УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-12

©2018. **Е.А. Севостьянов, С.А. Скворцов**

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрен некоторый класс гомеоморфизмов областей евклидового пространства, более общих, чем пространственные квазиконформные отображения. Для указанных гомеоморфизмов получены теоремы о локальном поведении соответствующих им обратных отображений в заданной области. В частности, доказано, что семейства отображений, обратные к которым удовлетворяют неравенству типа Полецкого, равностепенно непрерывны в заданной области, если мажоранта, относящаяся к этому неравенству, интегрируема.

MSC: 30C65.

Ключевые слова: *квазиконформные отображения, модули семейств кривых.*

1. Введение.

Настоящая статья посвящена изучению отображений, обратные к которым удовлетворяют неравенству типа Полецкого, см. соотношение (8.5) в [1], см. также [2–6]. Изучение таких отображений в случае, когда функция Q_1 в (8.5) ограничена, бессодержательно: если f удовлетворяет (8.5) при $Q_1(x)\leqslant K\equiv const$, то тогда f – квазиконформно; в то же время, f^{-1} также квазиконформно по следствию 13.3 в [2]. Значит, мы не выходим за пределы изучаемого класса при переходе к обратному отображению и их отдельное исследование смысла не имеет. Ситуация существенно изменится, если мы рассмотрим некоторый более общий класс гомеоморфизмов. В качестве примера, рассмотрим последовательность $f_m:{\mathbb B}^n\rightarrow B(0, 2)$, определённую следующим образом:

$$f_m(x)\,=\,\left\{\begin{array}{rr} \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|}\cdot x\,, & 1/m\leqslant|x|\leqslant 1, \\ \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)}\cdot x\,, & 0<|x|< 1/m \ , \end{array} \right.$$

В этом случае, можно положить $Q_1(x)=\left(\frac{1+|x|^{\,\alpha}}{\alpha|x|^{\,\alpha}}\right)^{n-1}\in L^1({\mathbb B}^n)$ (см. рассуждения из предложения 6.3 в [1]). Нетрудно убедиться, что

$$g_m(y):=f_m^{\,-1}(y)\,=\,\left\{\begin{array}{rr} \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}\,, & 1+1/m^{\alpha}\leqslant|y|< 2, \\ \frac{(1/m)}{1+(1/m)^{\alpha}}\cdot y\,, & 0<|y|< 1+1/m^{\alpha} \ . \end{array} \right.$$

Можно показать, что Q_1, соответствующая отображениям g_m, имеет вид

$$Q_1(y)=\left\{\begin{array}{rr} \frac{|y|}{\alpha(|y|-1)}\,, & 1+1/m^{\alpha}\leqslant|y|<2, \\ 1\,, & 0<|y|<1+1/m^{\alpha}\,. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Нетрудно также проверить, что функция Q_1 в (1) не интегрируема в $B(0,2)$, и что какой-либо другой интегрируемой функции Q_1, которая также подходила бы к отображениям g_m в смысле соотношения (8.5) из [1], не существует.

Исследования, проведённые ниже, касаются локального поведения отображений, обратные к которым удовлетворяют условию (8.5) из [1], где Q_1 – интегрируемая функция. Основные определения и обозначения, используемые ниже, могут быть найдены в монографиях [1] и [2], и потому опускаются. Пусть M обозначает модуль семейств кривых (см. [2]), а $dm(x)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, задано отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, и оно удовлетворяет неравенству вида

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{D} Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \quad \forall\, \rho \in \operatorname{adm} \Gamma \tag{2}$$

где $Q : D \to [1, \infty]$ – некоторая (заданная) фиксированная функция (см., напр., [3]). Напомним, что $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ в том и только том случае, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1 \quad \forall\, \gamma \in \Gamma\,.$$

В частности, все конформные и квазиконформные отображения удовлетворяют неравенству (2), где функция Q будет равна 1 или некоторой постоянной, соответственно (см., напр., теоремы 4.6 и 6.10 в [4]).

Пусть E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. В дальнейшем всюду символом $\Gamma(E, F, D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,\, b)$. Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно. Область D локально связна на ∂D, если D локально связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$. Граница области D называется *слабо плоской* в точке $x_0 \in \partial D$, если для каждого $P > 0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset U$ этой же точки такая, что $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D$, пересекающих ∂U и ∂V. Граница области D называется слабо плоской, если соответствующее свойство выполнено в каждой точке границы D.

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ семейство всех отображений $g : D' \to D$ таких, что $f = g^{-1}$ – гомеоморфизм области D на D' с условием (2). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ – компакты в $\mathbb{R}^n$. Если $Q \in L^1(D)$, то семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ равностепенно непрерывно в D'.*

2. Вспомогательные сведения.

Как обычно, для кривой $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ полагаем:

$$|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a,b] : \gamma(t) = x\}\,,$$

при этом, $|\gamma|$ называется *носителем (образом)* γ.

Следующая лемма содержит в себе утверждение о том, что всякие внутренние точки произвольной области являются слабо плоскими.

Лемма 1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $x_0 \in D$. Тогда для каждого $P > 0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset U$ этой же точки такая, что $M(\Gamma(E,F,D)) > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D$, пересекающих ∂U и ∂V.*

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)} \subset D \cap U$. Пусть c_n – положительная постоянная, определённая в соотношении (10.11) в [2], а число $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ настолько мало, что $c_n \cdot \log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. Положим $V := B(x_0,\varepsilon)$. Пусть E, F – произвольные континуумы, пересекающие ∂U и ∂V, тогда также E и F пересекают $S(x_0,\varepsilon_0)$ и ∂V (см. теорему 1.I.5.46 в [7]). Необходимое заключение вытекает на основании разд. 10.12 в [2], поскольку $M(\Gamma(E,F,D)) \geqslant c_n \cdot \log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. $\Box$

3. Доказательство теоремы 1.

Проведём доказательство теоремы 1 от противного. Предположим, что семейство $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $y_0 \in D'$, другими словами, найдутся $y_0 \in D'$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует элемент $y_m \in D'$, $|y_m - y_0| < 1/m$, и гомеоморфизм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D,D')$, для которых

$$|g_m(y_m) - g_m(y_0)| \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{3}$$

Проведём через точки $g_m(y_m)$ и $g_m(y_0)$ прямую $r = r_m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $-\infty < t < \infty$ (см. рисунок 1). Заметим, что указанная прямая $r = r_m(t)$ при $t \geqslant 1$ обязана пересекать область D ввиду теоремы 1.I.5.46 в [7], поскольку область D ограничена; таким образом, существует $t_1^m \geqslant 1$ такое, что $r_m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$. Не ограничивая общности, можно считать, что $r_m(t) \in D$ при всех $t \in [1, t_1^m)$, тогда отрезок $\gamma_1^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [1, t_1^m]$, принадлежит D при всех $t \in [1, t_1^m)$, $\gamma_1^m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$ и $\gamma_1^m(1) = g_m(y_m)$. Ввиду аналогичных соображений, найдутся $t_2^m < 0$ и отрезок $\gamma_2^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [t_2^m, 0]$, такие, что $\gamma_2^m(t_2^m) = x_2^m \in \partial D$, $\gamma_2^m(0) = g_m(y_0)$ и $\gamma_2^m(t)$ принадлежит D при всех $t \in (t_2^m, 0]$. Положим $f_m := g_m^{-1}$. Так как f_m – гомеоморфизм, то при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ предельные множества $C(f_m, x_1^m)$ и $C(f_m, x_2^m)$ отображений f_m в соответствующих граничных точках $x_1^m, x_2^m \in \partial D$ лежат на $\partial D'$ (см. предложение 13.5 в [1]). Следовательно, найдётся точка $z_1^m \in D \cap |\gamma_1^m|$ такая, что $\operatorname{dist}(f_m(z_1^m), \partial D') < 1/m$. Так как $\overline{D'}$ – компакт, то можно считать, что последовательность $f_m(z_1^m) \to p_1 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогично, найдётся

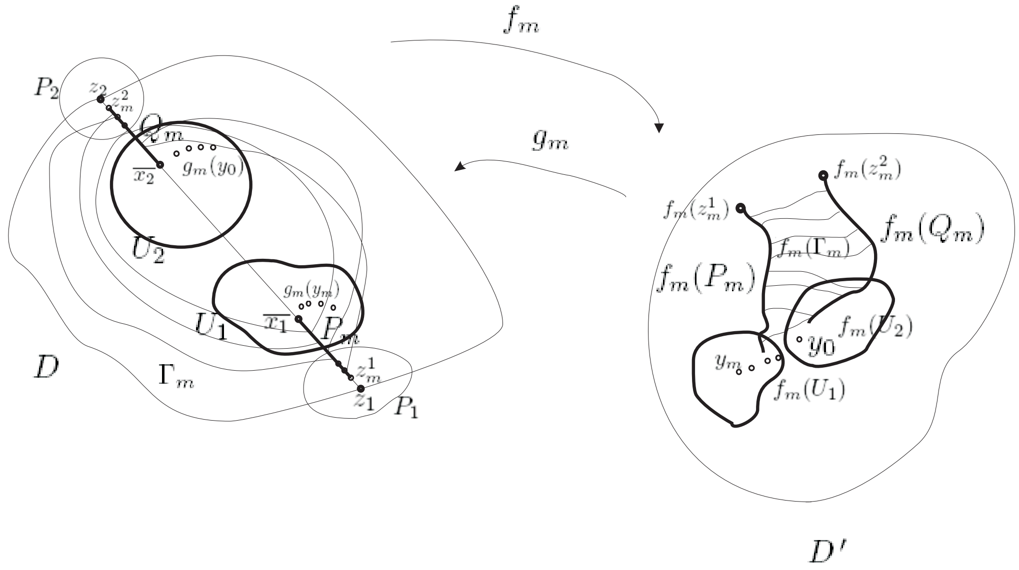

Рис. 1. К доказательству теоремы 1

последовательность $z_2^m \in D \cap |\gamma_2^m|$ такая, что $\mathrm{dist}\,(f_m(z_2^m), \partial D') < 1/m$ и $f_m(z_2^m) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$.

Пусть P_m – часть отрезка γ_1^m, заключённая между точек $g_m(y_m)$ и z_1^m, а Q_m – часть отрезка γ_2^m, заключённая между точек $g_m(y_0)$ и z_2^m. По построению и ввиду (3), $\mathrm{dist}\,(P_m, Q_m) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Пусть $\Gamma_m = \Gamma(P_m, Q_m, D)$, тогда функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_m, поскольку для произвольной (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma_m$ выполнено $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant \frac{l(\gamma)}{\varepsilon_0} \geqslant 1$ (где $l(\gamma)$ обозначает длину кривой γ). Поскольку по условию отображения f_m удовлетворяют (2), получаем:

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n} \int\limits_D Q(x)\, dm(x) := c < \infty\,, \tag{4}$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, $\mathrm{diam}\, f_m(P_m) \geqslant |y_m - f_m(z_1^m)| \geqslant (1/2)\cdot|y_0 - p_1| > 0$ и $\mathrm{diam}\, f_m(Q_m) \geqslant |y_0 - f_m(z_2^m)| \geqslant (1/2)\cdot|y_0 - p_2| > 0$ при больших $m \in \mathbb{N}$, кроме того,

$$\mathrm{dist}\,(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant |y_m - y_0| \to 0, \quad m \to \infty\,.$$

Тогда ввиду леммы 1 $M(f_m(\Gamma_m)) = M(f_m(P_m), f_m(Q_m), D') \overset{m\to\infty}{\to} \infty$, что противоречит соотношению (4). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (3), что и завершает доказательство теоремы. □

Цитированная литература

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
2. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2005. – Vol. **30**, no. 1. – P. 49–69.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – Vol. **93**. – P. 215–236.
5. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. **4**, № 2. – С. 199–234.
6. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О равностепенной непрерывности одного семейства обратных отображений в терминах простых концов // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. **70**, № 9. – С. 1264–1273.
7. *Куратовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.

References

1. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. New York, Springer.
2. Väisälä J (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math, 229. Berlin etc.: Springer-Verlag.
3. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 30*(1), 49-69.
4. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math., 93*, 215-236.
5. Ryazanov, V., Salimov, R. (2007). Weakly flat spaces and bondaries in the mapping theory. *Ukrain. Math. Bull., 4*(2), 199-233.
6. Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2018). On equicontinuity of one class of inverse mappings in terms of prime ends. *Ukr. Math. Zh., 70*(9), 1264-1273 (in Russian).
7. Kuratowski K. (1968). *Topology, v. 2.* New York-London: Academic Press.

E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov

On local behavior of one class of inverse mappings.

As is known, the local behavior of maps is one of the most important problems of analysis. This, in particular, relates to the study of mappings with bounded and finite distortion, which have been actively studied recently. As for this work, here we solve the problem of the behavior of maps, the inverse of which satisfies the Poletsky inequality. The main result is the statement about the equicontinuity of the indicated mappings inside the domain in the case when the majorant corresponding to the distortion of the module under the mapping is integrable in the original domain. It should be emphasized that the proof of this result is largely geometric, at the same time, it uses only the conditions of boundedness of the direct and mapped domains and does not involve any requirements on their boundaries. The study of families of mappings inverse to a given class may turn out to be trivial if we are talking about quasiconformal mappings. In the latter case, we do not go beyond the limits of the class under study in the transition to inverse maps. Nevertheless, when studying mappings with unbounded characteristic, this question is quite substantial, as simple examples of the corresponding classes show. The idea of the proof of the main result is based on the fact that the inner points of an arbitrary domain are weakly flat. The last statement can be called the Väisälä lemma, which was established in his monograph and related to families of curves joining two continua between the plates of a spherical condenser. The proof is also based on the fact that the module of families of curves joining two converging continua in a good domain must tend to infinity. In this case, the neighborhood of some inner point of the mapped domain serves as "good" region, in which we check the equicontinuity of the inverse family of maps. The results of this article are applicable to many other classes of mappings such as mappings with a finite distortion in the sense of Iwaniec, Sobolev classes on the plane and in space, and so on.

Keywords: *quasiconformal mappings, moduli of families of curves.*

Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов

Про локальну поведінку одного класу обернених відображень.

Розглянуто деякий клас гомеоморфізмів областей евклідового простору, більш загальних, ніж просторові квазіконформні відображення. Для вказаних гомеоморфізмів отримано теореми про локальну поведінку відповідних до них обернених відображень у заданій області. Зокрема, доведено, що сім'ї відображень, обернені до яких задовольняють нерівність Полецького, одностайно неперервні в заданій області, якщо мажоранта, що відноситься до цієї нерівності, інтегровна.

Ключові слова: *квазіконформні відображення, модулі сімей кривих.*

Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир
`esevostyanov2009@gmail.com, serezha.skv@yandex.ru`

Получено 13.10.18