УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-10

©2018. **О.А. Новиков, О.Г. Ровенская**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УКЛОНЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Работа касается вопросов приближения в равномерной метрике периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье. Рассматриваются классы $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных, которые позволяют по-отдельности учитывать свойства обычных и смешанных частных производных, и задающиеся по аналогии с классами $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций одной переменной. Получены интегральные представления прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных. Полученные формулы могут быть полезными для дальнейшего исследования аппроксимативных свойств различных линейных прямоугольных методов на классах $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных с целью получения решения соответствующих задач Колмогорова–Никольского.

MSC: 42A10.

Ключевые слова: *обобщенная производная, классы дифференцируемых функций, линейные прямоугольные методы.*

1. Введение.

Наиболее простым и естественным примером линейного процесса аппроксимации непрерывных периодических функций действительной переменной может служить приближение этих функций элементами последовательностей частичных сумм ряда Фурье. Вместе с тем, значительное число работ этого напрвления посвящено изучению аппроксимативных свойств других методов приближения, которые для функции f порождаются некоторыми преобразованиями частичных сумм ее ряда Фурье. Методы исследования интегральных представлений уклонений приближающих полиномов на классах периодических функций действительной переменной возникли и получили свое развитие благодаря работам С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, С. А. Теляковского, А. И. Степанца и др. В работах [1, 2] можно найти библиографию по вопросам этой тематики.

В тоже время вопросы приближения классов периодических дифференцируемых функций многих переменных изучены в меньшей степени. Формулы для интегральных представлений уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах периодических дифференцируемых функций многих переменных были опубликованы в работах [3, 4] без доказательств, а также в некоторых других малодоступных источниках. Данная работа посвящена доказательству упомянутых формул, которые приводятся здесь с некоторыми изменениями и дополнениями, необходимыми для дальнейшего изложения.

Классы $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных будем определять следуя работе [3] (также [4]). Пусть R^m — евклидово пространство с елементами $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ — m-мерный куб с ребром 2π. Введем обозначения подмножеств из R^m элементов с целочисленными компонентами:

$$N^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\mathbb{N},\ \ i=1,2,\dots,m\right\},$$

$$N_*^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in N_*=\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ i=1,2,\dots,m\right\},$$

$$N_i^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\mathbb{N},\ \ x_j\in N_*,\ \ i\neq j\right\},$$

$$E^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\{0;1\},\ \ i=1,2,\dots,m\right\}.$$

Пусть $L(T^m)$ — множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на T^m функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ и $f\in L(T^m)$. Каждой паре элементов $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ можно поставить в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\,dx_i.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ являются коэффициентами Фурье функции $f\in L(T^m)$ [6].

Каждому вектору $\vec{k}\in N_*^m$ соответствует основная гармоника функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)$$

и гармоники, сопряженные по переменным x_i, $i=1,2...,m$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{j\in\overline{m}\setminus\{i\}}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)\cos\left(k_ix_i-\frac{(s_i+1)\pi}{2}\right).$$

Ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определяется следующим соотношением [6]

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

в котором $q(\vec{k})$ — количество нулевых компонент вектора $\vec{k}$.

Пусть $f\in L(T^m)$, $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2$ — фиксированные наборы систем чисел, $k\in N_*$,

$$\overline{\psi}_i(k)=\sqrt{\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)},\quad \overline{\Psi}_i(k)=\sqrt{\Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)}$$

и выполнены условия $\overline{\psi}_i(k) \neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Если ряд

$$\sum_{\vec{k} \in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_i^2(k_i)} \left[\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f; \vec{x}) \right]$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi(\vec{x}) \in L(T^m)$, то эта функция обозначается символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и называется $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$. Для фиксированного r-элементного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu(r) = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, называется функция $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{i_r}} \partial^{\overline{\Psi}_{i_{r-1}}} \ldots \partial^{\overline{\Psi}_{i_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}.$$

Множество непрерывных функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любого $\mu \subseteq \overline{m}$ существуют $\overline{\Psi}_\mu$-производные, обозначается символом $C^{m\overline{\psi}}$.

Классы $\overline{\psi}$–дифференцируемых функций при $m = 1$ впервые были рассмотрены в работах А.И. Степанца (см., напр., [1, 2]), а при $m > 1$ — в работах Р.А. Ласурии [7] (также [6]). В одномерном случае при соответствующем выборе параметров, классы $C^{m\overline{\psi}}$ совпадают с известными классами Вейля, классами Соболева W_p^l, классами сверток с фиксированными ядрами.

Прямоугольные линейные средние рядов Фурье определяются следующим образом. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m\}$ — фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda_0^{(n_i)} = 1$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ при $k_i \geq n_i$. Обозначим $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Каждой функции $f \in L(T^m)$ можно поставить в соответствие многочлен

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}).$$

При условии $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} \equiv 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, полиномы $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$ являются прямоугольными суммами Фурье $S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ порядка $\vec{n}$.

Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \leq n_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Если элементы $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_i \leq n_i - p_i - 1, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leq k_i \leq n_i - 1, \ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

то полиномы $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ называются прямоугольными суммами Валле Пуссена и обозначаются $V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})$.

В виде полиномов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ также задаются прямоугольные методы Фавара ($\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \frac{k_i\pi}{2n_i}\mathrm{ctg}\frac{k_i\pi}{2n_i}$, $i = 1, 2, ..., m$), Рогозинского ($\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \cos\frac{k_i\pi}{2n_i}$, $i = 1, 2, ..., m$) и др.

Величины

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$$

определяют уклонения прямоугольных линейных средних рядов Фурье от функции $f \in L(T^m)$.

Интегральные представления для величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ в одномерном случае были получены А.И. Степанцом (см., напр., [2]). В настоящей работе доказаны формулы для интегральных представлений величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ при произвольном $m \geq 1$.

2. Результат.

Для $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2$ обозначим

$$\tau_{k,j}^{(n_i)} = \begin{cases} (1 - \lambda_k^{(n_i)})\psi_{ij}(k), & 1 \leq k \leq n_i, \\ \psi_{ij}(k), & k \geq n_i, \end{cases} \tag{1}$$

$$T_{k,j}^{(n_i)} = \begin{cases} (1 - \lambda_k^{(n_i)})\Psi_{ij}(k), & 1 \leq k \leq n_i, \\ \Psi_{ij}(k), & k \geq n_i., \end{cases} \tag{2}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть системы чисел* $\tau_{k,j}^{(n_i)}$, $T_{k,j}^{(n_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2$ *определены соотношениями* (1), (2) *и удовлетворяют условиям*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i - \frac{j-1}{2}\pi\right) < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i - \frac{j-1}{2}\pi\right) < \infty. \tag{4}$$

Тогда для любой функции $f \in C^{m\overline{\psi}}$ *во всех точках* $\vec{x} \in T^m$ *имеет место равенство*

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x} - t_i\vec{e}_i\right) \sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\right) dt_i +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\Bigl(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)} t_j\vec{e}_j\Bigr) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)} \cos\nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)} \sin\nu_j t_j\right) dt_j. \tag{5}$$

Доказательство.
Имеем

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=f(\vec{x})-\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=$$

$$=f(\vec{x})-\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Тогда

$$S[\delta_{\vec{n}}]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).\tag{6}$$

Используя метод математической индукции можно показать, что имеет место равенство

$$1-\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(i)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big).$$

Учитывая это соотношение и (6), имеем

$$S[\delta_{\vec{n}}]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(i)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big)\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in N_i^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\big(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\big)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\sum_{\vec{k}\in N_\mu^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\prod_{j\in\mu(i)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})\stackrel{df}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}S_i(f;\vec{x})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}S_\mu(f;\vec{x}).\tag{7}$$

Далее воспользуемся схемой доказательства, предложенной в работе [1, с. 53–54]. Рассмотрим функции

$$\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\big(\vec{x}-t_i\vec{e}_i\big)\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i+\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\big)\,dt_i,$$

$$\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})=\frac{1}{\pi^r}\int_{T^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\Big(\vec{x}-\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\Big)\times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \big(T_{\nu_j,1}^{(n_j)} \cos\nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)} \sin\nu_j t_j\big)\, dt_j.$$

Найдем коэффициенты Фурье этих функций. На основании (3) в следующем интеграле можно изменить порядок интегрирования

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}\big(\vec{x} - t_i\vec{e}_i\big) \sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\big)\, dt_i \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i +$$

$$+\tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\big) \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big) \cos\Big(k_i\big(x_i + t_i\big) - \frac{s_i\pi}{2}\Big)\, dx_i\, dt_i =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\big) \times$$

$$\times \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big) \times$$

$$\times \bigg(\cos\Big(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\Big) \cos k_i t_i - \sin\Big(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\Big) \sin k_i t_i\bigg)\, dx_j\, dx_i\, dt_i =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \prod_{j=1}^{m} \cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j \times$$

$$\times \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\big) \cos k_i t_i\, dt_i -$$

$$- \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j \sin\Big(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\Big) \times$$

$$\times \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\big) \sin k_i t_i\, dt_i.$$

На основании определения величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$ имеем

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\Big(f^{\overline{\psi}_i}\Big) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \prod_{j=1}^{m} \cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j,$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \cos\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right) dx_j \times$$

$$\times \cos\left(k_i x_i - \frac{(s_i + (-1)^{s_i})\pi}{2}\right) dx_i = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) \times$$

$$\times \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \cos\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right) dx_j (-1)^{s_i} \sin\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right) dx_i.$$

Тогда

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right) = a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i \cos k_i t_i \, dt_i + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i \cos kt_i \, dt_i \right] -$$

$$-(-1)^{s_i} a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i \sin k_i t_i \, dt_i + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i \sin k_i t_i \, dt_i \right]. \tag{8}$$

Воспользуемся формулами

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i + \frac{j-1}{2}\pi\right) \cos\left(k_i t_i + \frac{j-1}{2}\pi\right) dt_i = \tau_{k_i,j}^{(n_i)}, \tag{9}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i + \frac{j-1}{2}\pi\right) \sin\left(k_i t_i + \frac{j-1}{2}\pi\right) dt_i = 0, \ j = 1, 2. \tag{10}$$

Объединяя соотношения (8)–(10), имеем

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right) = a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\tau_{k_i,1}^{(n_i)} + (-1)^{s_i} a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\tau_{k_i,2}^{(n_i)} =$$

$$= \left(1 - \lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)\left(\psi_{i1}(k_i) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right) + (-1)^{s_i}\psi_{i2}(k_i) a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i})\right) =$$

$$= \left(1 - \lambda_{k_i}^{(n_i)}\right) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f), \quad \vec{s} \in E^m, \quad \vec{k} \in N_i^m, \tag{11}$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right) = 0, \quad \vec{s} \in E^m, \quad k_i = 0.$$

На основании равенства (11) делаем вывод о том, что

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right] = \sum_{\vec{k}\in N_i} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = S_i(f;\vec{x}). \tag{12}$$

Аналогично найдем коэффициенты Фурье функции $\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, $\mu(r)\subset\overline{m}$.

На основании (4) можем изменить порядок интегрирования в следующем интеграле

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}-\sum_{i\in\mu(r)} t_i\vec{e}_i\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\right)dt_j\prod_{p=1}^{m}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)\,dx_p =$$

$$=\int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu(r)}\cos\left(k_i(x_i+t_i)-\frac{s_i\pi}{2}\right)\prod_{p=1}^{m}dx_p\frac{1}{\pi^r}\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j +\right.$$

$$\left.+T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\right)dt_j = \int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu(r)}\left(\cos\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\cos k_i t_i - \sin\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\sin k_i t_i\right)\prod_{p=1}^{m}dx_p\times$$

$$\times\frac{1}{\pi^r}\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\right)dt_j.$$

Поскольку

$$\prod_{j\in\mu(r)}(a_j-b_j) = \sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\prod_{p\in\mu(r)\setminus\varsigma} a_p\prod_{j\in\varsigma}(-b_j),$$

то

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\left(\prod_{p\in\mu(r)\setminus\varsigma}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)\cos k_p x_p\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i\in\varsigma}\left(-\sin\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\sin k_i t_i\right)\right)\prod_{p=1}^{m}dx_p\times$$

$$\times \frac{1}{\pi^r} \prod_{j \in \mu(r)} \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)} \cos \nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)} \sin \nu_j t_j\right) dt_j =$$

$$= \sum_{\varsigma \subset \mu(r)} \left[\int\limits_{T^r} \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) \prod_{p \in \overline{m} \setminus \varsigma} \cos \left(k_p x_p - \frac{s_p \pi}{2}\right) dx_p \times \right.$$

$$\times \prod_{i \in \varsigma} \sin \left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i \times$$

$$\times \frac{1}{\pi^r} \prod_{j \in \mu(r) \setminus \varsigma} \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)} \cos \nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)} \sin \nu_j t_j\right) dt_j \times$$

$$\left. \times \cos k_j t_j \prod_{\gamma \in \varsigma} \sum_{\nu_\gamma=0}^{\infty} (T_{\nu_\gamma,1}^{(n_\gamma)} \cos \nu_\gamma t_\gamma + T_{\nu_\gamma,2}^{(n_\gamma)} \sin \nu_\gamma t_\gamma) \sin k_\gamma t_\gamma \, dt_\gamma (-1)^{|\varsigma|} \right].$$

Используя определение, имеем для $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, $\varsigma \subset \mu(r)$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s} + \sum\limits_{p \in \varsigma} (-1)^{s_p} \vec{e}_p} \left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{\sum\limits_{p \in \varsigma} s_p}}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) \prod_{p \in \overline{m} \setminus \varsigma} \cos \left(k_p x_p - \frac{s_p \pi}{2}\right) dx_p \times$$

$$\times \prod_{i \in \varsigma} \sin \left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i, \quad \vec{k} \in N_\mu^m,$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s} + \sum\limits_{p \in \varsigma} (-1)^{s_p} \vec{e}_p} \left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = 0, \quad \vec{k} \in N_*^m \setminus N_\mu^m.$$

Объединяя равенства (9), (10) получим

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}} \left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \sum_{\varsigma \subset \mu(r)} (-1)^{\sum\limits_{p \in \varsigma} s_p} a_{\vec{k}}^{\vec{s} + \sum\limits_{p \in \varsigma} (-1)^{s_p} \vec{e}_p} \left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) \times$$

$$\times \prod_{j \in \mu(r) \setminus \varsigma} T_{k_j,1}^{(n_j)} \prod_{\gamma \in \varsigma} T_{k_\gamma,2}^{(n_\gamma)}, \quad \vec{k} \in N_\mu^m,$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}} \left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = 0, \quad \vec{k} \in N_*^m \setminus N_\mu^m.$$

Поскольку

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \sum_{\varsigma \subset \mu(r)} \prod_{i \in \mu(r) \setminus \varsigma} \Psi_{i1}(k_i) \prod_{j \in \varsigma} (-\Psi_{j2}(k_j)) (-1)^{\sum\limits_{\nu \in \varsigma} s_\nu} a_{\vec{k}}^{\vec{s} + \sum\limits_{\nu \in \varsigma} (-1)^{s_\nu} \vec{e}_\nu} \left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right),$$

то для $\vec{k} \in N_\mu^m$, $\vec{s} \in E^m$ имеет место

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \prod_{j\in\mu(r)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big) \sum_{\varsigma\subset\mu(r)} \prod_{j\in\mu(r)\setminus\varsigma} \Psi_{j,1}(k_j) \prod_{\gamma\in\varsigma} \Psi_{\gamma,2}(k_\gamma)\times$$

$$\times(-1)^{\sum\limits_{p\in\varsigma} s_p} a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{p\in\varsigma}(-1)^{s_p}\vec{e}_p}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) = \prod_{j\in\mu(r)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f).$$

Значит

$$A_{\vec{k}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}, \vec{x}\right) = \prod_{j\in\mu(r)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \quad \vec{k}\in N_\mu^m.$$

Таким образом, с учетом (7) получаем

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right] = \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(k)}} \prod_{j\in\mu(r)}\big(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\big) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = S_\mu(f;\vec{x}). \tag{13}$$

На основании соотношений (7), (12), (13), получим

$$S\left[\delta_{\vec{n}}\right] = \sum_{i=1}^m S\left[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right] + \sum_{i=2}^m (-1)^{i+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right] =$$

$$= S\left[\sum_{i=1}^m \mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f,\vec{x}) + \sum_{i=2}^m (-1)^{i+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f,\vec{x})\right].$$

Отсюда для любой функции $f \in C^{m\overline{\psi}}$ выполняется равенство

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{i=1}^m \mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^m (-1)^{i+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f;\vec{x}),$$

которое с учетом определения функций $\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, $\mu(r) \subset \overline{m}$ совпадает с равенством (5). Теорема доказана. □

Формула (5) может быть полезной для изучения асимптотического поведения верхних граней уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье, на классах дифференцируемых периодических функций многих переменных, позволяющих по отдельности учитывать свойства частных и смешанных $\overline{\psi}$-производных.

Цитированная литература

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – К. : Наук. думка, 1987.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений В 2 ч. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002.

3. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 564–570.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г. [и др.]* Приближение периодических функций высокой гладкости многих переменных прямоугольными суммами Фурье // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2008. – Т. 16.– С. 163–170.
5. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций : Сб. научн. тр. – К. : Ин-т математики, 1985. – С. 16–28.
6. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 4. – С. 545–555.
7. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 7. – С. 911–918.

References

1. Stepanets, A.I. (1953). *Classification and approximation of periodic functions.* Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
2. Stepanets, A.I. (2002). *Methods of theory of approximation.* Kyiv: Ins-t Mat. NAN Ukrainu (in Russian).
3. Rukasov, V.I., Novikov, O.A., Bodraya, V.I. (2005). Approximation of classes of ψ-integrals of periodic functions of many variables by rectangular linear means of Fourier series. *Ukr. Mat. J., 57*(4), 564-570 (in Russian).
4. Rukasov, V.I., Novikov, O.A., Rovenska, O.G. et al (2008). Approximation of periodic functions of high smoothness of many variables by rectangular Fourier sums. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 16*, 163-170 (in Russian).
5. Zaderey, P.V. (1985). Integral presentation of deviations of linear means of Fourier series on classes of differentiable periodic functions of two variables. In *Some questions of theory of approximation of functions (pp. 16-28).* Kyiv: Ins-t Mat., (in Russian).
6. Stepanets, A.I., Pachulia, N.L. (1991). Multiple Fourier sums on the sets of (ψ, β)-differentiable functions. *Ukr. Mat. J., 43*(4), 545-555 (in Russian).
7. Lasuria, R.A. (2003). Multiple Fourier sums on the sets of $\overline{\psi}$-differentiable functions. *Ukr. Mat. J., 55*(7), 911-918 (in Russian).

O.O. Novikov, O.G. Rovenska

Integral presentation of deviations of rectangular linear means of Fourier series on classes of periodic differentiable functions.

The paper deals with the problems of approximation in a uniform metric of periodic functions of many variables by trigonometric polynomials, which are generated by linear methods of summation of Fourier series. Questions of asymptotic behavior of the upper bounds of deviations of linear operators generated by the use of linear methods of summation of Fourier series on the classes of periodic differentiable functions are studied in many works. Methods of investigation of integral representations of deviations of polynomials on the classes of periodic differentiable functions of real variable originated and received its development through the works of S.M. Nikol'skii, S.B. Stechkin, N.P.Korneichuk, V.K. Dzadik, A.I. Stepanets, etc. Along with the study of approximation by linear methods of classes of functions of one variable, are studied similar problems of approximation by linear methods of classes of functions of many variables. In addition to the approximative properties of rectangular Fourier sums, are studied approximative properties of other approximation methods: the rectangular sums of

Valle Poussin, Zigmund, Rogozinsky, Favar. In this paper we consider the classes of $\overline{\psi}$–differentiable periodic functions of many variables, allowing separately to take into account the properties of partial and mixed $\overline{\psi}$–derivatives, and given by analogy with the classes of $\overline{\psi}$–differentiable periodic functions of one variable. Integral representations of rectangular linear means of Fourier series on classes of $\overline{\psi}$–differentiable periodic functions of many variables are obtained. The obtained formulas can be useful for further investigation of the approximative properties of various linear rectangular methods on the classes $\overline{\psi}$-differentiable periodic functions of many variables in order to obtain a solution to the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problems.

Keywords: *generalized derivative, classes of differentiable functions, linear rectangular methods.*

О.О. Новіков, О.Г. Ровенська

Інтегральні представлення відхилень прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є на класах періодичних диференційовних функцій.

Робота стосується питань наближення у рівномірній метриці періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами, що породжуються прямокутними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Вивчаються класи $\overline{\psi}$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних, що дозволяють окремо враховувати властивості звичайних та мішаних частинних похідних, і які визначаються подібно до класів $\overline{\psi}$–диференційовних функцій однієї змінної. Одержано інтегральні представлення прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є на класах $\overline{\psi}$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних. Одержані формули можуть бути корисними для подальших досліджень апроксимативних властивостей різних лінійних прямокутних методів на класах $\overline{\psi}$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних з метою одержання розв'язку відповідних задач Колмогорова–Нікольського.

Ключові слова: *узагальнена похідна, класи диференційовних функцій, лінійні прямокутні методи.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск
`rovenskaya.olga.math@gmail.com`

Получено 21.09.18