_n^2}{a^2}, & \mathfrak{L}_{in2} &= 0, & \mathfrak{L}_{i1}^0 &= 0, & \mathfrak{L}_{i2}^0 &= 0, \end{aligned}$$

де  $\nu_i$  – коефіцієнт Пуасона матеріалу  $i$ -ої пластини.

У випадку невагомості ( $g = 0$ ) частотне рівняння (18) за однакових умов закріплення верхньої та нижньої пластин буде симетричне відносно індексів 1 і 2, що має фізичне обґрунтування і підтверджує правильність виведених рівнянь.

Якщо нижня або верхня пластина стає абсолютно жорсткою, то відповідно  $w_2 \equiv 0$  ( $\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$ ) або  $w_1 \equiv 0$  ( $\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$ ). Переходячи до границі в рівняннях (13) при  $T_2 \rightarrow \infty$  або  $T_1 \rightarrow \infty$ , відповідно отримаємо  $a_{21n} \rightarrow 0$ ,  $a_{22n} \rightarrow 0$  або  $a_{11n} \rightarrow 0$ ,  $a_{12n} \rightarrow 0$ .

Рівняння симетричних коливань (18) при  $T_2 = \infty$  мають вигляд:

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=1,2}^{1,2} \right| = 0, \quad (20)$$

а при  $T_1 = \infty$  –

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=3,4}^{3,4} \right| = 0. \quad (21)$$

У випадку симетричних коливань в коефіцієнтах (19) слід покласти  $\alpha_1 = -1$  при  $T_2 = \infty$  та  $\beta_2 = -1$  при  $T_1 = \infty$ . Це впливає із значень цих коефіцієнтів у формулах (17) відповідно при  $k_{02} = \infty$  та  $k_{01} = \infty$ .

Рівняння (20) збігається з аналогічним рівнянням роботи [13].

У випадку відсутності верхньої пластини та виродження нижньої пластини в мембрану, з визначника рівняння (18) необхідно викреслити перший, другий і четвертий рядки та перший, другий і четвертий стовпці:

$$\mathfrak{L}_{211}^0 + \beta_2 \tilde{w}_{21}^0 \mathfrak{L}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 \mathfrak{L}_{2n1} = 0. \quad (22)$$

Частотний спектр рівняння (22) буде складатися з трьох наборів частот, що відповідають коливанням вільної поверхні рідини та пружного дна і коливанням стовпа рідини як одного цілого. Це можна побачити з рівняння (22), у випадку закріпленого контуру, вже при  $n = 1$ . З урахуванням одного члена ряду воно зводиться до рівняння третього ступеня відносно  $\omega^2$ .

#### Цитированная литература

1. Кононов Ю.Н., Русаков В.Ф., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 105–114.



2. Кононов Ю.Н., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запорізь. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 103–115.
3. Кононов Ю.М., Шевченко В.П., Джуха Ю.О. Осесимметричні коливання пружних кільцевих основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 85–95.
4. Кононов Ю.М., Шевченко В.П., Джуха Ю.О. Поздовжні коливання в невагомості ідеальної рідини, що знаходиться в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з пружними основами // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2016. – № 1–2. – С. 129–138.
5. Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2015. – № 1–2. – С. 116–125.
6. Кононов Ю.Н., Джуха Ю.А. Влияние перегрузки на осесимметричные колебания круговой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости в цилиндрическом резервуаре // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 32–41.
7. Bauer H.F., Chang S., Wang J.T.S. Nonlinear liquid motion in a longitudinally excited container with elastic bottom // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9, No. 12. – P. 2333–2339.
8. Chiba M. Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: Linear axisymmetric vibration analysis // Journal of Fluids and Structures. – 1993. – Vol. 7, No. 1. – P. 57–73.
9. Chiba M. Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation // Journal of Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 169, No. 3. – P. 387–394.
10. Bauer H.F. Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 180, No. 5. – P. 689–704.
11. Jeong K.-H. Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 260, No. 4. – P. 653–670.
12. Джуха Ю.О. Статичний прогин пружних основ жорсткого кільцевого циліндричного резервуара з рідиною // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. «Механіка неоднорідних структур». – 2017. – № 2 (21). – С. 44–54.
13. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – Москва: Машиностроение, 1987. – 232 с.
14. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – Москва: Машиностроение, 1970. – 736 с.

## References

1. Kononov, Yu.N., Rusakov, V.F., Dzhukha, Yu.A. (2015). Axial-symmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in a rigid cylindrical tank. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical & mathematical Sciences*, 2, 105-114 (in Russian).
2. Kononov, Yu.N., Dzhukha, Yu.A. (2016). Axisymmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in a rigid annular cylindrical tank. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical & mathematical Sciences*, 1, 103-115 (in Russian).
3. Kononov, Yu.M., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Yu.O. (2017). Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir. *Mathematical methods and physicommechanical fields*, 60(1), 85-95 (in Ukrainian).
4. Kononov, Yu.M., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Yu.O. (2016). Longitudinal oscillations in zero gravity of an ideal liquid located in a rigid circular cylindrical reservoir with elastic bases. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 1-2, 129-138 (in Ukrainian).
5. Kononov, Yu.N., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Yu.A. (2015). Axisymmetric vibrations of a two-layer ideal liquid with a free surface in a rigid circular cylindrical tank with elastic bottom. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 1-2, 116-125 (in Russian).
6. Kononov, Yu.N., Dzhukha, Yu.A. (2017). Influence of overload on axisymmetric oscillations of a

- circular membrane located on a free surface of the liquid in a cylindrical reservoir. *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU*, 14(2), 32-41 (in Russian).
7. Bauer, H.F., Chang, S., Wang, J.T.S. (1971). Nonlinear liquid motion in a longitudinally excited container with elastic bottom. *AIAA Journal*, 9(12), 2333-2339.
  8. Chiba, M. (1993). Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: Linear axisymmetric vibration analysis. *Journal of Fluids and Structures*, 7(1), 57-73.
  9. Chiba, M. (1994). Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3), 387-394.
  10. Bauer, H.F. (1995). Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover. *Journal of Sound and Vibration*, 180(5), 689-704.
  11. Jeong, K.-H. (2003). Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 260(4), 653-670.
  12. Dzhukha, Yu.O. (2017). Static deflection of elastic bases in an annular cylindrical container with a liquid. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics*, 21(2), 44-54 (in Ukrainian).
  13. Dokuchaev, L.V. (1987). *Nonlinear dynamics of aircrafts with deformable elements*. Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
  14. Filippov, A.P. (1970). *Oscillations of deformable systems*. Moscow: Mashinostroenie (in Russian).

**Yu.M. Kononov, Yu.O. Dzhukha**

**On the simplification of a frequency equation of the natural axially symmetric oscillations of a perfect liquid in a rigid cylindrical reservoir with elastic bases.**

We have simplified the previously received frequency equation of the natural axially symmetric oscillations of a heavy perfect incompressible liquid in a rigid cylindrical reservoir with elastic bases in the form of thin circular plates. The singularity in the frequency equation in the case of the coincidence of mass characteristics of the plates was removed. We have considered arbitrary methods of fixing the contours of the plates and different limiting cases: the degeneration of plates into membranes, absolutely rigid plates, the absence of upper plate (free surface on the liquid), and the case of zero gravity. It has been shown that the frequency spectrum of the coupled axially symmetric oscillations of elastic bases and the ideal liquid consists of two sets of frequencies, corresponding to oscillations of the upper and lower elastic bases, and additional oscillation frequency of a liquid column as a whole.

**Keywords:** *hydroelasticity, circular elastic plates, ideal incompressible liquid, axially symmetric oscillations.*

**Ю.Н. Кононов, Ю.А. Джуха**

**Про упрощение частотного уравнения собственных осесимметричных колебаний идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями.**

Проведено упрощение ранее полученного частотного уравнения собственных осесимметричных колебаний тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями в виде тонких круговых пластин. Устранена особенность в частотном уравнении при совпадении массовых характеристик пластин. Рассмотрены произвольные способы закрепления контуров пластин и различные предельные случаи вырождения пластин в мембраны и абсолютно жесткие, случай отсутствия верхней пластины (жидкость со свободной поверхностью), а также случай невесомости. Показано, что частотный спектр совместных осесимметричных колебаний упругих оснований и идеальной жидкости состоит из двух наборов

*Про спрощення рівняння коливань рідини в резервуарі з пружними основами*

частот, соответствующих колебаниям верхнего и нижнего упругих оснований, и дополнительной частоты колебаний столба жидкости как одного целого.

**Ключевые слова:** *гидроупругость, круговые упругие пластины, идеальная несжимаемая жидкость, осесимметричные колебания.*

*Донецький національний університет імені Василя Стуса,  
Вінниця  
koponov.yuriy.nikitovich@gmail.com,  
yu.djykha@donpu.edu.ua*

*Отримано 10.12.18*