УДК 531.38, 62-50
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-17

©2018. **В.Ф. Щербак, И.С. Дмитришин**

ОЦЕНКА СКОРОСТИ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрена задача наблюдения для системы взаимосвязанных осцилляторов, совершающих нелинейные колебания. В качестве математической модели каждого осциллятора сети используются уравнения Льенара – общая модель нелинейных колебаний материальной точки. Такие системы возникают при упрощенном моделировании многих биологических, физических процессов, имеющих циклический характер. Предложена схема решения задачи наблюдения, обеспечивающая получение экспоненциальных оценок скорости каждого из осцилляторов по информации об их положении. Для построения соответствующего нелинейного наблюдателя использован метод синтеза инвариантных соотношений, позволяющий синтезировать выражения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин.

MSC: 34A60, 34D20, 34N05.

Ключевые слова: *нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, нелинейные осцилляторы.*

1. Введение.

Исследование коллективного поведения многомасштабных динамических процессов является на данный момент одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики. Она имеет принципиальное значение для понимания основных закономерностей синхронной динамики распределенных активных подсистем с колебаниями, таких как нейронные ансамбли, биомеханические модели сердечной или локомоторной деятельности, модели турбулентных сред и т. п. Поскольку нелинейные колебания, которые наблюдаются в таких системах, имеют устойчивый предельный цикл, который не зависит от начальных условий, то в качестве модели многомасштабных процессов обычно используют систему связанных между собой нелинейных осцилляторов. В качестве основной динамической модели каждого из этих осцилляторов часто используют уравнения Льенара [1].

Уравнения Льенара являются важным, с практической точки зрения, классом нелинейных дифференциальных уравнений. Данные уравнения возникают в теории нелинейных колебаний, теории динамических систем, задачах нелинейной механики, задачах теории упругости, задачах механики жидкости и газа, задачах описания динамики биологических систем и в ряде других приложений. В частности, к уравнениям типа Льенара относятся уравнения Рэлея, использующиеся для описания динамики пузырька газа в жидкости, осциллятор Ван дер Поля, осциллятор Мэтьюса–Лакшманана, осциллятор Дуфинга–Ван дер Поля и ряд других уравнений нелинейной механики.

Практические исследования таких моделей многомасштабных динамических процессов при их использовании в разного рода изделиях зачастую связаны с проблемой определения характеристик активных подсистем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени. В частности, для изучения и управления процессом синхронизации движения компонент сложных систем требуется знание скорости колебаний каждого из осцилляторов системы при измерениях положения колеблющихся точек [2–4]. В такой постановке эта задача является классической задачей наблюдения динамической системы по ее выходу [5].

В работе проводится построения нелинейного наблюдателя, позволяющего получать асимптотические оценки скоростей колебаний в ансамблях осцилляторов, описываемых уравнениями Льенара. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [6], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [7]. На первом этапе наблюдатель строится для одного осциллятора. Найденное решение используется далее для системы связанных между собой нелинейных осцилляторов.

2. Задача определения скорости колебаний осциллятора Льенара. Рассмотрим уравнение Льенара, описывающее процесс нелинейных колебаний материальной точки

$$\ddot{x} - F(x)\dot{x} + G(x) = 0. \tag{1}$$

Будем трактовать переменную x как отклонение положения точки от состояния равновесия $x = 0$. Предполагаем, что функции $F(x), G(x)$ являются непрерывными при всех значениях x и обеспечивают для заданных начальных значений единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий. Тогда уравнение (1) описывает широкий класс нелинейных моделей колебательных процессов при дополнительном условии: для $x \neq 0$

$$x \cdot G(x) > 0,$$

которое означает, что сила, возвращающая материальную точку в положение равновесия, направлена в сторону положения равновесия. Одной из задач, возникающих при использовании модели (1) в тех или иных устройствах, является задача определения скорости точки в предположении, что значения функции времени $x(t)$ доступны измерению.

Перепишем уравнение Льенара в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначим $x_1 = x,\ x_2 = dx/dt$ и запишем (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2, \\ &\dot{x_2} = F(x_1)x_2 - G(x_1), \\ &y = x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения $x_2(t)$ как задачу наблюдения системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функция $y(t) = x_1(t)$, а также любые величины, которые могут быть найдены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R, \tag{3}$$

в которой функция $U(\xi, x_1)$ обеспечивает существование и единственность решения $\xi(t, \xi_0)$ для $t \in [0, \infty)$. Используя традиционный подход к решению задачи наблюдения [4], сформулируем задачу.

Задача 1. Найти асимптотически точные оценки переменной $x_2(t)$ системы (2) по известным значениям выхода $x_1(t)$.

3. Синтез дополнительного соотношения.

Для решения задачи используем метод синтеза инвариантных соотношений, с помощью которого на некоторых траекториях расширенной системы дифференциальных уравнений (2), (3) строятся явные зависимости неизвестных от известных величин [7]. Суть данного подхода состоит в подборе правой части уравнения (3) – функции $U(\xi, x_1)$ таким образом, чтобы полученная расширенная система дифференциальных уравнений (2),(3) допускала некоторое инвариантное соотношение

$$V(x_1, x_2, \xi) = 0, \tag{4}$$

со следующими свойствами:

А) Соотношение (4) формирует уравнение для определения неизвестной, т.е. $\frac{\partial V}{\partial x_2} \neq 0$;

Б) Соответствующее соотношению (4) двумерное инвариантное многообразие $M = \{(x_1, x_2, \xi) \in R^3 :\ V(x_1, x_2, \xi) = 0\}$ обладает свойством глобального притяжения. Иными словами на любых решениях расширенной системы (2),(3)

$$\lim_{t\to\infty} V(x_1(t), x_2(t), \xi(t)) = 0.$$

Чтобы свойство А было выполнено во всей рассматриваемой области, соотношения (4) будем искать в виде

$$V(x_1, x_2, \xi) = x_2 - \xi - \Phi(x_1) = 0, \tag{5}$$

где переменная ξ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3). Если неопределенные пока функции $\Phi(x_1), U(\xi, x_1)$ выбраны такими, что соотношения (5) становится инвариантным на рассматриваемом решении системы (2),(3), то тогда искомое $x_2(t)$ может быть найдено непосредственно из уравнения (5).

Покажем, что в случае уравнения Льенара существует широкое семейство функций $\Phi(x_1)$, для которых такие соотношения могут быть построены.

Теорема. *Для любой дифференцируемой функции $\Phi(x_1)$ существуют управление $U(\xi, x_1)$ такое, что равенство (5) выполняется тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений* (2),(3).

Доказательство. Введем переменную ε, которая характеризует невязку в формуле (5) на решениях системы (2), (3)

$$x_2(t) - \xi(t) - \Phi(x_1(t)) = \varepsilon(t). \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (2) замену переменных. Перейдем по формуле (6) от переменной x_2 к переменной ε. Дифференцируя (6) в силу системы (2), (3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_2 - \Phi'(x_1)\dot{x}_1 - \dot{\xi}(t) = [F(x_1) - \Phi'(x_1)][\Phi(x_1) + \xi + \varepsilon] - G(x_1) - \dot{\xi}, \qquad (7)$$

где $\Phi'(x_1)$ означает производную по переменной x_1.

Чтобы равенство (5) выполнялось тождественно на некоторых решениях системы (2), (3), достаточно показать, что дифференциальное уравнение (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Для этого зафиксируем вид правой части (3), а именно: оставляя пока свободной функцию $\Phi(x_1)$, положим

$$U(\xi, x_1) = [(F(x_1) - \Phi'(x_1)][\Phi(x_1) + \xi] - G(x_1). \qquad (8)$$

В результате дифференциальное уравнение для отклонения ε становится однородным

$$\dot{\varepsilon} = [F(x_1) - \Phi'(x_1)]\varepsilon, \ \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \qquad (9)$$

а значит допускает тривиальное решение. Утверждение доказано.

Замечание. Таким образом, для любой дифференцируемой функции $\Phi(x_1)$ начальное значение ξ_0 в задаче Коши для уравнения (3) может быть выбрано так, что в момент $t = 0$ выражение (5) окажется верным равенством. В частности, это означает, что при таком выборе начальное значение для отклонения $\varepsilon_0 = 0$. В этом случае равенство (5) на траектории расширенной системы (2), (3) выполняется тождественно, образуя, тем самым, инвариантное соотношение, в котором единственным неизвестным является функция $x_2(t)$.

В общем случае осуществить такой выбор ξ_0 не представляется возможным, поскольку для этого необходимо знать значения $x_2(0)$, которое, вообще говоря, и есть искомой величиной. Чтобы использовать формулу (5) для оценки $x_2(t)$ на любом решении системы (2), (3) требуется из множества функций $\Phi(x_1)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение системы дифференциальных уравнений для отклонений (9) обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

4. Экспоненциальное затухание отклонений.

Воспользуемся имеющейся свободой в выборе функции $\Phi(x_1)$, чтобы выполнить свойство Б, а именно – обеспечить асимптотическое стремление к нулю отклонения $\varepsilon(t)$. Уравнение (9) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, его общее решение имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left\{ \int_0^t [F(x_1(\tau)) - \Phi'(x_1(\tau))] d\tau \right\}.$$

Отсюда следует, что для решения исходной задачи достаточно выбрать функцию $\Phi(x_1)$ из условий отрицательности и расходимости несобственного интеграла

$$\int_0^\infty [F(x_1(\tau)) - \Phi'(x_1(\tau))]d\tau.$$

Сузим семейство таких функций, потребовав для любого $t > 0$ выполнения равенства

$$F(x_1(t)) - \Phi'(x_1(t)) = \lambda, \tag{10}$$

где λ – некоторая отрицательная постоянная. В этом случае общее решение уравнения в отклонениях имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp \lambda t,$$

следовательно функции $\Phi(x_1)$, удовлетворяющие условию (10), обеспечивают экспоненциальную оценку неизвестной $x_2(t)$.

Условие (10) формирует дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(x_1)$. Его общее решение имеет вид

$$\Phi(x_1) = \int [F(x_1) + \lambda]dx_1 = P(x_1) + \lambda x_1 + C, \tag{11}$$

где $P(x_1)$ – первообразная функции $F(x_1)$, C - произвольная постоянная. Зная функцию $\Phi(x_1)$, определяем по формуле (8) правую часть дифференциального уравнения (3). В итоге, подставляя полученные результаты в (5), получаем окончательное уравнения наблюдателя

$$\begin{array}{l} x_2 = \xi + P(x_1) + \lambda x_1 + C + O(\exp \lambda t), \\ \dot{\xi}(t) = \lambda[\Phi(x_1) + \xi] - G(x_1), \ \xi_0 \in R. \end{array} \tag{12}$$

Уравнения (12) определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\lambda < 0, \xi_0, C$. При этом каждый из них обеспечивает экспоненциальное оценивание переменной $x_2(t)$ с показателем затухания, равным $|\lambda|$.

5. Система связанных осцилляторов.

Рассмотрим теперь механическую модель системы, составленную из n осцилляторов, связанных между собой. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{array}{l} \dot{x_{i1}} = x_{i2}, \\ \dot{x_{i2}} = F_i(x_{i1})x_{i2} - G_i(x_{i1}) + \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), \\ y_i = x_{i1}, \quad i = \overline{1,n}. \end{array} \tag{13}$$

Предполагается, что осцилляторы соединены между собой упругими связями с линейными жесткостями $k_{ij}, \ i,j = \overline{1,n}$, а положение каждого из них доступно измерению: $y_i(t) = x_{1i}(t)$. Системы такого рода используются для моделирования сложных колебательных процессов. Например, частный случай уравнения Льенара – уравнение Ван дер Поля широко применяются в медико-биологических исследованиях паттернов человеческого организма. Так одна из моделей сердечной деятельности представлена в виде $n = 2$ связанных осцилляторов, случай $n = 3$ используется для моделировании ходьбы человека [2]. Рассмотрим задачу определения скорости колебаний осцилляторов по известной информации об их положении.

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки переменных $x_{i2}(t)$ системы (13) по известным значениям выхода $x_{i1}(t),\ i = \overline{1,n}$.

Решение задачи 2 проведем по описанной выше схеме. Представим неизвестные в виде суммы неопределенных величин

$$x_{i2}(t) = \xi_{i1}(t) + \Phi_i(x_{i1}(t)) + \varepsilon_i(t)\ i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

где $\varepsilon_i(t)$ – отклонения, $\xi_i(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi_i} = U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}),\ \xi_i(0) = \xi_{i0} \in R,\ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Правые части системы (15) должны зависеть только лишь от известных величин. В качестве управлений $U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})$ возьмем функции

$$U_i = [(F_i(x_{i1}) - \Phi_i'(x_{i1})][\Phi_i(x_{i1}) + \xi_i] - G_i(x_{i1}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}),\ i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

В результате получаем для отклонений n однотипных дифференциальных уравнений вида (9)

$$\dot{\varepsilon_i} = [F_i(x_{i1}) - \Phi_i'(x_{i1})]\varepsilon_i,\ \varepsilon_i(0) = \varepsilon_{i0},\ i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Полагая в правой части (17) коэффициенты при отклонениях равными некоторой отрицательной постоянной λ, получаем аналогичные (10) уравнения для функций $\Phi_i(x_{i1}(t)),\ i = \overline{1,n}$. Используя найденные ранее решения (11), запишем уравнения наблюдателя скоростей системы n связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} &x_{i2} = \xi_i + P_i(x_{i1}) + \lambda x_{i1} + C_i + O(\exp \lambda t),\\ &\dot{\xi}(t) = [(F_i(x_{i1}) - \Phi_i'(x_{i1})][\Phi_i(x_{i1}) + \xi_i] - G_i(x_{i1}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения (18) определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\lambda < 0, \xi_0, C$. При этом каждый из них обеспечивает экспоненциальное оценивание переменной $x_2(t)$ с показателем затухания, равным $|\lambda|$. Полученные соотношения предполагается использовать далее в задаче синхронизации колебаний компонент осцилляторной сети по неполной информации, которая актуальна, в частности, для алгоритмов управления рядом медицинских устройств [3].

Цитированная литература

1. *Рейссиг Р., Сан-соне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1974. – 319 с.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
3. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2003. – P. 153–162.
4. *Бyлдаков Н.С., Самочетова Н.С., Ситников А.В., Суятинов С.И.* Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» // Nauka i obrazovaniye, Elektronnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal. – 2013. – С. 123.
5. *Справочник по теории автоматического управления*/ Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
6. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. — 1974. -– Вып. 6.
7. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.

References

1. Reyssig, R., San-sone G., Konti R. (1974). *Kachestvennaya teoriya nelineynih differentsial'nyh uravnenij.* Moscow: Nauka (in Russian).
2. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, Ye.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V. (2014). Fenomen uravneniya van der Polya. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dynamika. 22*(4), 3-42 (in Russian).
3. Grudzinski, K., Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2003). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A 336*(1-2), 153-162.
4. Buldakov, N.S., Samochetova, N.S., Sitnikov, A.V., Suyatinov, S.I. (2013). Modelirovaniye svyazej v serdechno-sosudistoy systeme. *Nauka i obrazovaniye, Elektronnyj nauchno-tekhnicheskiy zhurnal, 123* (in Russian).
5. Ed. Krasovsky, A.A. (1987) *Spravochnik po teoriy avtomatychnoho upravlinnya.* Moscow: Nauka (in Russian).
6. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mehanika tverdogo tela, 6*, 15-24 (in Russian).
7. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh trebovaniy v zadachakh upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 69-76 (in Russian).

V.F. Shcherbak, I.S. Dmytryshyn

Estimation of oscillation velocities of oscillator network.

The study of the collective behavior of multiscale dynamic processes is currently one of the most urgent problems of nonlinear dynamics. Such systems arise on modelling of many cyclical biological or physical processes. It is of fundamental importance for understanding the basic laws of synchronous dynamics of distributed active subsystems with oscillations, such as neural ensembles, biomechanical models of cardiac or locomotor activity, models of turbulent media, etc. Since the nonlinear oscillations that are observed in such systems have a stable limit cycle , which does not depend on the initial conditions, then a system of interconnected nonlinear oscillators is usually used as a model of multiscale processes. The equations of Lienar type are often used as the main dynamic model of each of these oscillators. In a number of practical control problems of such interconnected oscillators it is necessary to determine the oscillation velocities by known data. This problem is considered as observation problem for nonlinear dynamical system. A new method – a synthesis of invariant relations is used to design a nonlinear observer. The method allows us to represent unknowns as a function of known quantities. The scheme of the construction of invariant relations consists in the expansion of the original dynamical system by equations of some controlled subsystem (integrator). Control in the additional system is used for the synthesis of some relations that are invariant for the extended system and have the attraction property for all of its trajectories. Such relations are considered in observation problems as additional equations for unknown state vector of initial oscillators ensemble. To design the observer, first we introduce a observer for unique oscillator of Lienar type and prove its exponential convergence. This observer is then extended on several coupled Lienar type oscillators. The performance of the proposed method is investigated by numerical simulations.

Keywords: *nonlinear observer, invariant relations, nonlinear oscillators.*

В.Ф. Щербак, І.С. Дмитришин

Оцінка швидкості коливань осциляторних мереж.

Розглянуто задачу спостереження для системи взаємопов'язаних осциляторів. В якості математичних моделей кожного осцилятора мережі використовуються рівняння Льєнара – загальна модель нелінійних коливань матеріальної точки. Відповідні системи виникають при моделюванні багатьох біологічних, фізичних процесів, що мають циклічний характер. Запропоновано схему рішення задачі спостереження, що забезпечує отримання експоненційних оцінок швидкості кожного з осциляторів за інформацією про їхній стан. Для побудови відповідного нелінійного спостерігача використаний метод синтезу інваріантних співвідношень, що виражає невідомі як функції від відомих величин.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, нелінійні осцилятори.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск
`dmitrishin.ira@gmail.com`

Получено 18.09.18