УДК 004.655
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-9

©2019. **Н.Д. Кахута, О.С. Сенченко**

ВИКОРИСТАННЯ ПОВНОГО ОБРАЗУ ТА ОБМЕЖЕННЯ В ДОСЛІДЖЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕЯКИХ СИГНАТУРНИХ ОПЕРАЦІЙ ТАБЛИЧНИХ АЛГЕБР

У роботі використано властивості повного образу множини відносно бінарного відношення та обмеження бінарного відношення за множиною для дослідження деяких сигнатурних операцій табличних алгебр. Конструкції повного образу та обмеження є загальнозначущими для математики та табличних алгебр, які є сучасним аналогом відомих реляційних алгебр Кодда, що становлять теоретичний фундамент мов запитів сучасних реляційних баз даних. Елементи носія табличних алгебр уточнюють реляційні структури даних, а операції побудовані на базі основних маніпуляцій у SQL-подібних мовах. Одержано такі результати в дослідженні властивостей повного образу та обмеження: знайдено взаємозв'язки між повним образом та обмеженням; доведено монотонність і дистрибутивність повного образу та обмеження відносно об'єднання, критерій їх порожності та взаємозв'язки з першою та другою проекцією відношень; знайдено повний образ композиції відношень та композиція обмежень; встановлено дистрибутивність обмеження відносно перетину множин; наведено оцінки повного образу перетину та різниці множин; знайдено критерії дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці множин. Крім того, наведено зображення деяких сигнатурних операцій табличних алгебр за допомогою повного образу та обмеження. Ці зображення дозволили одержати деякі властивості цих операцій, які прямо випливають з властивостей повного образу та обмеження. В подальшому передбачається отримати аналогічні зображення інших сигнатурних операцій табличних алгебр, а також виділити їх властивості, що випливають з такого зображення. Одержані результати можуть бути використані в теорії табличних алгебр у якості підходу до дослідження властивостей їх сигнатурних операцій, що може бути використованим при оптимізації запитів в реляційних базах даних.

MSC: 68P15.

Ключові слова: *повний образ множини, обмеження відношення за множиною, база даних, табличні алгебри.*

1. Вступ.

Наразі табличний (реляційний) спосіб зображення даних, математична модель якого була запропонована Е. Коддом [1], залишається одним з найбільш розповсюджених. З математичної точки зору реляційна база даних є скінченим набором скінчених відношень різної розмірності між заздалегідь визначеними множинами елементарних даних – доменами. Табличні алгебри, які було введено В.Н. Редьком та Д.Б. Буєм [2], побудовані на основі реляційних алгебр Е. Кодда та суттєво їх уточнюють. Вони складають теоретичний фундамент мов запитів сучасних табличних баз даних. Елементи носія табличної алгебри уточнюють реляційні структури даних, а сигнатурні операції побудовані на базі основних табличних маніпуляцій у реляційних алгебрах та SQL-подібних мовах.

Дана робота присвячена дослідженню загальнозначущих для математики конструкцій повного образу множини відносно бінарного відношення та обмеження бінарного відношення за множиною. Доводяться деякі загальні теоретико-множинні властивості повного образу та обмеження. Аналогічно результатами, які одержано в [3], розглядається взаємозв'язок між повним образом та операціями перетину, об'єднання і різниці множин. Основним результатом роботи є зображення сигнатурних операцій табличних алгебр – перетину, об'єднання, різниці, проекції і з'єднання – за допомогою конструкцій повного образу і обмеження, а також дослідження властивостей цих операцій з використанням даного зображення.

2. Основні визначення.

Зафіксуємо деякий універсум D. Як завжди, бінарним відношенням на D називається довільна підмножина декартового добутку $D \times D$. Далі в роботі ми розглядаємо тільки бінарні відношення на D, які для стислості викладення будемо називати терміном «відношення». Відношення ρ називається функціональним, якщо з $(x, y) \in \rho$ та $(x, z) \in \rho$ випливає рівність $y = z$, та ін'єктивним, якщо з $(x, y) \in \rho$ та $(z, y) \in \rho$ випливає $x = z$. Проекцією відношення ρ за першою та другою компонентою (в роботі також будемо використовувати терміни «перша проекція» та «друга проекція») будемо відповідно називати множини $pr_1(\rho) = \{x | \exists y((x, y) \in \rho)\}$ та $pr_2(\rho) = \{y | \exists x((x, y) \in \rho)\}$. Композицією відношень ρ і τ назвемо відношення $\rho \circ \tau = \{(x, z) | \exists y((x, y) \in \tau \& (y, z) \in \rho)\}$.

Повним образом множини X відносно бінарного відношення ρ називається множина $\rho[X]$, що складається з елементів y, для яких існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho$. *Обмеженням* відношення ρ за множиною X називається відношення $\rho \| X = \rho \bigcap (X \times D)$. Змістовно кажучи, обмеження ρ за X складається з тих пар ρ, перша компонента яких належить X.

Далі наведемо основні визначення з теорії табличних алгебр у викладенні [4]. Зафіксуємо деяку непорожню множину $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$, елементи якої називаються атрибутами. Довільну скінченну підмножину $R = \{A'_1, \ldots, A'_k\} \subseteq A$ назвемо схемою. Рядком s схеми R називається множина пар $s = \{(A'_1, d_1), \ldots, (A'_k, d_k)\}$, проекція якої за першою компонентою дорівнює R. Таблицею схеми R називається скінченна множина рядків схеми R. Через $T_\emptyset$ позначимо таблицю, яка не містить жодного рядка.

На множині всіх таблиць схеми R введено такі параметричні операції: 1) перетин $\bigcap\limits_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать одночасно всім вихідним таблицям; 2) об'єднання $\bigcup\limits_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать хоча б одній з вихідних таблиць; 3) різниця $T_1 \underset{R}{-} T_2$ двох таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать таблиці T_1 та не належать таблиці T_2.

Іншими словами операції перетину, об'єднання і різниці таблиць є обмеженням відповідно теоретико-множинних перетину, об'єднання і різниці на множині таблиць однакової схеми.

Введемо визначення операції проекції. Проекцією за множиною атрибутів $X \subseteq$

R називається унарна параметрична операція π_X, значенням якої є таблиця, що складається з обмежень за X усіх рядків вихідної таблиці: $\pi_X(T) = \{s\|X | s \in T\}$.

Для визначення операції з'єднання необхідно одне допоміжне поняття. Бінарні відношення ρ і τ називаються сумісними (позначається $\rho \approx \tau$), якщо $\rho\|X = \tau\|X$, де $X = pr_1(\rho) \bigcap pr_1(\tau)$. З'єднанням називається бінарна операція $\otimes$, значенням якої є таблиця, що складається з різноманітних об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць, тобто $T_1 \otimes T_2 = \{s_1 \bigcup s_2 \mid s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1 \approx s_2\}$.

Табличною алгеброю називають часткову алгебру з носієм – множиною всіх таблиць довільної схеми, наведеними вище п'ятьма операціями, а також операціями активного доповнення, селекції, ділення та перейменування атрибутів, які в цій роботі не використовується.

3. Властивості повного образу множини.

Розглянемо деякі властивості повного образу множини X відносно відношення ρ.

Теорема 1 (властивості повного образу). *Виконуються наступні твердження:*

1) з $\rho_1 \subseteq \rho_2$ та $X_1 \subseteq X_2$ випливає $\rho_1[X_1] \subseteq \rho_2[X_2]$ (монотонність за сукупністю аргументів);

2) $\rho[\bigcup\limits_{i\in I} X_i] = \bigcup\limits_{i\in I} \rho[X_i]$, $\bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i[X]) = (\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)[X]$ (дистрибутивність відносно об'єднання множин та відношень);

3) $\rho[\bigcap\limits_{i\in I} X_i] \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \rho[X_i]$ (верхня оцінка повного образу перетину множин);

4)$(\rho_1 \circ \rho_2)[X] = \rho_1[\rho_2[X]]$ (повний образ відносно композиції відношень);

5) $\rho[X] = \emptyset \Leftrightarrow X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$ (критерій порожності повного образу);

6) $\rho[X] = \rho[X \bigcap pr_1(\rho)]$, $\rho[X] \subseteq pr_2(\rho)$ (взаємозв'язок між повним образом та першою й другою проекціями відношення);

7) $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y] \subseteq \rho[X]$ (оцінки повного образу різниці множин).

Доведення. 1) Нехай $y \in \rho_1[X_1]$. Тоді, за означенням повного образу, $\exists x \in X_1 | (x, y) \in \rho_1$. З $X_1 \subseteq X_2$ випливає $x \in X_2$, а з $\rho_1 \subseteq \rho_2$ випливає $(x, y) \in \rho_2$. За означенням повного образу $y \in \rho_2[X_2]$, тобто $\rho_1[X_1] \subseteq \rho_2[X_2]$.

2) Нехай $y \in \rho[\bigcup\limits_{i\in I} X_i]$. Тоді існує такий $x \in \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, що $(x, y) \in \rho$, тому існує такий індекс k, що $x \in X_k$. За означенням повного образу $y \in \rho[X_k]$, тому, $y \in \bigcup\limits_{i\in I}\rho[X_i]$. Нехай тепер $y \in \bigcup\limits_{i\in I}\rho[X_i]$. Тоді існує такий індекс k, що $y \in \rho[X_k]$. За означенням повного образу існує такий $x \in X_k$, що $(x, y) \in \rho$, тому, $x \in \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, з чого випливає $y \in \rho[\bigcup\limits_{i\in I} X_i]$, що доводить першу рівність пункту.

Нехай $y \in \bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i[X])$. Тоді існує такий індекс n, що $y \in \rho_n[X]$, тому, існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho_n$. З цього випливає: $(x, y) \in \bigcup\limits_{i\in I}\rho_i$, що тягне $y \in (\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)[X]$. Нехай тепер $y \in (\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)[X]$. Тоді існують такі $x \in X$ та індекс n, що $y \in \rho_n[X]$. Це тягне $y \in \bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i[X])$, що доводить другу рівність пункту.

3) Нехай $y \in \rho[\bigcap\limits_{i\in I} X_i]$. Тому, існує такий $x \in \bigcap\limits_{i\in I} X_i$, що $(x, y) \in \rho$. За означенням повного образу для кожного індексу k виконується приналежність $(x, y) \in \rho[X_k]$, тому $y \in \bigcap\limits_{i\in I} \rho[X_i]$, що доводить включення.

4) Нехай $y \in (\rho_1 \circ \rho_2)[X]$. Тоді існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho_1 \circ \rho_2$, тому, за означенням композиції відношень, існує такий z, що $(x, z) \in \rho_2$ та $(z, y) \in \rho_1$. З $(x, z) \in \rho_2$ и $x \in X$ за означенням повного образу випливає, що $z \in \rho_2[X]$, звідси, з урахуванням $(z, y) \in \rho_1$, одержимо $y \in \rho_1[\rho_2[X]]$; це доводить включення $(\rho_1 \circ \rho_2)[X] \subseteq \rho_1[\rho_2[X]]$. Доведемо зворотнє включення. Нехай $y \in \rho_1[\rho_2[X]]$. За означенням повного образу існує такий $z \in \rho_2[X]$, що $(z, y) \in \rho_1$. З $z \in \rho_2[X]$ випливає існування такого $x \in X$, що $(x, z) \in \rho_2$. За означенням композиції відношень одержали $(x, y) \in \rho_1 \circ \rho_2$, тоді, з урахуванням $x \in X$, одержимо $y \in (\rho_1 \circ \rho_2)[X]$; це доводить включення $(\rho_1 \circ \rho_2)[X] \supseteq \rho_1[\rho_2[X]]$ та рівність пункту.

5) Нехай $\rho[X] = \emptyset$. Якщо при цьому $X = \emptyset$, то $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$. Якщо ж $X \neq \emptyset$, то нехай $x \in X$. З $\rho[X] = \emptyset$ випливає, що не існує такий y, що $(x, y) \in \rho$, тому, за означенням першої проекції відношення, $x \notin pr_1(\rho)$, тому з $\rho[X] = \emptyset$ випливає $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$. Доведемо зворотню імплікацію. Нехай $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$. Від супротивного, припустимо, що $\rho[X] \neq \emptyset$ та нехай $y \in \rho[X]$. Тоді існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho$, звідки випливає, що $x \in X \bigcap pr_1(\rho)$; це протирічить умові $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$, доводить імплікацію $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset \Rightarrow \rho[X] = \emptyset$ та еквівалентність пункту.

6) Доведемо рівність $\rho[X] = \rho[X \bigcap pr_1(\rho)]$. Нехай $y \in \rho[X]$. Тоді, за означенням повного образу, $\exists x \in X | (x, y) \in \rho$. За означенням першої проекції відношення $(x, y) \in \rho$ тягне $x \in pr_1(\rho)$, тому $x \in X \bigcap pr_1(\rho)$, що доводить включення $\rho[X] \subseteq \rho[X \bigcap pr_1(\rho)]$. Нехай тепер $y \in \rho[X \bigcap pr_1(\rho)]$, тоді $\exists x \in X \bigcap pr_1(\rho) | (x, y) \in \rho$, тому, $x \in X$, з чого випливає $y \in \rho[X]$; це доводить рівність пункту.

Включення $\rho[X] \subseteq pr_2(\rho)$ безпосередньо випливає з визначень повного образу і другої проекції відношення.

7) Доведемо включення $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y]$. Якщо $Y = \emptyset$, то $X - Y = X$ та, згідно доведеної в п.6 рівності, $\rho[Y] = \emptyset$, тобто включення перетворюється в рівність $\rho[X] = \rho[X]$. Нехай тепер $Y \neq \emptyset$ та $y \in (\rho[X] - \rho[Y])$. Тоді $y \in \rho[X]$ та $y \notin \rho[Y]$. З $y \in \rho[X]$ за означенням повного образу випливає існування такого $x \in X$, що $(x, y) \in \rho$, а з $y \notin \rho[Y]$ випливає, що для кожного $z \in Y$ $(z, y) \notin \rho$, тому $x \notin Y$, отже, $x \in X - Y$. За означенням повного образу $y \in \rho[X - Y]$, що доводить включення $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y]$.

Включення $\rho[X - Y] \subseteq \rho[X]$ безпосередньо випливає з очевидного включення $X - Y \subseteq X$ та доведеної в п.1 властивості монотонності повного образу. $\square$

Пункти 3 та 7 теореми 1 природним чином ставлять питання про достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину і різниці множин.

Теорема 2 (критерій дистрибутивності повного образу відносно пе-

ретину множин). *Рівність* $\bigcap\limits_{i\in I}\rho[X_i]=\rho[\bigcap\limits_{i\in I}X_i]$ *виконується тоді та лише тоді, коли виконується включення*

$$\bigcap_{i\in I}\rho[X_i-\bigcap_{i\in I}X_i]\subseteq\rho[\bigcap_{i\in I}X_i](1).$$

Доведення. Нехай виконується рівність $\bigcap\limits_{i\in I}\rho[X_i]=\rho[\bigcap\limits_{i\in I}X_i]$. У цьому випадку включення (1) перетворюється у включення

$$\bigcap_{i\in I}\rho[X_i-\bigcap_{i\in I}X_i]\subseteq\bigcap_{i\in I}\rho[X_i](2).$$

Нехай k – деякий індекс множини I. Оскільки виконується включення $X_k-\bigcap\limits_{i\in I}X_i\subseteq X_k$, то за доведеною у п.1 теореми 1 властивості монотонності виконується $\rho[X_k-\bigcap\limits_{i\in I}X_i]\subseteq\rho[X_k]$, отже, виконується включення (2).

Нехай тепер виконується включення (1). З урахуванням доведеного в п.3 теореми 1 включення $\rho[\bigcap\limits_{i\in I}X_i]\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}\rho[X_i]$ нам достатньо довести включення

$$\bigcap_{i\in I}\rho[X_i]\subseteq\rho[\bigcap_{i\in I}X_i](3).$$

Нехай $\bigcap\limits_{i\in I}\rho[X_i]\neq\emptyset$ та $y\in\bigcap\limits_{i\in I}\rho[X_i]$. Тоді, за означенням повного образу, для кожного індексу $k\in I$ існує такий $x_k\in X_k$, що $(x_k,y)\in\rho$. Якщо при цьому $x_k\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$, то за означенням повного образу виконується $y\in\rho[\bigcap\limits_{i\in I}X_i]$, тобто в цьому випадку включення (3) виконується. Далі розглянемо випадок, коли для кожного індексу $k\in I$ виконкється $x_k\notin\bigcap\limits_{i\in I}X_i$. У цьому випадку $x_k\in X_k-\bigcap\limits_{i\in I}X_i$. Тоді за означенням повного образу $y\in\bigcap\limits_{i\in I}\rho[X_i-\bigcap\limits_{i\in I}X_i]$ та, з урахуванням виконання включення (1), $y\in\rho[\bigcap\limits_{i\in I}X_i]$, тобто включення (3) в цьому випадку також виконується. $\square$

Теорема 3 (критерій дистрибутивності повного образу відносно різниці множин). *Рівність* $\rho[X]-\rho[Y]=\rho[X-Y]$ *виконується тоді та лише тоді, коли* $\rho[X-Y]\bigcap\rho[Y]=\emptyset$

Доведення. Нехай виконується рівність $\rho[X]-\rho[Y]=\rho[X-Y]$. Від супротивного, припустимо, що при цьому не виконується рівність $\rho[X-Y]\bigcap\rho[Y]=\emptyset$, тобто існує такий y, що $y\in\rho[X-Y]$ та $y\in\rho[Y]$. В цьому випадку, зважаючи на $X-Y\subseteq X$ та монотонність повного образу, приналежність $y\in\rho[X-Y]$ тягне $y\in\rho[X]$, у такому випадку y не належить лівій частині рівності $\rho[X]-\rho[Y]=\rho[X-Y]$ та належить правій частині цієї рівності, що суперечить припущенню та доводить рівність $\rho[X-Y]\bigcap\rho[Y]=\emptyset$.

Нехай тепер виконується рівність $\rho[X-Y]\bigcap\rho[Y]=\emptyset$. Покажемо, що в цьому випадку повинна виконуватися рівність $\rho[X]-\rho[Y]=\rho[X-Y]$. З урахуванням доведеного в п.7 теореми 1 включення $\rho[X]-\rho[Y]\subseteq\rho[X-Y]$ нам достатньо довести включення $\rho[X-Y]\subseteq\rho[X]-\rho[Y]$. Нехай $\rho[X-Y]\neq\emptyset$ та $y\in\rho[X-Y]$. За означенням повного образу існує такий $x\in X-Y$, що $(x,y)\in\rho$. З приналежності $x\in X-Y$ випливає, що $x\in X$, тому $y\in\rho[X]$. З рівності $\rho[X-Y]\bigcap\rho[Y]=\emptyset$ випливає, що $y\notin\rho[Y]$, тому $y\in\rho[X]-\rho[Y]$, що доводить шукане включення. $\square$

4. Властивості обмеження.

В даному розділі розглянемо деякі властивості обмеження відношення ρ за множиною X. Спочатку розглянемо взаємозв'язки між обмеженням і повним образом.

Теорема 4 (взаємозв'язки між обмеженням і повним образом). *Виконуються наступні твердження:*

1) $\rho[X]=pr_2(\rho\|X)$;

2) $(\rho\|X)[Y]=\rho[X\bigcap Y]$.

Доведення. 1) Нехай $y\in\rho[X]$. Тоді, за означенням повного образу, $\exists x\in X|(x,y)\in\rho$. У цьому випадку, за означенням обмеження, $(x,y)\in\rho\|X$, та за означенням другої проекції відношення $y\in pr_2(\rho\|X)$. Нехай тепер $y\in pr_2(\rho\|X)$. Тоді, за означенням другої проекції, $\exists x\in\rho\|X|(x,y)\in\rho\|X$. З $(x,y)\in\rho\|X$ випливає $(x,y)\in\rho$ та $x\in X$, за означенням повного образу останні дві приналежності тягнуть $y\in\rho[X]$.

2) Нехай $z\in(\rho\|X)[Y]$. Тоді, за означенням повного образу, існує такий $x\in Y$, що $(x,y)\in\rho\|X$. Приналежність $(x,y)\in\rho\|X$ за означенням обмеження тягне $x\in X$, тому, за означенням повного образу, $z\in\rho[X\bigcap Y]$. Нехай тепер $z\in\rho[X\bigcap Y]$. Тоді, за означенням повного образу, існує такий $x\in X\bigcap Y$, що $(x,z)\in\rho$, тобто $x\in X$ та $x\in Y$. З $(x,z)\in\rho$ та $x\in X$ за означенням обмеження випливає $(x,z)\in\rho\|X$, а з $(x,z)\in\rho\|X$ та $x\in Y$ за означенням повного образу випливає $z\in(\rho\|X)[Y]$. $\square$

Далі розглянемо деякі інші властивості обмеження. Через λ позначимо порожнє відношення.

Теорема 5 (властивості обмеження). *Виконуються наступні твердження:*

1) з $\rho_1\subseteq\rho_2$ *та* $X_1\subseteq X_2$ *випливає* $\rho_1\|X_1\subseteq\rho_2\|X_2$ *(монотонність за сукупністю аргументів);*

2) $\rho\|\bigcup\limits_{i\in I}X_i=\bigcup\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$, $\bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)=(\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$ *(дистрибутивність відносно об'єднання множин та відношень);*

3) $\rho\|\bigcap\limits_{i\in I}X_i=\bigcap\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$, $\bigcap\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)=(\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$ *(дистрибутивність відносно перетину множин та відношень);*

4)$(\rho\|X)\|Y=\rho\|(X\bigcap Y)$ *(композиція обмежень);*

5) $\rho\|X=\lambda\Leftrightarrow pr_1(\rho)\bigcap X=\emptyset$ *(критерій порожності обмеження);*

6) $\rho\|X=\rho\|(X\bigcap pr_1(\rho))$, $\rho=\rho\|pr_1(\rho)$; *(взаємозв'язок між обмеженням і першою проекцією відношення)*

Доведення. 1) Нехай $(x,y)\in\rho_1\|X_1$. Тоді, за означенням обмеження, $x\in X_1$ та

$(x,y)\in\rho_1$. З $X_1\subseteq X_2$ випливає $x\in X_2$, а з $\rho_1\subseteq\rho_2$ випливає $(x,y)\in\rho_2$, тому $(x,y)\in\rho_1\|X_2$.

2) Нехай $(x,y)\in\rho\|\bigcup\limits_{i\in I}X_i$. Тоді $(x,y)\in\rho$ та $x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$, тому для деякого індексу $i\in I$ виконується $x\in X_i$. За означенням обмеження $(x,y)\in\rho\|X_i$, отже, $(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$, що доводить включення $\rho\|\bigcup\limits_{i\in I}X_i\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$. Нехай тепер $(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$. Тоді існує такий індекс $i\in I$, для якого виконується $(x,y)\in\rho\|X_i$. У цьому випадку $(x,y)\in\rho$ та $x\in X_i$, тому $x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$. За означенням обмеження виконується $(x,y)\in\rho\|\bigcup\limits_{i\in I}X_i$, що доводить включення $\bigcup\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)\subseteq\rho\|\bigcup\limits_{i\in I}X_i$ та першу рівність пункту.

Нехай $(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)$. Тоді існує такий індекс $i\in I$, для якого виконується $(x,y)\in\rho_i\|X$. У цьому випадку $x\in X$ та $(x,y)\in\rho_i$, тому $(x,y)\in(\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)$. За означенням обмеження виконується $(x,y)\in(\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$, що доводить включення $\bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)\subseteq(\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$. Нехай тепер $(x,y)\in(\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$. Тоді $x\in X$ та $(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i$, отже, існує такий індекс $i\in I$, для якого виконується $(x,y)\in\rho_i$. У цьому випадку $(x,y)\in\rho_i\|X$, отже, $(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)$, що доводить включення $(\bigcup\limits_{i\in I}\rho_i)\|X\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)$ та другу рівність пункту.

3) Нехай $(x,y)\in\rho\|\bigcap\limits_{i\in I}X_i$. Тоді $(x,y)\in\rho$ та $x\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$, тому, для кожного індексу $i\in I$ виконується $x\in X_i$. За означенням обмеження $\forall i\in I$ виконується $(x,y)\in\rho\|X_i$, отже, $(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$, це доводить включення $\rho\|\bigcap\limits_{i\in I}X_i\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$. Нехай тепер $(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)$. Тоді для всіх індексів $i\in I$ виконується $(x,y)\in\rho\|X_i$, тобто $(x,y)\in\rho$ та, крім того, $x\in X_i$, що тягне $x\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$. За означенням обмеження виконується $(x,y)\in\rho\|\bigcap\limits_{i\in I}X_i$, що доводить включення $\bigcap\limits_{i\in I}(\rho\|X_i)\subseteq\rho\|\bigcap\limits_{i\in I}X_i$ та першу рівність пункту.

Нехай $(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)$. Тоді, для всіх індексів $i\in I$, виконується $(x,y)\in\rho_i\|X$. У цьому випадку $x\in X$ та $(x,y)\in\rho_i$, тому $(x,y)\in(\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)$. За означенням обмеження виконується $(x,y)\in(\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$, що доводить включення $\bigcap\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)\subseteq(\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$. Нехай тепер $(x,y)\in(\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)\|X$. Тоді $x\in X$ та $(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)$, отже, для всіх індексів $i\in I$ виконується $(x,y)\in\rho_i$, тобто $(x,y)\in\rho_i\|X$, отже, $(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)$; це доводить включення $(\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i)\|X\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}(\rho_i\|X)$ та другу рівність пункту.

4) Нехай $(x,y)\in(\rho\|X)\|Y$. Тоді, за означенням обмеження, $x\in Y$ та, крім того, $(x,y)\in\rho\|X$, що тягне $x\in X$ та $(x,y)\in\rho$, тому $x\in X\bigcap Y$. За означенням обмеження виконується приналежність $(x,y)\in\rho\|(X\bigcap Y)$, це доводить

включення $(\rho\|X)\|Y \subseteq \rho\|(X \bigcap Y)$. Нехай тепер $(x, y) \in \rho\|(X \bigcap Y)$. Тоді $(x, y) \in \rho$ та $x \in X \bigcap Y$, що тягне $x \in X$ та $x \in Y$. За означенням обмеження в цьому випадку виконуються приналежності $(x, y) \in \rho\|X$ та $(x, y) \in (\rho\|X)\|Y$, що доводить рівність пункту.

5) Нехай $\rho\|X = \lambda$. Від супротивного, припустимо, що $pr_1(\rho) \bigcap X \neq \emptyset$, тоді існує такий x, що $x \in pr_1(\rho) \bigcap X$. У цьому випадку $x \in X$ та за означенням першої проекції відношення існує такий y, що $(x, y) \in \rho$. З цього за означенням обмеження випливає $(x, y) \in \rho\|X$, що суперечить $\rho\|X = \lambda$; це доводить імплікацію $\rho\|X = \lambda \Leftarrow pr_1(\rho) \bigcap X = \emptyset$. Нехай тепер $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$. Від супротивного, припустимо, що $\rho\|X = \lambda$, тобто $\exists x, y|(x, y) \in \rho\|X$. За означенням обмеження це тягне $x \in X$ та $(x, y) \in \rho$, звідки, за означенням першої проекції відношення, випливає приналежність $x \in pr_1(\rho)$, тобто $x \in pr_1(\rho) \bigcap X$; це суперечить припущенню $X \bigcap pr_1(\rho) = \emptyset$ та доводить еквівалентність пункту.

6) Нехай $(x, y) \in \rho\|X$. Тоді, за означенням обмеження, $x \in X$ та $(x, y) \in \rho$, звідки, за означенням першої проекції відношення, випливає $x \in pr_1(\rho)$. Тому $x \in X \bigcap pr_1(\rho)$, отже, $(x, y) \in \rho\|(X \bigcap pr_1(\rho))$, це доводить включення $\rho\|X \subseteq \rho\|(X \bigcap pr_1(\rho))$. Нехай тепер $(x, y) \in \rho\|(X \bigcap pr_1(\rho))$. Тоді, за означенням обмеження, $(x, y) \in \rho$ та $x \in X \bigcap pr_1(\rho)$, отже, $x \in X$, що за означенням обмеження тягне $(x, y) \in \rho\|X$ та доводить першу рівність пункту.

Нехай $(x, y) \in \rho$. За означенням першої проекції відношення виконується $x \in pr_1(\rho)$, тому $(x, y) \in \rho\|pr_1(\rho)$, що доводить включення $\rho \subseteq \rho\|pr_1(\rho)$. Зворотне включення справедливо через включення $\forall X(\rho\|X \subseteq \rho)$; це доводить другу рівність пункту. $\square$

5. Дослідження властивостей табличних операцій за допомогою повного образу та обмеження.

Перейдемо тепер до зображення операцій табличних алгебр за допомогою вказаних вище конструкцій.

Операції перетину, об'єднання і різниці таблиць (схеми R) можуть бути зображеними як бінарні параметричні (в ролі параметра виступає схема) операції, отримані обмеженням відповідно теоретико-множинних перетину, об'єднання і різниці на множину таблиць схеми R.

Операція проекції $\pi_X(T)$, згідно її визначення, зображається як обмеження рядків таблиці T за множиною атрибутів X: $\pi_X(T) = \{s\|X | s \in T\}$.

Операція з'єднання таблиці T_1 схеми R_1 та таблиці T_2 схеми R_2, згідно до її визначення, зображається як множина всіляких об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць, відношення сумісності задається через обмеження, тобто $T_1 \otimes T_2 = \{s_1 \bigcup s_2 \mid s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1\|(R_1 \bigcap R_2) = s_2\|(R_1 \bigcap R_2)\}$.

Перейдемо тепер до дослідження властивостей операцій за допомогою конструкцій повного образу і обмеження. Властивості перетину, об'єднання та різниці таблиць детально показано в [3], тому в даній роботі ми їх не розглядаємо. У наступній теоремі розглянемо властивості проекції та з'єднання таблиць, які безпосередньо випливають із зображення цих операцій за допомогою конструкцій повного образу і обмеження.

Теорема 6 (властивості проекції та з'єднання таблиць). *Виконуються наступні твердження:*

1) З $T_1 \subseteq T_1'$ *и* $T_2 \subseteq T_2'$ *випливає* $\pi_X(T_1) \subseteq \pi_X(T_1')$ *та* $T_1 \otimes T_2 \subseteq T_1' \otimes T_2'$ *(монотонність);*

2) $\pi_X(\bigcup\limits_{i \in I} T_i) = \bigcup\limits_{i \in I} \pi_X(T_i)$*; якщо схеми таблиць* T_i *є однаковими, то* $T \otimes (\bigcup\limits_{i \in I} T_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (T \otimes T_i)$ *(дистрибутивність відносно об'єднання таблиць);*

3) $\pi_X(T) = T_\emptyset \Leftrightarrow T = T_\emptyset$*;* $T \otimes T_\emptyset = T_\emptyset \otimes T = T_\emptyset$ *(збереження* $T_\emptyset$*);*

4) $\pi_X(\bigcap\limits_{i \in I} T_i) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} \pi_X(T_i)$ *(верхня границя проекції перетину таблиць);*

5) $\pi_X(\pi_Y(T)) = \pi_{X \cap Y}(T)$ *(композиція проекцій).*

6. Висновки.

У роботі досліджено властивості повного образу множини відносно відношення та обмеження відношення за множиною. Також наведено зображення деяких сигнатурних операцій табличних алгебр за допомогою повного образу і обмеження. Такі зображення дозволили отримати деякі властивості операцій, які прямо випливають з властивостей повного образу і обмеження. У подальшому передбачається отримати аналогічні зображення інших сигнатурних операцій табличних алгебр, а також виділити їх властивості, що випливають з такого зображення. Одержані результати можуть бути використані в теорії табличних алгебр у якості підходу до дослідження властивостей їх сигнатурних операцій, також результати можна буде використовувати для оптимізації запитів в реляційних базах даних.

Цитована література

1. *Codd E.F.* A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Communications of the ACM. – 1970. – 13, No 6. – P. 377–387.
2. *Red'ko V.N., Bui D.B.* Foundations of the theory of relational database models // Cybernetics and Systems Analysis. – 1996. – Vol. 32, Iss. 4. – P. 471–478.
3. *Сенченко А.С.* Взаимосвязи между пересечением, объединением и другими сигнатурными операциями в табличных алгебрах // Праці ІПММ НАН України. – 2018. – Т. 32. – С. 121–132.
4. *Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: «Академперіодика», 2001. – 198 с.

References

1. Codd, E.F. (1970). A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. *Communications of the ACM, 13*(6), 377-387.
2. Red'ko, V.N., Bui, D.B. (1996). Foundations of the theory of relational database models. *Cybernetics and Systems Analysis, 32*(4), 471-478.
3. Senchenko, A.S. (2018). The interrelations between intercestion, union and other signature operations in table algebra. *Proc. IAMM NASU, 32*, 121-132 (in Russian).
4. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y., Bui, D.B., Polyakov, S.A. (2001). *Relational databases: table algebras and SQL-like languages.* Kyiv: Academperiodica (in Ukrainian).

N.D. Kakhuta, A.S. Senchenko

Using the whole image and restrictions in the research of properties of some signature operations in Table Algebra.

The features of the whole image relative to many binary relation, and restrictions on a binary relation on the set for some of the signature operations of Table Algebra are used in the work. Constructions of the whole image and restrictions are of general interest for Mathematics, and Table Algebra is a modern analogue of Codd's well-known Relational Algebra. It forms the theoretical foundation of modern query language databases. Elements of the carrier of Table Algebra specify relational table data structures, and signature operations are based on the basic table manipulations in Relational Algebra and SQL-like languages. The following results in the research of the features of the whole image were obtained: interconnections between the whole image and restrictions were found; the monotony and distribution of the whole image and restrictions on unions, a criterion of their emptiness and interconnections with first and second projection relations were proved; the whole image of the composition of relations and composition restrictions were found; the distribution of restriction on intersection of sets was set; the estimates of the distribution of the whole image of intersection and difference of sets were given; criteria for distribution of the whole image relative to the intersection and differences of sets were found. In addition, the clues were provided with the help of the whole image and restrictions on some of the signature operations of Table Algebra: intersection, union, difference, projection and joining. These representations allowed us to obtain some features of these operations, which derive directly from the features of the whole image and restrictions. It is supposed to get similar views on other signature operations of Table Algebras and to allocate their features arising from such representation. The obtained results can be used in the theory of Table Algebra as an approach to the research of the features of their signature operations, this can be used in query optimization in relational databases.

Keywords: *whole image of set, restriction a relation on set, databases, table algebra.*

Університет економіки та права «КРОК», Київ
Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
NadezhdaK@krok.edu.ua, Senchenko.a76@gmail.com

Отримано 01.09.19