УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-15

©2018. **М.О. Шань**

АПРІОРНІ ОЦІНКИ ТИПУ КЕЛЛЕРА–ОССЕРМАНА ДЛЯ ДВІЧІ НЕЛІНІЙНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З АБСОРБЦІЄЮ

Отримано поточкові оцінки зверху для розв'язків двічі нелінійних анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом, які виражені у термінах відстані до межі. Оцінки такого типу беруть свій початок в роботах Дж. Б. Келлера, Р. Оссермана і мають значення для так званих великих розв'язків.

MSC: 35B45.

Ключові слова: *апріорні оцінки, анізотропні параболічні рівняння.*

1. Вступ.

У даній статті отримано апріорні оцінки типу Келлера–Оссермана для невід'ємних розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом. Такі оцінки мають важливе значення в теорії існування і неіснування так званих великих розв'язків, ініційованих К. Бандле і М. Маркусом [1], а також у задачах регулярності, усувності ізольованих особливостей.

Відмітимо, що перші оцінки такого типу були зроблені для рівняння p-Лапласу з абсорбційним членом

$$\triangle_p u = u^q,\ x \in \Omega \subset R^n,\ q > p-1$$

Дж. Келлером [2] і Р. Оссерманом [3] при $p = 2$, і розповсюджені на випадок, коли $p \neq 2$ Д. Васкесом [4]: будь-який невід'ємний розв'язок $u \in C^2(\Omega)$ задовольняє нерівності

$$u(x) \leq c\, dist(x, \partial\Omega)^{-\frac{p}{q-p+1}},\ f(u) = u^q,$$

де $dist(x, \partial\Omega)$ відстань до межі і $c = c(p, q, n)$.

Відомо, що такі оцінки для розв'язків еліптичних і параболічних рівнянь пов'язані з рівняннями, для яких мають місце теореми порівняння. Для ознайомлення з результатами дивіться [5–8] і на посилання в них. Анізотропні еліптичні та параболічні рівняння були об'єктом дослідження невеликої кількості робіт, оскільки для них немає принципу порівняння, і основні роботи стосуються рівнянь тільки з конкретним членом абсорбції, а саме $f(u) = u^q$ (див. [9–18]). Взагалі анізотропні рівняння мало вивчені, якісна теорія для них не побудована, тому останнім часом зростає зацікавленість в дослідженні якісних властивостей розв'язків цих рівнянь.

Роботу виконано за підтримки гранту 0118U003138 Міністерства освіти і науки України.

2. Постановка задачі і основний результат.

В обмеженій області $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ розглянемо невід'ємні розв'язки квазілінійного параболічного рівняння другого порядку у дивергентному вигляді

$$u_t - divA(x,t,u,\nabla u) + a_0(u) = 0,\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{1}$$

На коефіцієнти рівняння $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 будемо накладати наступні умові

- $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 задовольняють умові Каратеодорі
-
$$A(x,t,u,\xi)\xi \geq \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u|^{(m_i-1)(p_i-1)}|\xi_i|^{p_i},$$
$$|a_i(x,t,u,\xi)| \leq \nu_2 u^{(m_i-1)\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\sum_{j=1}^{n} |u|^{(m_j-1)(p_j-1)}|\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}},\ i = \overline{1,n}, \tag{2}$$
$$a_0(u) \geq \nu_1 f(u),$$
де ν_1, ν_2 додатні сталі , $f(u)-$ неперервна, додатня функція та для показників m_i, p_i справедливі нерівності
$$2 < p_1 \leq ... \leq p_n,\ \min_{1\leq i\leq n} m_i > 1,\ \max_{1\leq i\leq n} m_i(p_i - 1) \leq 1 + \frac{\kappa}{n},\ p < n, \tag{3}$$
де $\kappa = n(p(m-d)-1)+p$, $d = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{p_i}$.

Не втрачаючи спільності, будемо вважати, що $m_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} m_i$.

Введемо необхідні означення.

Означення 1. Будемо казати, що функція φ належить простору $V_{p,m}(\Omega_T)$, якщо $\varphi \in C(0,T,L^2(\Omega))$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |\varphi|^{(m_i-1)(p_i-1)}\, |\varphi_{x_i}|^{p_i}\, dxdt < \infty$.

Означення 2. Будемо казати, що $u-$ слабкий розв'язок рівняння (1), якщо $u \in V_{p,m}(\Omega_T)$ і для будь-якого інтервалу $(t_1,t_2) \subset (0,T)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} u\varphi dx \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \{-u\varphi_t + A(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi + a_0(u)\varphi\}\, dx\, dt = 0 \tag{4}$$

для всіх $\varphi \in \overset{o}{V}_{p,m}(\Omega_T)$.

Зауваження 1. Умова (3) гарантує локальну обмеженість слабкого розв'язку рівняння (1) ([19]).

Для формулювання головного результата введемо наступні позначення. Зафіксуємо довільну точку $(x^{(0)},t^{(0)}) \in \Omega_T$, для будь-яких $\tau,\theta_1,\theta_2,...,\theta_n > 0$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_n)$ визначемо циліндри $Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)}) := \{(x,t) : |t-t^{(0)}| < \tau,\ |x_i - x_i^{(0)}| < \theta_i,\ i=\overline{1,n}\}$ і позначемо $M(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})} u$, $\delta(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})} \delta(u)$, $\Phi(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})} \Phi(u)$, $\Phi(u) = \int\limits_0^u g(s)ds$, $g(s) = s^{m_n-1}f(s)$.

Теорема 1. *Нехай виконані умови* (2), (3) *і* $u-$ *невід'ємний слабкий розв'язок рівняння* (1), *припустимо також, що* $f \in C^1(R^1_+)$ *і* $f'(u) \geq 0$. *Зафіксуємо точку* $(x^{(0)},t^{(0)}) \in \Omega_T$ *і нехай* $\sigma \in (0,1)$, $\tau \in (0,\min(\theta_n^{p_n},t^{(0)},T-t^{(0)}))$, $\theta_i \in (0,\theta_n)$ *для* $i \in I' = \{i=\overline{1,n} : m_i(p_i-1) < m_n(p_n-1)\}$ *і* $\theta_i = \theta_n$ *для* $i \in I'' = \{i=\overline{1,n} : m_i(p_i-1) = m_n(p_n-1)\}$. *Тоді існують додатні сталі* c_1,c_2, *які залежать лише від* $n,\nu_1,\nu_2,m_1,...,m_n,p_1,...,p_n$, *що виконується*

$$u(x^{(0)},t^{(0)}) \leq (\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} + \sum_{i\in I'}(\theta_i^{-1}\theta_n^{\frac{p_n}{p_i}})^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}, \tag{5}$$

або

$$\Phi(\sigma\theta,\sigma\tau) \leq c_1(1-\sigma)^{-c_2}\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_np_n-1}(\theta,\tau). \tag{6}$$

У випадку, коли I' *пуста множина, тобто* $m_1(p_1-1) = m_2(p_2-1) = ... = m_n(p_n-1)$, *або справедлива оцінка*

$$u(x^{(0)},t^{(0)}) \leq (\tau^{-1}\theta_n^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}, \tag{7}$$

або (5) *має місце.*

3. Доведення основного результату.

3.1 Допоміжний матеріал

Лема 1. ([20]) *Нехай* $\Omega \in R^n$, $n \geq 2$ *обмежена множина,* $u \in \overset{o}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, *тоді справедлива наступна нерівність*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \gamma \prod_{i=1}^n \left(\int\limits_\Omega |u_{x_i}|dx\right)^{\frac{1}{n}},\ q = \frac{n}{n-1},$$

де додатня стала γ *залежить лише від* n.

Лема 1. ([21]) *Нехай для послідовності невід'ємних чисел* $\{y_j\}_{j\in N}$, $j=0,1,2,...$ *виконується нерівність*

$$y_{j+1} \leq Cb^j y_j^{1+\varepsilon},$$

де $\varepsilon, C > 0, b > 1$. *Тоді справедлива оцінка*

$$y_j \le C^{\frac{(1+\varepsilon)^j-1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^j-1}{\varepsilon^2}-\frac{j}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^j}.$$

Зокрема, якщо $y_0 \le C^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$, *тоді* $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = 0$.

3.2 Допоміжні результати

Зафіксуємо довільну точку $(\bar{x},\bar{t}) \in \Omega_T$, для будь-яких $\eta_1, ..., \eta_n > 0, \eta=(\eta_1, ..., \eta_n)$ і $s > 0$ визначемо циліндри $Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t}) := Q_\eta(\bar{x}) \times (\bar{t}-s, \bar{t}+s)$, щоб $Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t}) \subset \Omega_T$ через ζ позначемо невід'ємну кусково-гладку функцію, що обертається в 0 на параболічній межі $Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})$. Будемо вважати, що

$$2 < p_1 \le ... \le p_{n-1} < p_n,\ \min_{1\le i\le n} m_i > 1,\ m_n(p_n-1) \le 1 + \frac{\kappa}{n},\ p < n. \tag{8}$$

Через γ позначемо сталу, яка залежить тільки від $n, \nu_1, \nu_2, p_1, ..., p_n, m_1, ..., m_n$ і змінюється від рядка до рядка.

Лема 3. *Нехай u — невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (1) і нехай виконані умови (2), (3). Тоді для кожного циліндру $Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t}) \subset \Omega_T$ і для кожної додатньої сталої k виконується нерівність*

$$\sup_{|t-\bar{t}|<s} \int\limits_{Q_\eta(\bar{x})} (\Phi(u)-k)_+^2 \zeta^{p_n} dx + \sum_{i=1}^n \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta^{p_n} dxdt +$$
$$+ \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} f(u) g(u) (\Phi(u)-k)_+ \zeta^{p_n} dxdt \le \gamma \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u)-k)_+^2 |\zeta_t| \zeta^{p_n-1} dxdt +$$

$$+\gamma \sum_{i=1}^n \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u)-k)_+^2 \delta^{p_i-2}(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |\zeta_{x_i}|^{p_i} dxdt, \tag{9}$$

де $A_{k,\eta,s} = \{(x,t) \in Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t}) : \Phi(u) > k\}$.

Доведення. В інтегральну тотожність (4) підставимо пробну функцію $\varphi =$

$(\Phi(u)-k)_+ g(u)\zeta^p$. Застосувавши умову (2), отримаємо

$$\sup_{|t-\bar{t}|<s}\int\limits_{Q_\eta(\bar{x})}(\Phi(u)-k)_+^2\zeta^{p_n}dx+\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}f(u)g(u)(\Phi(u)-k)_+\zeta^{p_n}dxdt+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}\left(g^2(u)+g'(u)(\Phi(u)-k)_+\right)u^{(m_i-1)(p_i-1)}|u_{x_i}|^{p_i}\zeta^{p_n}dxdt\le$$
$$\le\gamma\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}(\Phi(u)-k)_+^2|\zeta_t|\zeta^{p_n-1}dxdt+$$
$$+\gamma\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}\left(\sum_{j=1}^{n}g^2(u)u^{(m_j-1)(p_j-1)}|u_{x_j}|^{p_j}\zeta^{p_n}\right)^{1-\frac{1}{p_i}}\times$$
$$\times g^{\frac{2}{p_i}-1}(u)u^{(m_i-1)\frac{p_i-1}{p_i}}(\Phi(u)-k)_+|\zeta_{x_i}|\zeta^{\frac{p_n}{p_i}-1}dxdt.$$

З останньої формули, використовуючи нерівність Юнга і очевидну нерівність $\frac{\Phi(u)}{g(u)}\le\delta(u)$, приходимо до оцінки (9). □

3.3 Доведення Теореми 1

Розглянемо циліндр $Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$ і нехай $(\bar{x},\bar{t})$ довільна точка у $Q_{\sigma\theta,\sigma\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$. Якщо $u(x^{(0)},t^{(0)})\ge(\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\theta_i^{-1}\rho^{\frac{p_n}{p_i}}\right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}$, тоді $M(\theta,\tau)=\max(M(\theta,\tau),\delta(\theta,\tau))\ge(\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\theta_i^{-1}\rho^{\frac{p_n}{p_i}}\right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}$, і отже $Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})\subset Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$, де $s=(1-\sigma)\theta_n^{p_n}M^{1-m_n(p_n-1)}(\theta,\tau)$, $\eta_i=(1-\sigma)\theta_n^{\frac{p_n}{p_i}}M^{m_i(p_i-1)-m_n(p_n-1)}$ (θ,τ), $i=\overline{1,n}$. Для фіксованої сталої $k>0$ і $l,j=0,1,2...$ визначемо $\alpha_l=\frac{1}{4}(1+2^{-1}+...+2^{l})$, $\eta_{i,j,l}=(\alpha_l+\frac{1}{4}2^{-j-l-1})\eta_i$, $i=\overline{1,n}$, $\eta_{j,l}=(\eta_{1,j,l},...,\eta_{n,j,l})$, $s_{j,l}=(\alpha_l+\frac{1}{4}2^{-j-l-1})s$, $k_j=k(1-2^{-j})$, $Q_{j,l}=Q_{\eta_{j,l},s_{j,l}}(\bar{x},\bar{t})$, $A_{k_j,j,l}=\{(x,t)\in Q_{j,l}:F(u)>k_j\}$. Let $\zeta_j\in C_0^\infty(Q_{j,l})$, $0\le\zeta_j\le1$, $\zeta_j=1$ in $Q_{j+1,l}$, $\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}\right|\le\gamma2^{j+l-1}\eta_i$, $i=\overline{1,n}$, $\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}\right|\le\gamma2^{j+l}s^{-1}$.

Застосувавши нерівність Гьольдера і Лему 1, отримаємо

$$\iint\limits_{A_{k_{j+1},j+1,l}}(\Phi(u)-k_{j+1})_+^2dxdt\le$$

$$\le\left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j+1,l}}\left(\Phi(u)-k_{j+1})_+^2\zeta_j^{p_n}\right)^{\frac{n+1}{n}}dxdt\right)^{\frac{n}{n+1}}|A_{k_{j+1},j+1,l}|^{\frac{1}{n+1}}\le$$

$$\leq \gamma \left(\sup_{|t-\bar{t}|<s_{j,l}} \int\limits_{Q_{\eta_j,l}(\bar{x})} (\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} \left| \left((\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} \right)_{x_i} \right| dxdt \right)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1},j,l}|^{\frac{1}{n+1}} \tag{10}$$

Використовуючи нерівність $\Phi(u)-k_j \geq \frac{k}{2^{j+1}}$, яка справедлива на множині $A_{k_{j+1},j,l}$, $\frac{\Phi(u)}{g(u)} \leq \delta(u)$, оцінимо другий доданок у правій частині (10):

$$\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} \left| \left((\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} \right)_{x_i} \right| dxdt \leq \gamma \iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} g(u)(\Phi(u)-k_{j+1})_+ |u_{x_i}| \zeta_j^{p_n} dxdt +$$

$$+\gamma \iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} (\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n-1} dxdt \leq$$

$$\leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{\frac{1}{p_i}} \times$$

$$\times \left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} \left(\frac{\Phi(u)}{g(u)} \right)^{\frac{p_i}{p_i-1}} g(u) u^{m_n-m_i} f(u) (\Phi(u)-k_j)_+ \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} +$$

$$+\gamma \iint\limits_{A_{k_j,j,l}} (\Phi(u)-k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n-1} dxdt \leq$$

$$\leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i-1}{p_i}} \delta(\theta,\tau) M^{\frac{m_n-m_i}{p_i}(p_i-1)}(\theta,\tau) \left(\iint\limits_{A_{k_j,j,l}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{\frac{1}{p_i}} \times$$

$$\times \left(\iint\limits_{A_{k_j,j,l}} g(u) f(u) (\Phi(u)-k_j)_+ \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + \gamma \iint\limits_{A_{k_j,j,l}} (\Phi(u)-k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| dxdt \tag{11}$$

Обираючи k з умови

$$k \geq \theta_n^{-p_n} \delta(\theta,\tau) M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau),$$

та використовуючи Лему 3, з (10), (11) маємо

$$y_{j+1,l} = \iint\limits_{A_{k_{j+1},j+1,l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 dxdt \leq \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{(j+l)\gamma} k^{-\frac{2}{n+1}} |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-\frac{1}{n+1}} y_{j,l}^{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Нехай $Q_l = Q_{\alpha_l\eta,\alpha_l s}, \Phi_l = \sup\limits_{Q_l} \Phi(u)$, з Леми 2 випливає, що $y_{j,l} \to 0$, коли $j \to \infty$, за умови, що k задовольняє рівності

$$k^2 = \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} \, |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-1} \iint\limits_{Q_{l+1}} \Phi^2(u) dxdt.$$

Якщо $\varepsilon \in (0,1)$, тоді з попередньої нерівності отримаємо

$$\Phi_l \leq \gamma\theta_n^{-p_n} \delta(\theta,\tau) M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) +$$

$$+ \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} \delta^{\frac{1}{2}}(\theta,\tau) M^{\frac{m_n-1}{2}}(\theta,\tau) \Phi_{l+1}^{\frac{1}{2}} \, |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-\frac{1}{2}} \left(\iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u) dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \varepsilon\Phi_{l+1} + \gamma\theta_n^{-p_n} \delta(\theta,\tau) M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) +$$

$$+ \gamma\varepsilon^{-1}(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} \delta(\theta,\tau) M^{m_n - 1}(\theta,\tau) \, |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-1} \iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u) dxdt, \; l = 0,1,2...$$

З цього за допомогою ітерацій приходимо до оцінки

$$\Phi(u(\bar{x},\bar{t})) \leq \Phi_0 \leq \varepsilon^l \Phi_l + \gamma\varepsilon^{-1}\sigma^{-\gamma} \sum_{i=0}^{l-1} (\varepsilon 2^\gamma)^i \times$$

$$\times \left(\theta_n^{-p_n} \delta(\theta,\tau) M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) + \delta(\theta,\tau) M^{m_n - 1}(\theta,\tau) \, |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-1} \iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u) dxdt \right),$$

для кожного $l \geq 1$.

Оберемо $\varepsilon = 2^{-\gamma-1}$, щоб сума у правій частині була збіжним рядом, коли $l \to \infty$:

$$\Phi(u(\bar{x},\bar{t})) \leq \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} \theta_n^{-p_n} \delta(\theta,\tau) M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) dxdt +$$

$$+ \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} \delta(\theta,\tau) M^{m_n - 1}(\theta,\tau) \, |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-1} \iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u) dxdt. \qquad (12)$$

Нехай $\xi \in C_0^\infty(Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})), 0 \leq \xi \leq 1, \xi = 1$ у $Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})$, $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right| \leq \gamma \eta_i^{-1}, i = \overline{1,n}$, $\left|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right| \leq \gamma s^{-1}$. Щоб оцінити інтеграл у правій частині формули (12), у інтегральну тотожність (4) підставимо функцію $\varphi = \frac{u}{u+\varepsilon}\xi^{p_n}$. Використовуючи умову (2), нерівність Гьольдера і переходячи до границі, коли $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} f(u)\xi^{p_n}dxdt \leq \gamma \iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} u|\xi_t|\xi^{p_n-1}dxdt+$$

$$+\gamma\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})}|u_{x_i}|^{p_j}\xi^{p_n}dxdt\right)^{1-\frac{1}{p_i}}\left(\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})}|\xi_{x_i}|^{p_i}dxdt\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Тепер підставляючи в інтегральну тотожність (4) пробну функцію $\varphi = u\xi^{p_n}$, використовуючи умову (2) і нерівність Юнга, маємо

$$\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} f(u)\xi^{p_n}dxdt \leq \gamma M(\theta,\tau)|Q_\eta(\bar{x})|. \tag{13}$$

Комбінуючи нерівності (12), (13), приходимо до оцінки

$$\Phi(u(\bar{x},\bar{t})) \leq \gamma\sigma^{-\gamma}\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_n p_n-1}(\theta,\tau). \tag{14}$$

Оскільки $(\bar{x},\bar{t})$ була довільна точка з циліндру $Q_{\sigma\theta,\sigma\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$, тоді з нерівності (14) виходить необхідна оцінка (6), що доводить Теорему 1.

Цитована література

1. *Bandle K., Marcus M.* Large solutions of semilinear elliptic equations: Existence, uniqueness and asymptotic behavior // Jl. d'Anal. Math. – 1992. – V. 58. – P. 9–24.
2. *Keller J.B.* On the solutions of $\triangle u = f(u)$ // Comm. Pure Applied Math. – 1957. – V. 10. – P. 503–510.
3. *Osserman R.* On the inequality $-\triangle u \geq f(u)$ // Pacific J. Math. – 1957. – V. 7, N. 4. – P. 1641–1647.
4. *Vazquez J.L.* An a priori interior estimate for the solutions of a nonlinear problem representing weak diffusion // Nonlinear Anal. – 1981. – V. 5. – P. 95–103.
5. *Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E.* Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations, De Gruyter,Series in Nonl.Analysis and Applications, Berlin, 2016.
6. *Marcus M., Veron L.* Nonlinear second order elliptic equations involving measures, Berlin, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2014.
7. *Radulescu V.D.* Singular phenomena in nonlinear elliptic problems: from blow-up boundary solutions to equations with singular nonlinearities // Handb. Differ. Equat., North-Holland, Amsterdam. – 2007. – P. 485–593.
8. *Veron L.* Singularities of Solution of Second Order Quasilinear Equations, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Harlow, 1996.
9. *Cirstea F.C., Vetois J.* Fundamental solutions for anisotropic elliptic equations: existence and a priori estimates // Comm. PDE. – 2015. – V. 40, N. 4. – P. 727–767.

10. *Garcia-Melian J., Rossi J.D., Sabina de Lis J.C.* Large solutions to an anisotropic quasilinear elliptic problem // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2010. – V. 189. – P. 689–712.
11. *Namlyeyeva Yu.V., Shishkov A.E., Skrypnik I.I.* Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations // Adv. Nonlinear Stud. – 2006. – V. 6. – P. 617–641.
12. *Namlyeyeva Yu.V., Shishkov A.E., Skrypnik I.I.* Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations // Applicable Analysis. – 2010. – V. 10 – P. 1559–1574.
13. *Skrypnik I.I.* Removability of an isolated singularity for anisotropic elliptic equations with absorption // Mat. Sb. – 2008. – V. 199, N. 7. – P. 85–102.
14. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularity for anisotropic parabolic equations with absorption // Manuscr. Math. – 2013. – V. 140. – P. 145–178.
15. *Skrypnik I.I.* Removable singularities for anisotropic elliptic equations // Potential Anal. – 2014. – V. 41. – P. 1127–1145.
16. *Vetois J.* Strong maximum principles for anisotropic elliptic and parabolic equations // Advanced Nonlinear Studies. – 2016. – V. 12. – P. 101–114.
17. *Vetois J.* A priori estimates for solutions of anisotropic elliptic equations // Nonlin. Anal. – 2009. – V. 71, N. 9. – P. 3881–3905.
18. *Vetois J.* The blow-up of critical anisotropic equations with critical directions // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 2011. – V. 18. – P. 173–197.
19. *Kolodij I.M.* On boundedness of generalized solutions of parabolic differential equations // Vestnik Moskov. Gos. Univ. – 1971. – V. 5. – P. 25–31.
20. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2-е, перераб. – Москва : Наука, 1973. – 576 с.
21. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. Universitext, Springer–Verlag, New York, 1993.

References

1. Bandle, K., Marcus, M. (1992). Large solutions of semilinear elliptic equations: Existence, uniqueness and asymptotic behavior. *J. d'Anal. Math., 58*, 9-24.
2. Keller, J.B. (1957). On the solutions of $\triangle u = f(u)$. *Comm. Pure Applied Math., 10*, 503-510.
3. Osserman, R. (1957). On the inequality $-\triangle u \geq f(u)$. Pacific J. Math., 7(4), 1641-1647.
4. Vazquez, J.L. (1981). An a priori interior estimate for the solutions of a nonlinear problem representing weak diffusion. *Nonlinear Anal., 5*, 95-103.
5. Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E. (2016). *Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations.* Series in Nonl.Analysis and Applications, Berlin: De Gruyter.
6. Marcus, M., Veron, L. (2014). *Nonlinear second order elliptic equations involving measures.* Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.
7. Radulescu, V.D. (2007). Singular phenomena in nonlinear elliptic problems: from blow-up boundary solutions to equations with singular nonlinearities. In *Handb. Differ. Equat.* (pp. 485-593), Amsterdam: North-Holland.
8. Veron, L. (1996). *Singularities of Solution of Second Order Quasilinear Equations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Harlow.
9. Cirstea, F.C., Vetois, J. (2015). Fundamental solutions for anisotropic elliptic equations: existence and a priori estimates. *Comm. PDE., 40*(4), 727-767.
10. Garcia-Melian, J., Rossi, J.D., Sabina de Lis, J.C. (2010). Large solutions to an anisotropic quasilinear elliptic problem. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, 189*, 689-712.
11. Namlyeyeva, Yu.V., Shishkov, A.E., Skrypnik, I.I. (2006). Isolated singularities of solutions of quasi-linear anisotropic elliptic equations. *Adv. Nonlinear Stud., 6*, 617-641.
12. Namlyeyeva, Yu.V., Shishkov, A.E., Skrypnik, I.I. (2010). Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations. *Applicable Analysis, 10*, 1559-1574.

13. Skrypnik, I.I. (2008). Removability of an isolated singularity for anisotropic elliptic equations with absorption. *Mat. Sb., 199*(7), 85-102.
14. Skrypnik, I.I. (2013). Removability of isolated singularity for anisotropic parabolic equations with absorption. *Manuscr. Math., 140*, 145-178.
15. Skrypnik, I.I. (2014). Removable singularities for anisotropic elliptic equations. *Potential Anal., 41*, 1127-1145.
16. Vetois, J. (2016). Strong maximum principles for anisotropic elliptic and parabolic equations. *Advanced Nonlinear Studies, 12*, 101-114.
17. Vetois, J. (2009). A priori estimates for solutions of anisotropic elliptic equations. *Nonlin. Anal., 71*(9), 3881-3905.
18. Vetois, J. (2011). The blow-up of critical anisotropic equations with critical directions. *Nonlinear Differ. Equ. Appl., 18*, 173-197.
19. Kolodij, I.M. (1971). On boundedness of generalized solutions of parabolic differential equations. *Vestnik Moskov. Gos. Univ., 5*, 25-31.
20. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations.* New York: Academic Press (in Russian).
21. DiBenedetto, E. (1993). *Degenerate Parabolic Equations.* Universitext, New York: Springer-Verlag.

M.A. Shan

Keller-Osserman a priori estimates for doubly nonlinear anisotropic parabolic equations with absorption term.

We are concerned with divergence type quasilinear parabolic equation with measurable coefficients and lower order terms model of which is a doubly nonlinear anisotropic parabolic equations with absorption term. This class of equations has numerous applications which appear in modeling of electrorheological fluids, image precessing, theory of elasticity, theory of non-Newtonian fluids with viscosity depending on the temperature. But the qualitative theory doesn't construct for these anisotropic equations. So, naturally, that during the last decade there has been growing substantial development in the qualitative theory of second order anisotropic elliptic and parabolic equations. The main purpose is to obtain the pointwise upper estimates in terms of distance to the boundary for nonnegative solutions of such equations. This type of estimates originate from the work of J. B. Keller, R. Osserman, who obtained a simple upper bound for any solution, in any number of variables for Laplace equation. These estimates play a crucial role in the theory of existence or nonexistence of so called large solutions of such equations, in the problems of removable singularities for solutions to elliptic and parabolic equations. Up to our knowledge all the known estimates for large solutions to elliptic and parabolic equations are related with equations for which some comparison properties hold. We refer to I.I. Skrypnik, A.E. Shishkov, M. Marcus , L. Veron, V.D. Radulescu for an account of these results and references therein. Such equations have been the object of very few works because in general such properties do not hold. The main ones concern equations only in the precise choice of absorbtion term $f(u) = u^q$. Among the people who published significative results in this direction are I.I. Skrypnik, J. Vetois, F.C. Cirstea, J. Garcia-Melian, J.D. Rossi, J.C. Sabina de Lis. The main result of the paper is a priori estimates of Keller-Osserman type for nonnegative solutions of a doubly nonlinear anisotropic parabolic equations with absorption term that have been proven despite of the lack of comparison principle. To obtain these estimates we exploit the method of energy estimations and De Giorgy iteration techniques.

Keywords: *a priori estimates, anisotropic parabolic equations.*

М.А. Шань

Априорные оценки типа Келлера-Оссермана для дважды нелинейных анизотропных параболических уравнений с абсорбцией.

Получены поточечные оценки сверху для решений дважды нелинейных анизотропных параболических уравнений с абсорбционным членом в терминах расстояния до границы. Оценки такого типа берут свое начало в работах Дж. Келлера, Р. Оссермана и имеют значение для так называемых больших решений.

Ключевые слова: *априорные оценки, анизотропные параболические уравнения.*

Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця
`shan_maria@ukr.net`

Отримано 25.09.18