УДК 517.5, 539.3
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-3

©2018. **С.В. Грищук**

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ У ДВОВИМІРНИХ КОМУТАТИВНИХ АЛГЕБРАХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПЛОСКОЇ ОРТОТРОПІЇ

Серед двовимірних комутативних, асоціативних алгебр з одиницею над полем комплексних чисел другого рангу знайдено опис алгебр $\mathbb{B}_0$ (складається з єдиної напівпростої алгебри), які містять базис (e_1, e_2), такий, що $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ для кожного фіксованого p, $-1 < p < 1$. Будуються $\mathbb{B}_0$-значні "аналітичні" функції $\Phi(xe_1 + ye_2)$ ((e_1, e_2) фіксований, x та y є дійсними змінними), такі, що їх дійснозначні компоненти-функції задовольняють рівняння для знаходження функції напружень u у випадку ортотропних плоских деформацій $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x, y) = 0$. Знайдено характеризацію розв'язків u даного рівняння у обмежених однозв'язних областях через дійсні компоненти функції Φ.

MSC: 30G35, 74B05.

Ключові слова: *анізотропне (ортотропне) середовище, комутативні алгебри, моногенні функції, функція напружень.*

1. Модель механіки суцільних середовищ.

Розглянемо однорідне плоске анізотропне тіло, що геометрично зображується у вигляді області D декартової площини xOy, а фізично підпорядковується узагальненому закону Гука вигляду

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\\ \sigma_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{1-(a_{12})^2} & 0 & -\frac{a_{12}}{1-(a_{12})^2}\\ 0 & \frac{1}{2(p-a_{12})} & 0\\ -\frac{a_{12}}{1-(a_{12})^2} & 0 & \frac{1}{1-(a_{12})^2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \gamma_{xy}\\ \varepsilon_y\end{pmatrix}, \tag{1}$$

що у оберненій формі перетворюється на

$$\varepsilon_x = \sigma_x + a_{12}\sigma_y,\ \gamma_{xy} = 2\,(p - a_{12})\,\tau_{xy},\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + \sigma_y, \tag{2}$$

де σ_x, τ_{xy}, σ_y і ε_x, $\frac{\gamma_{xy}}{2}$, ε_y є компонентами тензору напружень [3, с. 15] і деформацій [3, с. 16], відповідно, p — дійсне число.

Числова матриця (її елементи — дійсні числа) у правій частині рівності (1) (матриця *модулей пружності* [3, с. 25]) є додатньо визначеною (див., наприклад, [4]). Тому маємо систему нерівностей відносно a_{12}:

$$\begin{cases} \frac{1}{1-(a_{12})^2} > 0,\\ \frac{1}{2(p-a_{12})} > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Робота частково підтримана грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

Очевидно, що система (3) має непорожній розв'язок лише при $p > -1$.

Для випадку $p > -1$, одержуємо шукані числові проміжки (розв'язки системи (3)) для a_{12}:

$$-1 < a_{12} < p. \tag{4}$$

Випадок $p > 1$ розглянуто у [1, 2]. Значення $p = 1$ відповідає ізотропному середовищу.

Тому скрізь у даній роботі, будемо вважати, що p є довільним чином фіксованим числом, таким, що

$$-1 < p < 1. \tag{5}$$

Відмітимо також, що узагальнений закон Гука (1) (або (2)) відповідає плоскому випадку анізотропії, який називається *ортотропним* (див. [3, с. 33–34]), причому його частинному випадку.

Враховуючи узагальнений закон Гука (2), рівняння для знаходження функції напружень $u(x, y)$ $(\sigma_x(x_\circ, y_\circ) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_\circ, y_\circ)$, $\tau_{xy}(x_\circ, y_\circ) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_\circ, y_\circ)$, $\sigma_y(x_\circ, y_\circ) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_\circ, y_\circ)$ при всіх $(x_\circ, y_\circ) \in D)$ має вигляд (див., наприклад, [3–7]):

$$\widetilde{l}_p u(x, y) := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x, y) = 0. \tag{6}$$

Як зазначалось вище, рівняння (6) при $p \leq -1$ не має застосувань у плоскій анізатропній теорії пружності.

Рівняння (6) є частинним випадком *узагальненого бігармонічного рівняння* (даний термін вживається, наприклад, в [5, с. 603] або [8]), останнє відповідає загальному випадку плоскої анізотропії (за умови, що коефіцієнти підпорядковані відповідному узагальненому закону Гука) та є рівнянням для функції напружень.

Введемо для кожних комплексних чисел c_1, c_2, $c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2$, позначення:

$$l_p(c_1, c_2) := c_1^4 + 2pc_1^2 c_2^2 + c_2^4. \tag{7}$$

Характеристичне рівняння для (6) має вигляд

$$l_p(s, 1) \equiv s^4 + 2ps^2 + 1 = 0, s \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

його корені є комплексними і попарно різними:

$$\{s_1, s_2, \overline{s_1}, \overline{s_2}\} =: \ker l_p(s, 1), \tag{9}$$

де $\overline{x + iy} := x - iy \equiv \mathrm{Re}z - i\mathrm{Im}z$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ (i — уявна комплексна одиниця);

$$s_1 = P_1 - P_2 i, s_2 = -P_1 + P_2 i, P_1 = \frac{\sqrt{2(1-p)}}{2}, P_2 = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{2}. \tag{10}$$

Очевидно, що

$$(P_1)^2 + (P_2)^2 = 1,\ (P_1)^2 - (P_2)^2 = -p,\ P_1 P_2 = \frac{\sqrt{1-p^2}}{2},\ P_k \neq 0, k = 1, 2. \qquad (11)$$

З (10) та (11) одержуємо співвідношення між s_1 і s_2:

$$s_1 + s_2 = 0,\ s_1 s_2 = p + \sqrt{1-p^2}\, i,\ s_1 \neq s_1,\ s_1 \neq \overline{s_2}. \qquad (12)$$

2. Комутативні алгебри другого рангу над полем комплексних чисел та їх базиси, асоційовані з рівнянням (6)**.**

Знайдемо усі можливі асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e, які містять принаймні один базис (e_1, e_2), що задовольняє умову, асоційовану з рівнянням (6), а саме:

$$\mathcal{L}_p(e_1, e_2) := e_1^4 + 2p e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0. \qquad (13)$$

Крім того, розширимо поставлену задачу питанням про знаходження у шуканих алгебрах (або алгебрі у випадку, коли вона єдина) базисів (e_1, e_2), що задовольняють умову (13).

При $p > 1$ дана проблема поставлена та розв'язана у [1], а при $p = 1$ — схожа проблема (з додатковою умовою: $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$) у [9].

Як відомо (див. [10]), існує (з точністю до ізоморфізму) дві асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e. Це алгебри, породжені базисами (e, ρ), (e, ω), відповідно:

$$\mathbb{B} := \{c_1 e + c_2 \rho : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\},\ \rho^2 = 0, \qquad (14)$$

$$\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2 \omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\},\ \omega^2 = e. \qquad (15)$$

Очевидно, що алгебра $\mathbb{B}_0$ є напівпростою (див. означення, наприклад, у [11, с. 37]), містячи базис з ортогональних ідемпотентів $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, де

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}(e + \omega),\ \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}(e - \omega),\ \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = 0. \qquad (16)$$

Очевидно, що

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = e,\ \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \omega. \qquad (17)$$

Зв'язок алгебри (15) з алгебрами, які є загальновживаними у зарубіжних наукових працях, наведено у [1].

Оскільки алгебра $\mathbb{B}$ містить ненульовий радикал $\{c\rho : c \in \mathbb{C}\}$ (див. [12]), то алгебра $\mathbb{B}$ не є напівпростою. Елемент $a = c_1 e + c_2 \rho$ з $\mathbb{B}$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $c_1 \neq 0$, у випадку виконання цієї умови справедлива рівність: $a^{-1} = \frac{1}{c_1} e - \frac{c_2}{(c_1)^2} \rho$ (див. [13]).

Теорема 1. *Алгебра $\mathbb{B}$ не містить жодного базису* (e_1, e_2)*, що задовольняє умову* (13).

Існує множина потужності континуум, що складаєтьса з базисів (e_1, e_2), $e_k \in \mathbb{B}_0$, $k = 1, 2$, *які задовольняють* (13):

$$e_1 = \alpha\,\mathcal{I}_1 + \beta\,\mathcal{I}_2, e_2 = \widetilde{s}_1\alpha\,\mathcal{I}_1 + \widetilde{s}_2\beta\,\mathcal{I}_2\,\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{18}$$

де $\widetilde{s}_1 \neq \widetilde{s}_2$, $\widetilde{s}_k \in \ker l_p(s, 1)$, $k = 1, 2$.

Доведення. Нехай існують шукані базиси у алгебрі $\mathbb{B}$. Тоді $e_k = \alpha_k e + \beta_k\rho$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\beta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, $\Delta_{e_1,e_2} := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Розглянемо два можливі випадки:

1) Існує обернений елемент e_2^{-1} до e_2: $e_2^{-1}e_2 = e$.

2) Не існує e_2^{-1}.

Нехай має місце випадок 1). Тоді існують $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, такі, що $e_1 e_2^{-1} = \alpha e + \beta\rho =: E$.

Доведемо, що $\beta \neq 0$. Нехай $\beta = 0$, тоді $e_1 e_2^{-1} = \alpha e$, $\alpha \neq 0$. Домножаючи останню рівність на e_2, приходимо до: $e_1 = \alpha e_2$, що суперечить співвідношенню $\Delta_{e_1,e_2} \neq 0$. Отже, $\beta \neq 0$.

Враховуючи, що $E^2 = \alpha^2 e + 2\alpha\beta\rho$, $E^4 = \alpha^4 e + 4\alpha^3\beta\rho$, одержуємо після множення обох частей рівності (13) на $(e_2^{-1})^4$ ланцюжок рівностей:

$$0 = (e_2^{-1})^4\mathcal{L}_p(e_1, e_2) = L_p(E, e) \equiv l_p(\alpha, 1)e + 4\alpha\beta\left(\alpha^2 + p\right)\rho.$$

Тому, маємо систему рівнянь: $l_p(\alpha, 1) = 0, \alpha\beta\left(\alpha^2 + p\right) = 0$. Беручи до уваги рівності (9), (10) та нерівності (5), $\beta \neq 0$, приходимо до висновку, що дана система не має розв'язків.

Нехай має місце випадок 2). Тоді базисні елементи подаються у вигляді: $e_2 = \alpha_2\rho$, $\alpha_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $e_1 = \alpha_1 e + \beta_1\rho$. Встановлюємо, що $\alpha_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, оскільки у протилежному випадку $\Delta_{e_1,e_2} = 0$. Тому, одержуємо нерівність $\mathcal{L}_p(e_1, e_2) = e_1^4 \equiv \alpha_1^4 e + 4\alpha_1^3\beta_1\rho \neq 0$, що протирічить умові (13).

Тому не існує базисів (e_1, e_2), $e_k \in \mathbb{B}$, $k = 1, 2$, що задовольняють умову (13).

Безпосередня перевірка показує, що базиси (18) задовольняють умову (13).

Теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що при при $p > 1$ аналогічна теорема доведена у [1], там знайдено усі шукані базиси.

У даній роботі акцентуємо увагу на базисі з (18) у випадку $\alpha = \beta = 1$, а саме:

$$e_1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \equiv e,\; e_2 = \widetilde{s}_1\mathcal{I}_1 + \widetilde{s}_2\,\mathcal{I}_2, \tag{19}$$

де

$$(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) \in \left\{(s_1, s_2),\, (\overline{s_1}, \overline{s_2}),\, (s_1, \overline{s_2}),\, (\overline{s_1}, s_2),\, (s_2, \overline{s_1}),\, (\overline{s_2}, s_1),\, (\overline{s_2}, \overline{s_1}),\, (s_2, s_1)\right\}, \tag{20}$$

тобто $\widetilde{s}_k, k = 1, 2$, крім умов теореми 1 задовольняють ще одну додаткову: $\widetilde{s}_1 \neq \overline{\widetilde{s}_2}$.

Зауважимо, що формула (19) описує також усі базиси (e_1, e_2), що задовольняють умову (13) з точністю до перестановки (термін вживається у [1]) для випадку, коли один з базисних елементів співпадає з одиницею алгебри e, а другий має коефіцієнти $A_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, відповідно при ідемпотентах $\mathcal{I}_k, k = 1, 2$, що задовольняють умову: $A_1 \neq \overline{A_2}$.

З (19) одержуємо вираження ідемпотентів $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2$, через e_k, $k = 1, 2$:

$$\mathcal{I}_1 = \widetilde{s}_2 s_{12}\, e_1 - s_{12}\, e_2,\, \mathcal{I}_2 = -\widetilde{s}_1 s_{12}\, e_1 + s_{12}\, e_2, \tag{21}$$

де

$$s_{12} := \frac{1}{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}.$$

З урахуванням (19) та (21) одержуємо рівності

$$e_1 = e,\, e_1 e_2 = e_2,\, e_2^2 = -\widetilde{s}_1 \widetilde{s}_2\, e_1 + (\widetilde{s}_1 + \widetilde{s}_2)\, e_2. \tag{22}$$

3. Моногенні функції площини, породженої елементами (20)**.**

Розглянемо площину $\mu_{e_1,e_2} := \{xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, де e_k, $k = 1, 2$, визначаються рівностями (19).

Нехай D є областю декартової площини xOy. Позначимо: $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2} : (x, y) \in D\}$.

Надалі, вважатимемо: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2}$.

Зауважимо, що якщо кожен елемент $\zeta \in \mu_{e_1,e_2} \setminus \{0\}$ є оборотним.

Розглядаємо *моногенні* в D_ζ функції, тобто функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ вигляду:

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2, \tag{23}$$

що мають класичну похідну $\Phi'(\zeta)$ в кожній точці ζ з D_ζ:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mu_{e_1,e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}\,. \tag{24}$$

Кожну компоненту $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, з (23) позначаємо через $\mathrm{U}_k\,[\Phi]$, тобто $\mathrm{U}_k\,[\Phi(\zeta)] := U_k(x, y)$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$.

Аналогічно [1, Теорема 2] встановлюємо наступну теорему.

Теорема 2. *Функція* $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ *є моногенною в області* D_ζ *тоді і тільки тоді, коли її компоненти* $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $k = \overline{1, 4}$*, з розкладу* (23) *диференційовні в області* D *та виконується наступний аналог умов Коші – Рімана*:

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y}\, e_1 = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 \quad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\,. \tag{25}$$

Підставляючи у (25) розклад (23), далі, використовуючи (22), одержуємо покомпонентну форму рівності (25) у вигляді системи чотирьох рівнянь відносно компонент U_k, $k = \overline{1,4}$, функції (23):

$$\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} = -\mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} + \mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y} = -\mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} - \mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial U_1(x,y)}{\partial x} + \mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} - \\ &- \mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x} + \mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} + \\ &+ \mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x},\end{aligned} \tag{29}$$

для кожного $(x,y) \in D$.

Для змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2}$ (або $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) та довільним чином фіксованої пари $(\widetilde{s_1}, \widetilde{s_2})$ з (20) введемо до розгляду комплексні змінні $Z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1,2$, за допомогою формул

$$Z_k = x + \widetilde{s}_k y, k = 1,2, \tag{30}$$

а також області комплексної площини:

$$D_{Z_k} := \{Z_k = x + \widetilde{s}_k y \in \mathbb{C} : xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\}, k = 1,2. \tag{31}$$

З рівностей (19) випливає, що змінна ζ подається у вигляді

$$\zeta = Z_1\mathcal{I}_1 + Z_2\mathcal{I}_1. \tag{32}$$

Аналогічно [1, Теорема 3] встановлюємо наступну теорему.

Теорема 3. *Функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області D_ζ тоді і тільки тоді, коли має місце рівність*

$$\Phi(\zeta) = F_1\,(Z_1)\,\mathcal{I}_1 + F_2\,(Z_2)\,\mathcal{I}_2 \;\forall\zeta \in D_\zeta, \tag{33}$$

де F_k є деякою голоморфною функцію комплексної змінної Z_k в області D_{Z_k}, відповідно при $k = 1,2$.

Оскільки з існування границі (24) випливає, що функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є неперервною, то функція Φ є також моногенною у сенсі робіт [14–16] (неперервні і диференційовні за Гато у напрямку додатних променів). Для позначення останньої моногенності будемо вживати термін G^+-*моногенність*. Аналогічно випадку $p > 1$, де показано, що G^+-моногенні функції зображаються у вигляді (33) (див. [1, 14–16]), доводимо аналогічне твердження для випадку $-1 < p < 1$. Тому, як і при $p > 1$, обидва види моногенності (моногенність у сенсі рівності (24) та G^+-моногенність) співпадають.

Підставляючи (21) у (33), та, замінюючи, без втрати загальності, $s_{12}\widetilde{s}_2 F_1$ на F_1, а $(-s_{12}\widetilde{s}_1)F_2$ на F_2, одержуємо зображення моногенної функції Φ за базисом (19) у вигляді

$$\Phi(\zeta) = (F_1(Z_1) + F_2(Z_2))\, e_1 - \left(\frac{1}{\widetilde{s}_2}F_1(Z_1) + \frac{1}{\widetilde{s}_1}F_2(Z_2)\right) e_2\, \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{34}$$

4. Моногенні функції площини, породженої елементами (20)**, та рівняння** (6)**.**

З теореми 3 випливає, що моногенна функція (23) має похідні довільного порядку $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Наслідком цього є рівності

$$\widetilde{l}_p \Phi(\zeta) = \mathcal{L}_p(e_1, e_2)\Phi(\zeta) \equiv 0\, \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{35}$$

З (35) та моногенності $\widetilde{l}_p \Phi$ випливають рівності

$$\mathrm{U}_k \left[\widetilde{l}_p \Phi(\zeta)\right] = 0\, \forall \zeta \in D_\zeta, k = \overline{1, 4}, \tag{36}$$

тобто, дійснозначні компоненти-функції $U_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k = \overline{1, 4}$, з (23) задовольняють рівняння (6) в області D.

З рівності (34) випливає, що компоненти $U_k(x, y) = \mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)]$, $k = \overline{1, 4}$, моногенної функції Φ, є нескінченно диференційовними в області D. Таку саму гладкість мають компоненти $U_k, k = \overline{1, 4}$, розв'язків систему рівнянь (26) – (29)

Будемо вважати тут і надалі, що область D є обмеженою і однозв'язною.

Відомо (див., наприклад, [3, §20, с. 136] або [4]), що загальний розв'язок рівняння (6) подається у вигляді:

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, (F_1(Z_1) + F_2(Z_2))\ \ \forall (x, y) \in D, \tag{37}$$

$F_k \colon D_{Z_k} \longrightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2,$ — довільні аналітичні функції відповідних комплексних змінних.

Користуючись (34), переписуємо рівність (37) у вигляді

$$u(x, y) = \mathrm{U}_1[\Phi(\zeta)]\ \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{38}$$

де $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ — довільна моногенна функція.

Позначемо через $\mathbf{V}_0 := (U_{10}, U_{20}, U_{30}, U_{40})$, де $U_{10} \equiv 0$, $U_{k0} := U_k \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{2, 4}$, є нескінченно диференційовними в D функціями, що задовольняють систему рівнянь (26)–(29). Зауважимо, що $\mathbf{V}_0$ є загальним розв'язком розв'язком системи (26)–(29) з $U_1 \equiv 0$.

Нехай $\Phi_{1,0} \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є довільною моногенною функцією, такою, що $\mathrm{U}_k[\Phi_{1,0}] = U_{k0}$, $k = \overline{1, 4}$.

Для фіксованого розв'язку u рівняння (6) справедливий обернений результат про його подання через моногенні функції Φ.

Теорема 4. *Нехай u — певний розв'язок рівняння* (6). *Деякі аналітичні функції $F_k\colon D_{Z_k} \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, задовольняють рівність* (37). *Моногенна функція $\Phi_{12}\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ задовольняє умову*

$$\mathrm{U}_1\left[\Phi_{12}(\zeta)\right] + i\mathrm{U}_2\left[\Phi_{12}(\zeta)\right] = F_1(Z_1) + F_2(Z_2)\,\forall\zeta \in D_\zeta. \tag{39}$$

Усі моногенні функції Φ, такі, що

$$\mathrm{U}_1\left[\Phi\right] = u(x, y)\,\forall(x, y) \in D, \tag{40}$$

подаються у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \Phi_{12}(\zeta) + \Phi_{1,0}(\zeta)\,\forall\zeta \in D_\zeta. \tag{41}$$

Доведення. Доведення теореми випливає з вищенаведених міркувань та лінійності операції $\mathrm{U}_1\left[\cdot\right]$. $\square$

Зауважимо, що аналогічні твердження до теореми 4 можна встановити для інших компонент $U_k = \mathrm{U}_k\left[\Phi\right]$, $k \in \{2, 3, 4\}$.

Розглянемо випадки, коли $\Phi_{1,0}$ знаходиться у явному вигляді. Нехай $\widetilde{s}_k := s_k$, $k = 1, 2$. Тоді, використовуючи (12) для системи рівнянь з частинними похідними першого порядку (26) – (29) з $U_1 \equiv 0$, та здійснюючи елементарні перетворення, приходимо до рівносильної системи

$$\frac{\partial U_3(x, y)}{\partial x} = -\sqrt{1 - p^2}\,\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial U_4(x, y)}{\partial x} = -p\,\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial U_3(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial U_4(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U_2(x, y)}{\partial x}, \tag{45}$$

для кожного $(x, y) \in D$.

Оскільки $\widetilde{l}_p\,(U_3) = 0$ *в області* D (далі, для спрощення запису, будемо, при нагоді, опускати дане словосполучення), то підставляючи (44) у зазначене вище рівняння, приходимо до рівності $\frac{\partial^4 U_3}{\partial x^4} = 0$, тому з використанням останньої рівності та рівнянь-наслідків з (44) виду $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^k U_3}{\partial x^k}\right) = 0$ ($k \in \{3, 2, 1, 0\}$), одержуємо послідовним інтегруванням рівності

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^3} = const,\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} = P_1(x),\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x} = P_2(x),\ U_3 = P_3(x),$$

де $const$ позначає довільну дійсну сталу, $P_k(x)$ є поліномом відносно дійсної змінної x з (довільними) дійсними коефіцієнтами, що є не вище k-го степеня для кожного $k \in \{1, 2, 3\}$.

Отже, доведена рівність

$$U_3(x, y) = P_3(x) \ \forall (x, y) \in D. \tag{46}$$

Підставляючи (46) у (42), одержуємо

$$\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y} = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p^2 - 1} \, P_3'(x) \ \forall (x, y) \in D, \tag{47}$$

де P_3' позначає похідну від P_3.

Підставляючи тепер вже (47) у (43), маємо

$$\frac{\partial U_4(x, y)}{\partial x} = \frac{p\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \, P_3'(x) \ \forall (x, y) \in D. \tag{48}$$

Підставляючи (47) у рівняння, що одержується з (45) при диференціюванні обох частин за змінною y, приходимо до рівності

$$\frac{\partial^2 U_4(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p^2 - 1} \, P_3''(x) \ \forall (x, y) \in D. \tag{49}$$

Для P_3 введемо позначення:

$$P_3(x) = \frac{a}{6} \, x^3 + \frac{b}{2} \, x^2 + cx + d, \tag{50}$$

де a, b, c, d — довільні дійсні сталі.

Здійснюючи міркуванням для рівностей (48) і (49) з урахуванням (46), аналогічні тим, що застосовувались при доведенні (49), приходимо до рівності

$$U_4(x, y) = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \left(p \left(\frac{a}{6} \, x^3 + \frac{b}{2} \, x^2 + c \, x \right) - (ax + b) \left(\frac{y^2}{2} + e \, y \right) + f \right) \ \forall (x, y) \in D, \tag{51}$$

де e, f — довільні дійсні сталі.

З урахуванням (51) рівності (45), (47) набувають, відповідно, вигляду

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -\frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} (ax + b)(y + e), \ \frac{\partial U_2}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \left(\frac{a}{2} \, x^2 + bx + c \right).$$

Звідки інтегруванням знаходимо U_2, одержуємо рівність

$$U_2(x, y) = -\frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \left(\left(\frac{a}{2} \, x^2 + bx \right) (2y + e) + cy + g \right) \ \forall (x, y) \in D \tag{52}$$

(g — довільна дійсна стала).

Отже, шукана $\Phi_{1,0}$ має компоненти $\mathrm{U}_k \left[\Phi_{1,0} \right] = U_k$, $k = \overline{1, 4}$, де $U_1 \equiv 0$, U_2 визначається рівністю (52), U_3 — формулами (46) і (50), U_4 — рівністю (51), в усіх рівностях a, b, c, d, e, f, g позначають довільні дійсні сталі.

Цитована література

1. *Грищук С.В.* Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 8. – С. 1058–1071.
2. *Грищук С.В.* Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. II // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 10. – С. 1382–1389.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Шерман Д.И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды // Труды сейсм. ин-та АН СССР. – 1938. – № 86. – С. 51–78.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
6. *Фридман М.М.* Математическая теория упругости анизотропных сред // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 3. – С. 321–340.
7. *Боган Ю.А.* Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 17–26.
8. *Михлин С.Г.* Плоская задача теории упругости // Труды сейсм. ин-та АН СССР. – 1934. – № 65. – 83 с.
9. *Мельниченко И.П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 2. – С. 252–254.
10. *Study E.* Über systeme complexer zahlen und ihre anwendungen in der theorie der transformationsgruppe. Monatshefte für Mathematik. – 1890. – **1**, No. 1. –P. 283–354.
11. *Чеботарев Н.Г.* Введение в теорию алгебр. – Изд. 3-е. /Физико-математическое наследие: математика (алгебра). – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 88 с.
12. *Ковалев В.Ф., Мельниченко И.П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25–27.
13. *Грищук С.В., Плакса С.А.* О логарифмичном вычете моногенных функций бигармонической переменной. Комплексний аналіз і течії з вільними границями // Зб. праць Ін-ту матемематики НАН України. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 227–234.
14. *Плакса С.А., Пухтаєвич Р.П.* Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі // Доповіді НАН України. – 2014. – № 1. – С. 14–21.
15. *Plaksa S.A., Pukhtaievych R.P.* Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2014. – **22**, No. 1. – P. 221–235.
16. *Shpakivskyi V.S.* Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. – 2015. – **12**, № 3. –P. 251–268.

References

1. Gryshchuk, S.V. (2018). Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I. *Ukr. Mat. Zh., 70*(8), 1058-1071 (in Ukrainian).
2. Gryshchuk, S.V. (2018). Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. II. *Ukr. Mat. Zh., 70*(10), 1382-1389 (in Ukrainian).
3. Lekhnitskii, S.G. (1981) *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.* Moscow: MIR Publishers.
4. Sherman, D.I. (1938). The plane problem of the theory of elasticity for an anisotropic medium. *Tr. Seism. Inst. Akad. Nauk SSSR, 86*, 51-78 (in Russian).
5. Muskhelishvili, N.I. (1977). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Springer Netherlands.
6. Fridman, M.M. (1950). Mathematical theory of elasticity in the anisotropic media. *Prikl. Mat. Mech., 14*(3), 321-340 (in Russian).
7. Bogan, Yu.A. (2005). Regular integral equations for the second boundary value problem in anisotropic two-dimensional theory of elasticity. *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela, 4*, 17-26 (in Russian).
8. Mikhlin, S.G. (1935). The plane problem of the theory of elasticity. *Tr. Seism. Inst. Akad. Nauk SSSR, 65* (in Russian).

9. Mel'nichenko, I.P. (1986). Biharmonic bases in algebras of the second rank. *Ukr. Mat. Zh., 38*(2), 224-226 (in Russian). Translation in (1986) *Ukr. Math. J., 38*(2), 252-254.
10. Study, E. (1890). Über systeme complexer zahlen und ihre anwendungen in der theorie der transformationsgruppe. *Monatshefte für Mathematik, 1*(1), 283-354.
11. Chebotarev, N.G. (2008). *Introduction to the Theory of Algebras.* Moscow: Publ. House "LKI" (in Russian).
12. Kovalev, V.F., Mel'nichenko, I.P. (1981). Biharmonic functions on the biharmonic plane. *Reports Acad. Sci. USSR, ser. A., 8*, 25-27 (in Russian).
13. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2010). On logarithmic residue of monogenic functions of biharmonic variable. In *Complex analysis and flows with free boundaries. Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 7*(2), 227-234 (in Russian).
14. Plaksa, S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional semisimple commutative algebra. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., 1*, 14-21 (in Ukrainian).
15. Plaksa, S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra. *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 22*(1), 221-235.
16. Shpakivskyi, V.S. (2015). Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 12*(3), 251-268.

S.V. Gryshchuk

Monogenic functions in two dimensional commutative algebras to equations of plane orthotropy.

Among all two-dimensional commutative and assosiative algebras of the second rank with the unity e over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ we find a semi-simple algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2\}$, $\omega^2 = e$, containing a basis (e_1, e_2), such that $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ for any fixed p such that $-1 < p < 1$. A domain $\mathcal{B}_1 = \{(e_1, e_2)\}$, $e_1 = e$, is discribed in an explicit form. We consider an approach of $\mathbb{B}_0$-valued "analytic" functions $\Phi(xe_1 + ye_2) = U_1(x,y)e_1 + U_2(x,y)ie_1 + U_3(x,y)e_2 + U_4(x,y)ie_2$ ($(e_1, e_2) \in \mathcal{B}$, x and y are real variables) such that their real-valued components U_k, $k = \overline{1,4}$, satisfy the equation on finding the stress function u in the case of orthotropic plane deformations (with absence of body forses): $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0$ for every $(x,y) \in D$, where D is a domain of the Cartesian plane xOy. A characterization of solutions u for this equation in a bounded simply-connected domain via real components U_k, $k = \overline{1,4}$, of the function Φ is done in the following sense: let D be a bounded and simply-connected domain, a solution u is fixed, then u is a first component of monogenic function Φ_u. The variety of such Φ_u is found in a complete form. We consider a particular case of $(e, e_2) \in \mathcal{B}_1$ for which Φ_u can be found in an explicit form. For this case a function Φ_u is obtained in an explicit form. Note, that in case of orthotropic plane deformations, when Eqs. of the stress function is of the form: $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0$, here p is a fixed number such that $p > 1$, a similar research is done in [*Gryshchuk S. V.* Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I. Ukr. Mat. Zh. 2018. **70**, No. 8. pp. 1058–1071 (Ukrainian); *Gryshchuk S. V.* Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. II. Ukr. Mat. Zh. 2018. **70**, No. 10. pp. 1382–1389 (Ukrainian)].

Keywords: *anisotropic (orthotropic) media, commutative algebras, monogenic functions, stress function.*

С.В. Грищук

Моногенные функции в двумерных коммутативных алгебрах для уравнений плоской ортотропии.

Среди двумерных коммутативных, ассоциативных алгебр второго ранга с единицей над полем комплексных чисел найдено множество алгебр $\mathbb{B}_0$ (состоит из одной полупростой алгебры), которые содержат базисы (e_1, e_2), такие, что $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ для каждого фиксированного p, $-1 < p < 1$. Построены $\mathbb{B}_0$-значные "аналитические" функции $\Phi(xe_1 + ye_2)$ ((e_1, e_2) фиксирован, x и y — действительные переменные), такие, что их вещественнозначные компоненты-функции удовлетворяют уравнению для функции напряжений u в случае плоских ортотропных деформаций $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u(x, y) = 0$. Найдена характеризация решений u данного уравнения, рассматриваемого в ограниченных односвязных областях, через вещественнозначные компоненты функции Φ.

Ключевые слова: *анизотропная (ортотропная) среда, коммутативные алгебры, моногенные функции, функция напряжений.*

Інститут математики НАН України, Київ *Отримано 03.11.18*
`serhii.gryshchuk@gmail.com`