

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-10

©2019. Ю. М. Кононов, В.Ю. Василенко

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ ДЗИГИ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ В СЕРЕДОВИЩІ, ЩО ЧИНИТЬ ОПІР

Розглянуто обертання навколо нерухомої точки важкого динамічно симетричного твердого тіла з довільною осесиметричною порожниною, цілком заповненою ідеальною нестисливою рідиною. Досліджено стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа з рідиною в середовищі, що чинить опір, з урахуванням заданого постійного моменту. Представлено рівняння обуреного руху дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. Доведено, що для еліпсоїдальної порожнини асимптотична стійкість рівномірного обертання має місце тільки для стиснутої еліпсоїдальної порожнини. Відмічено, що в більшості практично важливих випадках, основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини. Отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі, що чинить опір, під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. Ці умови стійкості виведені з урахуванням основного і додаткового тонів коливань рідини. Важке тверде тіло має нерухому точку і знаходиться під дією постійного моменту в інерціальній системі координат. Проведено аналітичні та чисельні дослідження впливу основного і додаткового тонів коливань рідини, перекидального, відновлюючого, дисипативного і постійного моментів на умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. Зазначено, що з урахуванням основного тону коливань рідини, представлені в роботі кубічна і квадратна нерівності є умовами асимптотичної стійкості. На прикладі еліпсоїдальної порожнини проведені чисельні дослідження областей стійкості. Встановлено, що зі збільшенням екваторіального моменту інерції твердого тіла область стійкості зменшується, а зі збільшенням осьового моменту інерції твердого тіла вони збільшуються.

MSC: 70E50.

Ключові слова: асимптотична стійкість, постійний момент, дзига Лагранжа, ідеальна рідина, середовище, що чинить опір.

1. Вступ.

В роботі [1] розглянуто задачу про стійкість обертання навколо нерухомої точки важкого симетричного твердого тіла під дією дисипативного і постійного моменту в інерціальній системі координат. В [2–3] узагальнена ця задача на випадок рівномірного обертання несиметричного твердого тіла навколо третьої головної осі в припущенні, що центр мас твердого тіла знаходиться на цій осі. У роботах [4–5] були розпочаті дослідження стійкості обертання в середовищі з опором дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. У статті [6] досліджується задача, розглянута в [1], на випадок наявності ідеальної рідини в порожнині твердого тіла. У цій статті, з урахуванням основного тону коливань рідини, отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання дзиги Лагранжа з рідиною. У цьому повідомлен-

Дослідження виконані в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки, проект № 0119U100042.

ні узагальнюються результати статті [6] на випадок урахування додаткових тонів коливань ідеальної рідини в довільній осесиметричній порожнині.

2. Постановка задачі.

Розглянемо обертання навколо нерухомої точки важкого динамічно симетричного твердого тіла з довільною осесиметричною порожниною, цілком заповненою ідеальною нестисливою рідиною. Припустимо, що на нього, крім сили тяжіння, діє дисипативний момент $\vec{M}_d = -D\vec{\omega}$ ($D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3)$, $D_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$), що моделює опір середовища, і постійний в інерціальній системі координат момент $\vec{M}_p = P\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі, P довільна стала.

Дослідимо стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа із рідиною в середовищі з опором з урахуванням заданого постійного моменту, вважаючи, що в незбуреному русі тверде тіло і рідина обертаються навколо вертикалі як одне ціле з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

Рівняння збуреного руху дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною мають вигляд [5–6]

$$\begin{aligned} A\dot{\Omega}_1 + (C - A)\omega\Omega_2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{1n} - \omega S_{2n}) &= \pm P\gamma_1 - D_1\Omega_1 + \Gamma\gamma_2 \\ A\dot{\Omega}_1 - (C - A)\omega\Omega_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{2n} + \omega S_{1n}) &= \pm P\gamma_2 - D_1\Omega_2 + \Gamma\gamma_1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$N_n^2(\dot{S}_{1n} - \tilde{\lambda}_n S_{2n}) + a_n\dot{\Omega}_1 = 0, \quad N_n^2(\dot{S}_{2n} + \tilde{\lambda}_n S_{1n}) + a_n\dot{\Omega}_2 = 0,$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega\gamma_2 - \Omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\omega\gamma_1 + \Omega_1$$

$$C\dot{\Omega}_3 = \pm P\delta - D_3(\Omega_3 + \omega),$$

$$\dot{\delta} = 0. \quad (2)$$

Тут $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$; $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – одиничний вектор напрямку сили тяжіння, $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$; A і C – відповідно головний екваторіальний і осьовий моменти інерції твердого тіла і рідини; $\Gamma = gmd$, m – маса механічної системи, d – відстань від центру мас системи до нерухомої точки; $\tilde{\lambda}_n = 2\omega/\kappa_n$, κ_n – власні числа, які всюди щільно заповнюють область дійсної осі $|\kappa| \geq 1$; визначення величин a_n і N_n^2 дано в роботах [5–7].

Система рівнянь (1)–(2) розділяється і допускає рішення

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \omega = P/D_3, \quad S_{1n} = S_{2n} = 0, \quad (3)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -1, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \omega = -P/D_3, \quad S_{1n} = S_{2n} = 0, \quad (4)$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю ω навколо вертикалі. При цьому рішенню (3) відповідає випадок “сплячої дзиги” (центр мас твердого тіла знаходиться вище нерухомої точки, тобто $d > 0$), на який діє перекидаючий момент ($\Gamma > 0$), момент \vec{M}_p , а рішенню (4) – випадок статично

стійкої “дзиги” (центр мас знаходиться нижче нерухомої точки ($d < 0$), на який діє відновлювальний момент ($\Gamma < 0$) і момент $-\overline{M}_p$.

Перше рівняння в (2) має дійсний від’ємний корінь $\Omega_3 = -D_3/C$. Характеристичне рівняння, що відповідає системі (1)–(2), завжди має один нульовий корінь, обумовлений наявністю геометричного інтеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

3. Асимптотична стійкість рішення (3).

У нових комплексних змінних $\Omega = \Omega_1 - i\Omega_2$, $\gamma = \gamma_1 - i\gamma_2$, $S_n = S_{1n} - iS_{2n}$ система (1) запишеться наступним чином

$$\begin{cases} A\dot{\Omega} + [i(C - A)\omega + D_1]\Omega + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_n - i\omega S_n) = (i\Gamma + P)\gamma, \\ N_n^2(\dot{S}_n - i\omega\lambda_n S_n) + a_n\dot{\Omega} = 0, \\ \dot{\gamma} = i(\omega\gamma - \Omega). \end{cases} \quad (5)$$

Тут $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n/\omega$.

Характеристичне рівняння для збуреного руху (5) матиме вигляд

$$A + \frac{iC\omega + D_1}{\lambda - i\omega} - \frac{\Gamma - iP}{(\lambda - i\omega)^2} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda - i\omega\lambda_n} = 0, \quad (6)$$

де $E_n = 2a_n^2/N_n^2 > 0$.

З урахуванням основного і додаткового тону коливань рідини ($n = 1, 2$) рівняння (6) набуде вигляду

$$a_4\lambda^4 + (a_3 + ib_3)\lambda^3 + (a_2 + ib_2)\lambda^2 + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_4 &= A - E_1 - E_2 = A^* > 0, \\ a_3 &= D_1 > 0, \quad b_3 = [C - A(\lambda_1 + \lambda_2) - 2A^* + E_1\lambda_2 + E_2\lambda_1]\omega, \\ a_2 &= [C - A^* + (C - 2A)(\lambda_1 + \lambda_2) - A\lambda_1\lambda_2 + 2(E_1\lambda_2 + E_2\lambda_1)]\omega^2 - \Gamma, \\ b_2 &= P - (1 + \lambda_1 + \lambda_2)D_1\omega, \\ a_1 &= [(\lambda_1 + \lambda_2)(P - D_1\omega) - \lambda_1\lambda_2D_1\omega]\omega, \\ b_1 &= \{(\lambda_1 + \lambda_2)\Gamma + [(2A - C)\lambda_1\lambda_2 + (A - C)(\lambda_1 + \lambda_2) - (E_1\lambda_2 + E_2\lambda_1)]\omega^2\}\omega \\ a_0 &= [\Gamma + (A - C)\omega^2]\lambda_1\lambda_2\omega^2, \quad b_0 = (D_1\omega - P)\lambda_1\lambda_2\omega^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Для існування асимптотично стійких рішень системи (5) необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (7)

$$\Delta_7 = \begin{pmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

була іннерно-позитивною [9]. Тобто були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$|\Delta_1| = a_3 = D_1 > 0,$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad |\Delta_7| > 0. \quad (9)$$

Підставивши (8) в (9), отримаємо з урахуванням $A^* > 0$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma/D_3^2$, $x = D_1/D_3$:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_2 - 1)^2 E_1 E_2 \lambda_1 \lambda_2 \omega^8 (\Gamma_{71} \tilde{\Gamma} + \Gamma_{70}) > 0, \quad (10)$$

$$-(\Gamma_{52} \tilde{\Gamma}^2 + \Gamma_{51} \tilde{\Gamma} + \Gamma_{50}) \omega^2 > 0, \quad (11)$$

$$\Gamma_{31} \tilde{\Gamma} + \Gamma_{30} > 0, \quad (12)$$

де

$$\Gamma_{71} = [(\lambda_1 - 1)x + 1][(\lambda_2 - 1)x + 1]x^2,$$

$$\Gamma_{70} = \{[(\lambda_2 - 1)x + 1](x - 1)E_1 + [(\lambda_1 - 1)x + 1](x - 1)E_2 + [(\lambda_1 - 1)x + 1][(\lambda_2 - 1)x + 1](A - Cx)\}P,$$

$$\Gamma_{52} = \lambda_1 \lambda_2 x^4,$$

$$\Gamma_{51} = x(g_1 x^2 + g_2 x + \lambda_1 \lambda_2 A^*)P^2$$

$$g_1 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^3 E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^3 E_2 + (A^* - C)\lambda_1 \lambda_2,$$

$$g_2 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^3 E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^3 E_2 - C^* \lambda_1 \lambda_2, \quad C^* = C - E_1 - E_2,$$

$$\Gamma_{50} = \{\lambda_1 \lambda_2 f_1 x^3 + f_2 x^2 P + f_3 x P^2 + f_4 A^* P^3\}P,$$

$$f_1 = (C - A)[E_1 \lambda_1(\lambda_1 - 1) + E_2 \lambda_2(\lambda_2 - 1)] - (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 E_1 E_2,$$

$$f_2 = [(A - C)\lambda_1 \lambda_2 - C(\lambda_1 - 1)^3] E_1 \lambda_1 + [(A - C)\lambda_1 \lambda_2 - C(\lambda_2 - 1)^3] E_2 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1 \lambda_2 E_1 E_2,$$

$$f_3 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^2 E_1^2 + \{[(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2] \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1(\lambda_1 - 1)^3 - \lambda_2(\lambda_2 - 1)^3\} E_1 E_2 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^2 E_2^2, \quad f_4 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^2 E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^2 E_2,$$

$$\Gamma_{31} = -x^2, \quad \Gamma_{30} = [\lambda_1(\lambda_1 - 1)E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)E_2]x^2 +$$

$$+(C - E_1 \lambda_1 - E_2 \lambda_2)xP - A^* P^2.$$

Таким чином, умови асимптотичної стійкості рішення (3) визначаються трьома нерівностями (10)–(12), а рішення (4) будуть також визначатися трьома нерівностями (10)–(12), якщо в них замінити P на $-P$. Отже, умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною

порожниною, що містить ідеальну рідину, з урахуванням основного і додаткового тонів коливання рідини, зводяться до трьох нерівностей (10)–(12).

Нерівність (10) не виконується в разі кратних власних частот ($\lambda_1 = \lambda_2$) або для $\lambda_1 = 1$, або $\lambda_2 = 1$. Будемо вважати, що $\omega \neq 0$ ($P \neq 0$). В роботах [7-8] показано, що нестійкість може виникнути тільки при позитивних значеннях λ_n . Тому, якщо припустити, що $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_n \neq 1, \lambda_n > 0$ і $\omega \neq 0$, то система нерівностей (10)–(12) спрощується:

$$\Gamma_{71}\tilde{\Gamma} + \Gamma_{70} < 0, \quad (13)$$

$$\Gamma_{52}\tilde{\Gamma}^2 + \Gamma_{51}\tilde{\Gamma} + \Gamma_{50} < 0, \quad (14)$$

$$-x^2\tilde{\Gamma} + \Gamma_{30} < 0, \quad (15)$$

У випадку відсутності відносного руху рідини в порожнині твердого тіла ($E_1 = E_2 = 0$) характеристичне рівняння (6) буде квадратним рівнянням

$$a_2\lambda^2 + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (16)$$

Тут

$$a_2 = A > 0, \quad a_1 = D_1 > 0, \quad b_2 = (C - 2A)\omega,$$

$$a_1 = (C - A)\omega^2 - \Gamma, \quad b_1 = P - D_1\omega.$$

Умови асимптотичної стійкості рівняння (16), тобто рішення (3) ($\omega = P/D_3$), визначаються нерівностями

$$|\Delta_1| = a_1 = D_1/A > 0, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_2 & -b_1 & -a_0 \\ 0 & a_1 & -b_0 \\ a_1 & -b_0 & -a_0 \end{vmatrix} > 0$$

або нерівністю

$$(CD_1 - AD_3)P^2 - D_1^2D_3\Gamma > 0 \quad (17)$$

Умова асимптотичної стійкості рішення (4) ($\omega = -P/D_3$) має вигляд

$$(CD_1 + AD_3)P^2 + D_1^2D_3\Gamma < 0. \quad (18)$$

Нерівності (17)–(18) слідує також з нерівності (15) відповідно при $\omega = -P/D_3$ і $\omega = P/D_3$, якщо в ньому покласти $E_1 = E_2 = 0$ і $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і співпадають з нерівностями роботи [1]. У більшості практично важливих випадках, основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини ($n = 1$) [6]. Так, наприклад, в разі еліпсоїдальної порожнини з нескінченного спектра власних значень λ_n на рух твердого тіла впливає тільки основна гармоніка λ_1 . Тому окремо розглянемо випадок $n = 1$. В цьому випадку характеристичне рівняння (6) буде кубічним рівнянням

$$a_3\lambda^3 + (a_2 + ib_2)\lambda^2 + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= A - E_1 = A^* > 0, \quad a_2 = D_1 > 0, \quad b_2 = (C - A\lambda_1 - 2A^*)\omega, \\
 a_1 &= [C - A^* + (C - 2A)\lambda_1]\omega^2 - \Gamma, \quad b_1 = P - (1 + \lambda_1)D_1\omega \\
 a_0 &= (P - D_1\omega)\lambda_1\omega, \quad b_0 = [\Gamma - (C - A)\omega^2]\lambda_1\omega
 \end{aligned} \tag{20}$$

Умови асимптотичної стійкості рівняння (19), тобто рішення (3) ($\omega = P/D_3$), визначаються нерівностями

$$|\Delta_1| = a_2 = D_1 > 0,$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_2 & -b_1 \\ a_2 & -b_1 & -a_0 \end{vmatrix} > 0, \quad |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 \\ a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \tag{21}$$

Підставивши (20) в (21), отримаємо

$$(\lambda_1 - 1)\tilde{\Gamma}x^3 + [\tilde{\Gamma} - C(\lambda_1 - 1)P^2]x^2 - (C + A^* - A\lambda_1)P^2x + A^*P^2 < 0. \tag{22}$$

$$[\tilde{\Gamma} - \lambda_1(\lambda_1 - 1)E_1P^2]x^2 - (C - E_1\lambda_1)xP^2 + A^*P^2 < 0. \tag{23}$$

Нерівності (22)–(23) не залежать від знака величини P і тому також є умовами асимптотичної стійкості рішення (4) ($\omega = -P/D_3$).

Слід зазначити, що коефіцієнти (19) можна отримати з (8), якщо в них покласти $E_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ і вважати $a_3 = a_4$, $a_2 = a_3$, $b_2 = b_3$, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$. Нерівності (22)–(23) також слідують з (11)–(12), якщо в останніх покласти $E_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Таким чином, при врахуванні основного тону коливань рідини ($n = 1$) кубічна і квадратна нерівності (22)–(23) є умовами асимптотичної стійкості.

У разі вільного обертання дзиги Лагранжа ($\Gamma = 0$) нерівності (22)–(23) при $P \neq 0$ приймуть вигляд

$$\begin{cases} E_1\lambda_1(\lambda_1 - 1)x^2 + (C - E_1\lambda_1)x - A^* > 0, \\ C(\lambda_1 - 1)x^2 + (A^* - A\lambda_1 + C)x - A^* > 0. \end{cases} \tag{24}$$

І якщо при $\Gamma \neq 0$ умови асимптотичної стійкості $P \neq 0$ не залежали від знака величини P , то при $\Gamma = 0$ ці умови вже не залежать від величини P ($P \neq 0$) і зводяться до двох квадратних нерівностей (24) відносно змінної x .

На прикладі еліпсоїдальної порожнини проведемо дослідження системи нерівностей (24). Введемо безрозмірні змінні

$$A = A_0 + mL^2 + \frac{1}{5}(1 + \beta^2), \quad C = C_0 + \frac{2}{5}\beta, \quad E_1 = \frac{4}{5}\frac{\beta^2}{1 + \beta^2}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{1 + \beta^2}$$

$m = 4\beta/3$, $\beta = c/a$, c і a – напіввісі еліпсоїдальної порожнини (напіввісь c направлена по осі обертання). Розмірні величини моментів інерції A , C , E_1 віднесені до $\pi r a^5$, а маса m – до $\pi r a^3$.

На рис. 1–4 наведені графіки границь областей стійкості (24) (залежності $x = D_1/D_3$ від β) для $L = 0$, $a = 1$, $I = 1$. Области стійкості лежать вище даних кривих. Значенням $A_0 = 0$ і $C_0 = 0$ (невагоме тверде тіло) на рис. 1,3 відповідає нижній графік, а на рис. 2,4 – верхній. На рис. 1 і 3 $C_0 = 0$, а A_0 відповідно дорівнюють 0, 0.02, 0.04 і 0, 0.01, 0.01, а на рис. 2 і 4 $A_0 = 0$, а C_0 відповідно дорівнюють 0, 0.02, 0.04 і 0, 0.01, 0.01.

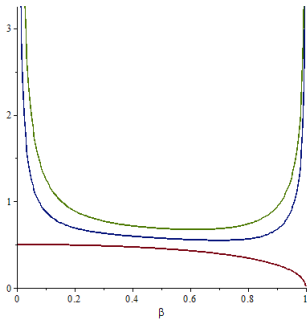


Рис. 1. Границя областей стійкості для $A_0 = 0, 0.02, 0.04$ при $C_0 = 0$

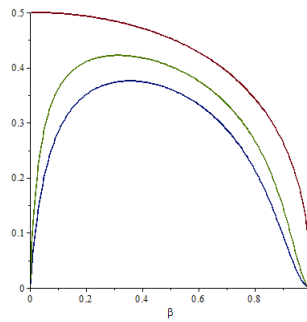


Рис. 2. Границя областей стійкості для $C_0 = 0, 0.02, 0.04$ при $A_0 = 0$

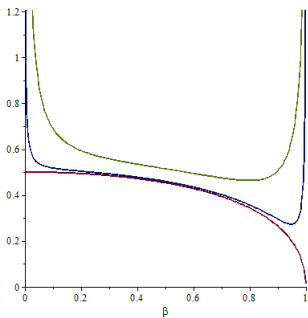


Рис. 3. Границя областей стійкості для $A_0 = 0, 0.01, 0.01$ при $C_0 = 0$

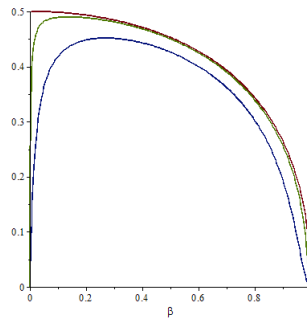


Рис. 4. Границя областей стійкості для $C_0 = 0, 0.01, 0.01$ при $A_0 = 0$

З наведених рисунків випливає, що асимптотична стійкість рівномірного обертання буде тільки в разі піджатої еліпсоїдальної порожнини $\beta < 1$, а також те, що зі збільшенням екваторіального моменту інерції твердого тіла область стійкості зменшується, а зі збільшенням осевого моменту інерції твердого тіла вона збільшується.

На підставі проведених аналітичних і чисельних досліджень можна зробити наступні висновки:

1. З урахуванням основного ($n = 1$) і додаткового ($n = 1, 2$) тонів коливань ідеальної рідини асимптотична стійкість рівномірного обертання під дією постійного і дисипативного моментів дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною визначається трьома нерівностями. При подальшому збільшенні числа тонів коливань рідини число нерівностей збільшується на одиницю.

2. Для еліпсоїдальної порожнини асимптотична стійкість рівномірного обертання має місце тільки для піджатої еліпсоїдальної порожнини.

3. В середовищі з опором умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання невідної дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною ($\Gamma \neq 0$) при $n = 1$ визначаються кубічним і квадратним нерівностями відносно x ($x = D_1/D_3 > 0$ і не залежать від знака величини P , а для вільної дзиги Лагранжа ($\Gamma = 0$) ці умови визначаються вже двома квадратними нерівностями і не залежать від величини P ($P \neq 0$).

4. При $n = 1$ показано, що зі збільшенням екваторіального моменту інерції твердого тіла області стійкості зменшуються, а зі збільшенням осевого моменту інерції твердого тіла вони збільшуються.

Цитована література

1. *Карпетян А.В., Лагутіна І.С.* Лекції по інтегруванню уривнень движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – №5. – С. 29–33.
2. *Kononov Yu.M., Vasylenko V.Yu., Proskuriakov V.O.* Stability of asymmetrical rigid body rotation with consideration of dissipative and constant moments // Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Vinnytsia, 2016. – P. 84–86.
3. *Kononov Yu.M., Vasylenko V.Yu.* Stability of the Rigid Body Rotation with the Element of Excitation in the Resistant Environment // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17–19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl'Stus Donetsk National University, 2017. – P. 33–35.
4. *Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В.* Об асимптотической устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей жидкость // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. – 2006. – №1. – С. 389–391.
5. *Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В.* Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. – 2007. – №1. – С. 48–51.
6. *Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В.* Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью // Вісник Харківського нац. університету ім. В.Н. Каразіна. Сер. “Математика, прикладна математика і механіка”. – 2009. – № 850. – С. 52–56.
7. *Докучаев Л.В., Рвалов Р.В.* Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. СССР. Механика твёрдого тела. – 1973. – №2. – С. 6–14.
8. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
9. *Джзури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

References

1. Karapetyan, A.V., Lagutina, I.S. (1998). O vliyaniy dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost' statsionarnykh dvizheniy volchka Lagranzha. *Mekhanika tvordogo tela*, 5, 29-33 (in Russian).
2. Kononov, Yu.M., Vasylenko, V.Yu (2016). Stability of asymmetrical rigid body rotation with consideration of dissipative and constant moments. *Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky*, 6, 84-86 (in English).
3. Kononov, Yu.N., Vasylenko, V. (2017). Stability of the Rigid Body Rotation with the Element of Excitation in the Resistant Environment. *Book of Abstracts of International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications*, 1, 33-35 (in English).
4. Kononov, Yu.N., Kiselova, N.V. (2006). Ob asimptoticheskoy ustoychivosti vrashcheniya v soprotivlyayushchey srede volchka Lagranzha s polost'yu, sodержashchey zhidkost'. *Bulletin of Donetsk Univ-ty*, 1, 389-391 (in Russian).
5. Kononov, Yu.N., Kiselova, N.V. (2007). Ob ustoychivosti vrashcheniya v soprotivlyayushchey srede volchka Lagranzha s polost'yu, sodержashchey idealnyuyu zhidkost'. *Bulletin of Donetsk Univ-ty*, 1, 48-51 (in Russian).
6. Kononov, Yu.N., Kiselova, N.V. (2009). Vliyaniye dissipativnogo i postoyannogo momentov na ustoychivost' ravnomernogo vrashcheniya v soprotivlyayushchey srede volchka Lagranzha s ideal'noy zhidkost'yu. *Bulletin of Kharkiv National University named after V.N. Karazina*, 850, 52-56 (in Russian).
7. Dokuchayev, L.V., Rvalov, R.V. (1973). Ob ustoychivosti statsionarnogo vrashcheniya tvordogo tela s polost'yu, sodержashchey zhidkost'. *Mekhanika tvordogo tela*, 2, 6-14 (in Russian).
8. Dokuchayev, L.V. (1987). *Nelineynaya dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruyemyimi elementami*. Moskva : Mashinostroyeniye (in Russian)
9. Dzhuri, E. (1979). *Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem*. Moskva : Nauka (in Russian).

Yu. M. Kononov, V. Yu. Vasylenko

On the Stability of the rotation under the action of constant momentum Lagrangian top with perfect fluid in a resisting medium.

The rotation around a fixed point of a heavy dynamically symmetric solid body with an arbitrary asymmetric cavity completely filled with an ideal in-compressible liquid is considered. The stability of a uniform rotation of a Lagrang' top with the ideal liquid in a resisting medium under condition of a given constant moment is investigated. The equation of the perturbed motion of the Lagrang' top with the ideal liquid is presented. It is proved the following: the asymptotic stability of uniform rotation for an ellipsoidal cavity will be only for a compressed ellipsoidal cavity. It has been observed that most practically important cases consider the main effect of the ideal liquid influence on the motion of a solid can be researched by means of considering only the fundamental tone of the liquid oscillation. Conditions of uniform rotation asymptotic stability in a resistive medium under the action of the Lagrange top' constant moment with an arbitrary axisymmetric cavity containing an ideal liquid are obtained. Stability conditions are derived with provisions for the main and additional tones of liquid oscillations. The heavy solid body with the fixed-point value is exposed to the action of a constant moment in the inertial coordinate system. Analytic and numerical investigations of the main and additional tones of liquid oscillations influence, over-turning, restoring, dissipative and constant moments on the conditions of the asymptotic stability of the uniform rotation of the Lagrange top with an ideal liquid are carried out. It is stated the following: cubic and square inequalities presented in the

paper are conditions of asymptotic stability if the basic tone of liquid fluctuations will be mentioned. Stability region numerical studies have been carried out on the example of an ellipsoidal cavity. It is presented that increasing of the equatorial moment of inertia of the solid body de-creases its stability region as well as the increasing of the solid body inertia axial moment in-creases the last one.

Keywords: *asymptotic stability, constant moment, Lagrange top, ideal liquid, resistive medium.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
Вінниця
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
v.vasilenko@donnu.edu.ua

Отримано 25.04.19