УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-6

©2019. **І.В. Денега**

ОЦІНКА ДОБУТКІВ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ОБЛАСТЕЙ З ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ СИМЕТРІЇ

У даній роботі розглядається проблема про максимум добутку внутрішніх радіусів n областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, та містять точки розширеної комплексної площини, і ступеня γ внутрішнього радіусу області, що містить точку нуль. Одержано оцінку зверху максимума даного добутку при всіх значеннях $\gamma \in (0, n]$. Основний результат роботи також узагальнює та посилює результати попередників [1–4] на випадок довільного розташування систем точок на $\overline{\mathbb{C}}$.

MSC: 30C75.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, області, що не перетинаються, функція Гріна, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі, нерівність Коші.*

Нехай $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Нехай $r(B, a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ [1 – 9].

В геометричній теорії функцій велику роль відіграють специфічні способи вимірювання замкнутих множин на комплексній площині. Один з таких способів був даний Фекете в 1923 році. Згідно з теоремою Сеге, введений Фекете трансфінітний діаметр дорівнює логарифмічній ємності і виражається через енергію Вінера з логарифмічним ядром. Природнім узагальненням логарифмічної ємності є ємність Робена. В роботі Дюрена, Пфальцграффа і Турмана доведена формула, що пов'язує ємність Робена та енергію Вінера, в ролі ядра якої замість логарифмічної функції є функція Неймана. Відмітимо, що в теорії потенціала введені поняття ємності, енергії Вінера, трансфінітного діаметра і сталої Чебишева відносно довільного ядра і досить добре вивчений зв'язок між ними.

Для компакта E його логарифмічна ємність визначається наступними рівностями:

$$cap\, E := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}}\backslash E, \infty)},$$

якщо величина $r(\overline{\mathbb{C}}\backslash E, \infty)$ скінченна; $cap\, E := 0$ – в іншому випадку.

Наприклад, трансфінітний діаметр будь-якого кола дорівнює його радіусу, трансфінітний діаметр будь-якого прямолінійного відрізка дорівнює чверті його довжини [7].

Система точок $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, називається n-променевою, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$ і $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Позначимо при цьому

$$a_{n+1} := a_1, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Нехай $\mathbb{U}$ – відкритий одиничний круг з центром в початку координат, $\partial\mathbb{U}$ – одиничне коло. Вважатимемо, що область D_0 належить до класу Λ, якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ та $\left(\overline{\mathbb{C}} \backslash D_0\right) \cap \partial\mathbb{U}$ містить хоча б одну невироджену дугу одиничного кола.

Вважатимемо, що область $D_0 \in \Lambda$ належить до класу Δ, якщо $\overline{D_0} \subset \mathbb{U}$, очевидно, що $\Delta \subset \Lambda$. Систему непересічних областей D_1, D_2, ..., D_n, будемо називати системою областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю D_0, $D_0 \in \Lambda$, якщо має місце наступне співвідношення

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_k \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{ D_0 \cup \widetilde{D_0} \right\},$$

де $\widetilde{D_0}$ – область, симетрична D_0 відносно одиничного кола. Очевидно, що D_0, D_1, D_2, ..., D_n – система областей, що взаємно не перетинаються.

Проблема. При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right), \tag{1}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – n-променева система точок, $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ – довільна система областей, що взаємно не перетинаются, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, і описати всі екстремалі.

Використовуючи міркування леми 1 роботи [5] ми отримуємо справедливість наступної оцінки зверху добутку (1).

Теорема. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}/\{0\}$ та будь-якого набору областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, де $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ – система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \tag{2}$$

Дана теорема узагальнює та посилює результати робіт [1–4] на випадок довільного розташування систем точок на $\overline{\mathbb{C}}$.

Доведення. Нехай $d(E)$ – трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Тоді має місце наступне співвідношення

$$r\left(D_0, 0\right) = r\left(D_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_0^+\right)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{D}_k^+\right)}, \tag{3}$$

де $D^+ = \left\{z : \frac{1}{z} \in D\right\}$. Згідно із теоремою Пойа [6], справедлива нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де μE – лебегова міра компактної множини E. Звідси

$$d(E) \geqslant \left(\frac{1}{\pi}\mu E\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, використовуючи (3), маємо

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{D}_k^+\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{D}_k^+\right)}} = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu \overline{D}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

За теоремою про мінімізацію площі [7] одержуємо, що

$$\mu(D) \geqslant \pi r^2\left(D, a\right).$$

Із нерівності (4), маємо

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu \overline{D}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu D_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} r^2\left(D_k^+, a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r^2\left(D_k^+, a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна

$$g_{D_k}(z, a_k) = g_{D_k^+}(w^+, a_k^+), \quad w^+ = \frac{1}{z}, \quad a_k^+ = \frac{1}{a_k},$$

маємо

$$g_{D_k^+}(w^+, a_k^+) = g_{D_k^+}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{a_k}\right) = \ln\frac{1}{\left|\frac{1}{z} - a_k^+\right|} + \ln r(D_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Виконавши нескладні перетворення, одержуємо

$$g_{D_k^+}(w^+, a_k^+) = \ln \frac{|z|}{|1 - z a_k^+|} + \ln r(D_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln |a_k|^2 + \ln \left|1 - \frac{1}{a_k}(z - a_k)\right| + \ln r(D_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln |a_k|^2 r(D_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Таким чином,

$$r\left(D_k^+, a_k^+\right) = \frac{r\left(D_k, a_k\right)}{|a_k|^2}$$

і приходимо до наступної нерівності

$$r\left(D_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далі,

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Із нерівності Коші отримуємо

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(D_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(D_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси маємо, що

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(D_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left[n \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(D_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{\gamma}{2}} = n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}.$$

І, таким чином,

$$I_n(\gamma) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)}{n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}} = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

Нерівність (2) даної теореми доведена. □

Зауваження. *Якщо* $\gamma = n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$, *тоді при всіх умовах вище сформульованої теореми має місце нерівність*

$$r^n\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}}.$$

У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

Використовуючи нерівність [8]

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leqslant 2^n \cdot \mathcal{L}(A_n) \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

$$\mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|, \quad \chi(t) := \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right),$$

доведену для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ і довільної системи областей, що взаємно не перетинаються, $\{D_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, одержуємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* n-*променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такої, що* $\mathcal{L}(A_n) = 1$, *і будь-якого набору областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *де* $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ *– система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Delta$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

У випадку, якщо $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$, тоді має місце наступний результат.

Наслідок 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді при всіх умовах наслідку 1 справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

З міркувань доведення вище сформульованої теореми для випадку, коли $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, маємо наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *одиничного кола та будь-якого набору непересічних областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *де* $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ *– система областей, що взаємно* *не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0 \in \Lambda$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Екстремальні задачі інших типів, пов'язаних з теорією відображень, оцінками ємності і модуля, а також точними оцінками інтегралів з вагою, розглядалися в роботах [10–15].

Автор висловлює подяку рецензенту статті за уважне прочитання роботи і зроблені зауваження.

Цитована література

1. *Бахтина Г.П.* Конформные радиусы симметрических неналегающих областей // Проблеми дійсного і комплексного аналізу. – 1984. – 149. – С. 21–27.
2. *Ковалев Л.В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 6. – С. 82–87.
3. *Ковалев Л.В.* О трех непересекающихся областях // Дальневосточный матем. журнал. – 2000. – 1, № 1. – С. 3–7.
4. *Dubinin V.N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. – Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
5. *Bakhtin A.K.* Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. – 2018. – V. 234, No. 1. –P. 1–13.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М: Физмат лит., 1962.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.
8. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2008. – 308 с.
9. *Hayman V.* Multivalent functions. – Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
10. *Afanas'eva E.S.* Generalized quasi-isometries on smooth Riemannian manifolds // Mathematical Notes. – 2017. – V. 102, No. 1–2. – P. 12–21.
11. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Singularities of discrete open mappings with controlled p-module // J. Anal. Math. – 2015. – V. 127. – P. 303–328.
12. *Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // J. Math. Sci. – 2015. – V. 210, No. 1. – P. 22–51.
13. *Klishchuk B.A., Salimov R.R.* Lower bounds for the area of the image of a circle // Ufa Math. J. – 2017. – V. 9, No. 2. – P. 55–61.
14. *Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A.* On convergence analysis of space homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. – 2013. – V. 23, No. 4. – P. 263–293.
15. *Sevost'yanov E. A.* On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions // Ukrainian Math. J. – 2009. – V. 61, No. 10. – P. 1610–1623.

References

1. Bakhtina, G.P. (1984). Conformal radii of symmetric nonoverlapping domains, *Current problems in real and complex analysis*, 21-27, 149, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev (in Russian).

2. Kovalev, L.V. (2000). On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, *6*, 77-78 (in Russian).
3. Kovalev, L.V. (2000). On three disjoint domains. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, *1*(1), 3-7 (in Russian).
4. Dubinin, V.N. (2014). *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser/Springer, Basel.
5. Bakhtin, A.K. (2018). Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci., 234*(1), 1-13.
6. Polya, G., Szego, G. (1962). *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* M., Fizmatgiz (in Russian).
7. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable.* Amer. Math. Soc. Providence, R.I.
8. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* (in Russian).
9. Hayman, V. (1958). *Multivalent functions.* Cambridge University Press, Cambridge.
10. Afanas'eva, E.S. (2017). Generalized quasi-isometries on smooth Riemannian manifolds. *Mathematical Notes, 102*(1-2), 12-21.
11. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2015). Singularities of discrete open mappings with controlled p-module. *J. Anal. Math., 127*, 303-328.
12. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *J. Math. Sci., 210*(1), 22-51.
13. Klishchuk, B.A., Salimov, R.R. (2017). Lower bounds for the area of the image of a circle. *Ufa Math. J., 9*(2), 55-61.
14. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2013). On convergence analysis of space homeomorphisms. *Siberian Advances in Mathematics, 23*(4), 263-293.
15. Sevost'yanov, E.A. (2009). On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions. *Ukrainian Math. J., 61*(10), 1610-1623.

I.V. Denega

Estimation of the products of the inner radii of domains with an additional symmetry condition.

In geometric function theory of complex variable extremal problems on non-overlapping domains are well-known classic direction. A lot of such problems are reduced to determination of the maximum of product of inner radii on the system of non-overlapping domains satisfying a certain conditions. Based on these elementary estimates a number of new estimates for functions realizing a conformal mapping of a disc onto domains with certain special properties are obtained. Estimates of this type are fundamental to solving some metric problems arising when considering the correspondence of boundaries under a conformal mapping. Also, on the basis of the results concerning various extremal properties of conformal mappings, the problem of the representability of functions of a complex variable by a uniformly convergent series of polynomials is solved. In this paper, we consider the problem on maximum the products of the inner radii of n disjoint domains with an additional symmetry condition that contain points of extended complex plane and the degree γ of the inner radius of the domain that contains the zero point. An upper estimate for the maximum of this product is found for all values of $\gamma \in (0, n]$. The main result of the paper generalizes and strengthens the results of the predecessors [1–4] for the case of an arbitrary arrangement of points systems on $\overline{\mathbb{C}}$. In proving the main theorem, the arguments of proving of Lemma 1 [5] and the ideas of proving Theorem 1 [3] played a key role.

We also established the conditions under which the structure of points and domains is not important. The corresponding results are obtained for the case when the points are placed on the unit circle and in the case of any fixed n-radial system of points.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, the Green function, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area, the Cauchy inequality.*

Інститут математики НАН України, Київ
`iradenega@gmail.com`

Отримано 19.05.19