

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-11

©2019. Ю.М. Кононов, Я.І. Святенко

ВПЛИВ ДИСИПАТИВНОГО І ПОСТІЙНОГО МОМЕНТІВ НА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ВІЛЬНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опірком двох вільних гіроскопів Лагранжа, пов'язаних пружним сферичним шарніром. Обертання кожного гіроскопа підтримується постійними моментами в інерціальній системі координат. Розглянуто випадки виродження пружного сферичного шарніра в сферично непружний, циліндричний і універсальний пружний шарнір (шарнір Гука). Показано, що при досить великій жорсткості шарніра умови асимптотичної стійкості визначаються тільки однією нерівністю, яка збігається з нерівністю, отриманою для випадку циліндричного шарніра. При збігу кутових швидкостей власних обертань гіроскопів ця нерівність збігається з відомою умовою для одного гіроскопа.

MSC: 70E55.

Ключові слова: динамічно симетричні тверді тіла, пружний сферичний шарнір, середовищі з опірком, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

1. Вступ.

Система пружно зв'язаних твердих тіл (СПЗТТ) займає проміжне положення між абсолютно твердим і пружним тілом, що дає можливість моделювати рух пружних тіл в досить широких межах. Так, наприклад, в роботі [1] пружний корпус ракети моделюється системою двох твердих тіл, пов'язаних пружним шарніром, а роботах [2–3] — пружним стрижнем і системою двох твердих тіл, з'єднаних пружним шарніром. У цих роботах відзначається хороший збіг результатів розрахунків з експериментальними даними. Надалі подібні дослідження були продовжені в роботах [4–5] та інших. Завдання про рух СПЗТТ має і самостійне наукове і прикладне значення, тому що багато об'єктів сучасної ракетно-космічної, авіаційної, морської, залізничної та ін. техніка може бути представлена у вигляді СПЗТТ. Виконання об'єктів космічної, авіаційної і морської техніки в вигляді СПЗТТ намітилося в 60-і роки минулого століття. СПЗТТ описують гіроскопічні системи, роботи, маніпулятори і мн. ін. Рух СПЗТТ скінченим кінцевим числом нелінійних ОДР. У зв'язку з цим СПЗТТ набуває все більшого прикладного значення як модель керованої механічної системи і все більшого теоретичного значення, тому що в такій системі виникають коливання досить складного вигляду. Найбільш загальні рівняння руху системи зв'язаних твердих тіл були отримані П.В. Харламовим [6] і досліджені в роботах його учнів [7–10] і багатьох інших. Вплив дисипації на

Дослідження виконані в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки, проект № 0119U100042.

стійкість обертання твердого тіла було розглянуто в багатьох статтях. Досить хороши огляд цих статей і методів досліджень можна знайти, наприклад, в роботах [11–13]. У статті [14] розглянуто задачу про рух важкого динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки, що знаходиться під дією дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі координат. Показано, що ці моменти можуть надавати істотно дестабілізуючий вплив на стійкість рівномірного обертання твердого тіла. У цій статті узагальнено результати на випадок рівномірного обертання двох вільних пружно зв'язаних динамічно симетричних твердих тіл. Розглянуто випадки виродження пружного сферичного шарніра в сферично непружний, циліндричний і універсальний пружний шарнір (шарнір Гука). Показано, що при досить великій жорсткості шарніра умови асимптотичної стійкості визначаються тільки однією нерівністю, яка збігається з нерівністю, отриманою для випадку циліндричного шарніра. При співпадінні кутових швидкостей власних обертань гіроскопів ця нерівність збігається з відомою умовою для одного гіроскопа [14].

2. Постановка задачі і метод вирішення.

Розглянемо вільне обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних динамічно симетричних твердих тіл S_i ($i = 1, 2$). Тверді тіла S_1 і S_2 зв'язані в точці O пружним відновлюючим сферичним шарніром $\bar{L} = k\bar{c}_1 \times \bar{c}_2 / (|\bar{c}_1| |\bar{c}_2|)$, $k \geq 0$ [8–9]. Тверде тіло S_i знаходиться під дією дисипативного моменту $\vec{M}_{id} = -D_i \vec{\omega}_i$ ($D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$), який моделює середовище з опором і постійного моменту в інерціальній системі координат $\vec{M}_{ip} = P_i \bar{v}$. Тут $\bar{c}_1 = \overline{C_1 O}$, $\bar{c}_2 = \overline{O C_2}$; C_i і $\vec{\omega}_i$ відповідно центр мас і кутова швидкість тіла S_i ; D_{i1}, D_{i1}, D_{i3} і P_i – сталі ($D_{i1} > 0, D_{i3} > 0$), $i = 1, 2$; \bar{v} – одиничний вектор, спрямований по спільній осі власних обертань гіроскопів Лагранжа в незбуреному русі, для визначеності будемо вважати по вектору $\bar{c}_1 = \overline{C_1 O}$ (рис. 1).

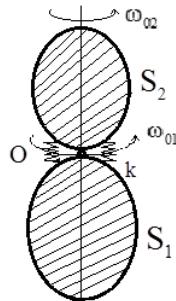


Рис. 1.

Рівняння обертання двох вільних, пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, з урахуванням дисипативного і постійного моментів, матимуть вигляд аналогічний [7–10]

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \bar{\omega}_1)^\bullet + m_2 \bar{c}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{c}_1 + \bar{\omega}_2 \times \bar{c}_2)^\bullet &= -\bar{L} + P_1 \bar{v} - D_1 \bar{\omega}_1, \\ (J_2 \cdot \bar{\omega}_2)^\bullet + m_2 \bar{c}_2 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{c}_1)^\bullet &= \bar{L} + P_2 \bar{v} - D_2 \bar{\omega}_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де J_i – тензор інерції тіла S_i відносно його центра мас C_i , а m_i – маса цього тіла ($i = 1, 2$), точкою позначена абсолютна похідна.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$ з вершиною в точці O , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i ($\bar{c}_i = c_i \bar{e}_3^i$) і введемо нерухомий базис $\bar{e}_1^0 \bar{e}_2^0 \bar{e}_3^0$, вектор \bar{e}_3^0 якого збігається з векторами \bar{e}_3^i в незбуреному русі.

Величини $\alpha_{\mu k}^{ij} = \bar{e}_\mu^i \cdot \bar{e}_k^j$ ($i, j = \bar{0}, \bar{n}$; $\mu, k = 1, 2, 3$) визначають орієнтацію базису $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$ в $\bar{e}_1^j \bar{e}_2^j \bar{e}_3^j$

$$\bar{e}_\mu^i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{\mu k}^{ij} \bar{e}_k^j. \quad (1.2)$$

Коефіцієнти $\alpha_{\mu k}^{ij}$ можна виразити через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ і $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ [9]

$$\alpha_{\mu k}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{k\sigma}^{j0}. \quad (1.3)$$

Векторні рівняння (1.1) в проєкціях на осі рухомого базису $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$ приймуть вигляд

$$\begin{aligned} A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - A'_1) q_1 r_1 + \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{21}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{11}] = \\ = -k(\alpha_{31}^{20} \alpha_{21}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{22}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{23}^{10}) - D_{11} p_1 + \alpha_{13}^{10} P_1, \\ A'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) p_1 r_1 - \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{11}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{11}] = \\ = k(\alpha_{31}^{20} \alpha_{11}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{12}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{13}^{10}) - D_{11} q_1 + \alpha_{23}^{10} P_1, \\ C_1 \dot{r}_1 = -D_{13} r_1 + \alpha_{33}^{10} P_1 \\ A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - A'_2) q_2 r_2 + \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{12}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{32}^{12}] = \\ = -k(\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} p_1 + \alpha_{13}^{20} P_2, \\ A'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) p_2 r_2 - \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{11}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{31}^{12}] = \\ = k(\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{12}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{13}^{20}) - D_{21} q_2 + \alpha_{23}^{20} P_2, \\ C_2 \dot{r}_2 = -D_{23} r_2 + \alpha_{33}^{20} P_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

До системи рівнянь (1.4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [9]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11}^{i0} &= -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{12}^{i0} &= -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{31}^{i0} &= -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{33}^{i0} &= -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тут p_i, q_i, r_i — проекції вектора кутової швидкості $\bar{\omega}_i$ твердого тіла S_i^0 на осі рухомого базису $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$; $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$, $A_i' = A_i + \nu c_i^2$, $\mu = \nu c_1 c_2$, $\nu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

3. Вивід рівнянь збуреного руху в середовищі з опором двох вільних пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа.

Припустимо, що в незбуреному русі тіло S_i обертається з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_{0i}$ навколо вектора \bar{c}_i . Нехай $\bar{\omega}_{0i} = \omega_{0i} \bar{e}_3^i$.

Система рівнянь (1.4)–(1.5) допускає частний розв'язок

$$\begin{aligned} p_i = q_i = 0, \quad r_i = \omega_{0i} &= \frac{P_i}{D_{i3}} \\ \alpha_{11}^{i0} = \cos \omega_{0i} t, \quad \alpha_{12}^{i0} = \sin \omega_{0i} t, \quad \alpha_{13}^{i0} = 0, \\ \alpha_{21}^{i0} = -\sin \omega_{0i} t, \quad \alpha_{22}^{i0} = \cos \omega_{0i} t, \quad \alpha_{23}^{i0} = 0, \\ \alpha_{31}^{i0} = 0, \quad \alpha_{32}^{i0} = 0, \quad \alpha_{33}^{i0} = 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

котрі відповідають рівномірним обертанням тіл S_i навколо осей \bar{c}_i .

Дослідимо стійкість рішення (2.1) в частині змінних, які визначають положення осей \bar{s}_i в просторі і кутові швидкості твердих тіл. Для цього в збуреному русі покладемо $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{0i} + \bar{\Omega}_i$, де $|\bar{\Omega}_i|$ є величиною першого порядку малості в порівнянні с $|\bar{\omega}_{0i}|$.

Зберігаючи колишні позначення, запишемо рівняння збуреного руху

$$\begin{aligned} A_i' \dot{p}_i + (C_i - A_i') \omega_{0i} q_i + s_1 a_2 [(\dot{p}_j - \omega_{0j} q_j) \alpha_{22}^{1i} - (\dot{q}_j + \omega_{0j} p_j) \alpha_{ji}^{1i}] = \\ = (a_i g - k) \alpha_{23}^{i0} - D_{i1} p_i - \alpha_{31}^{0i} P_i \\ A_i' \dot{q}_i - (C_i - A_i') \omega_{0i} p_i - s_1 a_2 [(\dot{p}_j - \omega_{0j} q_j) \alpha_{ij}^{1i} - (\dot{q}_j + \omega_{0j} p_j) \alpha_{11}^{1i}] = \\ = (a_1 g - k) \alpha_{13}^{10} - D_{11} q_i - \alpha_{32}^{01} P_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i, \quad (2.3)$$

$$\dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i. \quad (2.4)$$

Тут $i, k = 1, 2, j = 3 - i$, $\alpha_{11}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$, $\alpha_{12}^{ik} = -\sin \varphi_{ki}$, $\alpha_{21}^{ik} = \sin \varphi_{ki}$, $\alpha_{22}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$, $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$, $\varphi_i = \omega_{0i} t$.

Рівняння (2.3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний від'ємний корінь.

Перейдемо до нових змінних $p_i', q_i', \alpha_{13}^i, \alpha_{23}^i$ [9]

$$\begin{aligned} p_i' = p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i, \quad q_i' = p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i, \\ \alpha_{13}^i = \alpha_{31}^{i0} \sin \varphi_i + \alpha_{32}^{i0} \cos \varphi_i, \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{31}^{i0} \cos \varphi_i - \alpha_{32}^{i0} \sin \varphi_i. \end{aligned}$$

і покладемо $\Omega_i = q_i' - i p_i'$, $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i \alpha_{23}^i$, тоді в нових змінних система рівнянь (2.2) і (2.4) запишеться так

$$A_i' \ddot{\gamma}_i + (i C_i \omega_{0i} + D_{i1}) \dot{\gamma}_i + \mu \ddot{\gamma}_j = -(k + i P_i) \gamma_i, \quad (i = 1, 2, j = 3 - i). \quad (2.5)$$

Тут і далі слід відрізнати нижній індекс $i = 1, 2$ від уявної одиниці.

Рівняння (2.5) визначаються чотирма ступенями вільності і описують рух лінійної механічної системи, що знаходиться під дією дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних сил.

4. Асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох вільних пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа.

Представивши шукані функції у вигляді $ae^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (2.8) у вигляді

$$\begin{vmatrix} F_1 & k - \mu\lambda^2 \\ k - \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

або

$$\lambda^4 + (a_3 + ib_3)\lambda^3 + (\tilde{a}_2 + ib_2)\lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0, \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} F_i &= A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_{i1})\lambda + k + iP_i, \quad \tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}. \\ a_3 &= \frac{A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}}{a_4} > 0, \quad b_3 = \frac{A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1}{a_4}, \\ \tilde{a}_2 &= \frac{D_{11} D_{21} - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (A'_1 + A'_2 + 2\mu)k}{a_4}, \\ b_2 &= \frac{\tilde{C}_1 D_{21} + \tilde{C}_2 D_{11} + A'_1 P_2 + A'_2 P_1}{a_4}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{(D_{11} + D_{21})k - \tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1}{a_4}, \\ b_1 &= \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)k + P_1 D_{21} + P_2 D_{11}}{a_4}, \quad a_0 = -\frac{P_1 P_2}{a_4}, \quad b_0 = \frac{k(P_1 + P_2)}{a_4}, \\ a_4 &= A'_1 A'_2 - \mu^2 = A_1 A_2 + \nu(A_1 c_2^2 + A_2 c_1^2) > 0, \quad \tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дослідження характеристичного рівняння (3.2) будемо проводити за допомогою інорного підходу. Згідно з критерієм Лъенара–Шіпара [15], для існування асимптотично стійких рішень необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (3.2) була інорно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 = \frac{A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}}{a_4} > 0, \quad (3.4)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.5)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.6)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.7)$$

Так як $a_3 > 0$ ($I_1 > 0$), то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначається трьома нерівностями (3.5)–(3.7).

З нерівності (3.4) випливає, що при відсутності часткової дисипації ($D_{11} = D_{21} = 0$) коефіцієнт $a_3 = 0$ і асимптотична стійкість рівномірних обертань неможлива.

Вихідна механічна система є багатопараметричною. У зв'язку з цим розглянемо ряд окремих випадків, які мають і самостійний науковий інтерес.

Вплив жорсткості шарніра на умови стійкості. Нехай $\kappa = 1/k \ll 1$. З точністю до величин першого порядку малості відносно κ випишемо нерівності (3.5)–(3.7):

$$I_{31}\kappa + I_{30} > 0, \quad I_{51}\kappa + I_{50} > 0, \quad I_{71}\kappa + I_{70} > 0. \quad (3.8)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{31} = & -(A'_1 A'_2 - \mu^2 \left[(\tilde{C}_1 D_{21} + A'_2 P_1)^2 + (\tilde{C}_2 D_{11} + A'_1 P_2)^2 + \right. \\ & \left. + 2(\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 D_{11} D_{21} + A'_1 A'_2 P_1 P_2) + (\tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1)(A'_1 D_{21} - A'_2 D_{11}) \right] + \\ & \left. + (A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}) \left[(\tilde{C}_1^2 + D_{11}^2) A'_2 D_{21} + (\tilde{C}_2^2 + D_{21}^2) A'_1 D_{11} \right], \right. \\ I_{30} = & (A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}) \left[(A'_2 + \mu)^2 D_{21} + (A'_1 + \mu)^2 D_{11} \right] > 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$I_{50} = D_1 \left[(A'_2 + \mu)^2 D_{21} + (A'_1 + \mu)^2 D_{11} \right]^2 > 0,$$

$$I_{70} = \left[(A'_2 + \mu)^2 D_{21} + (A'_1 + \mu)^2 D_{11} \right]^2 (D_1 \tilde{C} - P \tilde{a}_{21}) P,$$

$$\tilde{a}_{21} = A'_1 + A'_2 + 2\mu > 0, \quad D_1 = D_{11} + D_{21}, \quad \tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2, \quad P = P_1 + P_2.$$

Величини I_{51} і I_{71} у зв'язку з їхньою громіздкістю не наведені.

Із (3.8)–(3.9) випливає, що при досить великій жорсткості (досить малому κ) умова стійкості визначається однією нерівністю

$$(D_1 \tilde{C} - P \tilde{a}_{21}) P > 0, \quad (3.10)$$

яке розпадається на дві нерівності і з урахуванням введених позначень має вигляд:

$$\begin{aligned} C_1 P_1 D_{23} + C_2 P_2 D_{13} & > \tilde{a}_{21} P D_{13} D_{23} / D_1 \quad (P > 0), \\ C_1 P_1 D_{23} + C_2 P_2 D_{13} & < \tilde{a}_{21} P D_{13} D_{23} / D_1 \quad (P < 0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Випадок не пружного сферичного шарніра ($k = 0$). В цьому випадку в коефіцієнтах характеристичного рівняння (3.2) треба покласти $k = 0$. Нерівність (3.4) не змінюється, а нерівності (3.5)–(3.7) незначно спрощуються (коефіцієнт $b_0 = 0$). Згідно (3.8) ці нерівності приймуть вигляд

$$I_{31} > 0, I_{51} > 0, I_{71} > 0. \quad (3.12)$$

Випадок циліндричного шарніра ($k = \infty$). У цьому випадку рівняння (3.2) запишеться так

$$\lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1)\lambda + ib_0 = 0, \quad (3.13)$$

де

$$\tilde{a}_1 = \frac{D_1}{\tilde{a}_2}, b_1 = \frac{\tilde{C}}{\tilde{a}_2}, b_0 = \frac{P}{\tilde{a}_2}, \tilde{a}_2 = \tilde{a}_{21} > 0,$$

і для існування асимптотично стійких рішень рівняння (3.13) також необхідно і достатньо, щоб були позитивно визначені матриці Δ_1 і Δ_3 :

$$I_1 = \tilde{a}_1 > 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \end{vmatrix} = a_3(a_3\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1) + b_2(a_3b_3 - b_2) > 0. \quad (3.14)$$

Так як $\tilde{a}_1 > 0$ ($I_1 > 0$), то асимптотична стійкість визначається нерівністю (3.14), яка збігається з нерівністю (3.10).

Таким чином, в разі циліндричного шарніра, асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, з урахуванням постійних моментів, визначається нерівністю (3.10).

Слід зазначити, що при $\omega_{01} = \omega_{02}$ ($P_1D_{23} = P_2D_{13}$), $C = C_1 + C_2$, $A = A_1 + A_2$, $c = c_1 + c_2$ нерівність (3.10) збігається з нерівністю роботи [14].

Випадок універсального пружного шарніра (шарніра Гука) ($k \neq 0, \omega_{01} = \omega_{02} = \omega$). В цьому випадку, поклавши в коефіцієнтах (3.3) ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$) ($P_1D_{23} = P_2D_{13}$), отримаємо:

$$b_3 = b_{31}\omega, b_{31} = \frac{A'_1\tilde{C}_2 + A'_2\tilde{C}_1}{a_4}, \tilde{a}_1 = \tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{12}\omega, \tilde{a}_2 = \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{22}\omega^2,$$

$$\tilde{a}_{11} = \frac{C_1P_2 + C_2P_1}{a_4}, \tilde{a}_{21} = \frac{D_{11} + D_{21}}{a_4}k,$$

$$\tilde{a}_{22} = \frac{D_{11}D_{21} + (A'_1 + A'_2 + 2\mu)k}{a_4}, \tilde{a}_{22} = \frac{C_1C_2}{a_4}, b_2 = b_{21}\omega + b_{22},$$

$$b_{21} = \frac{C_1D_{21} + C_2D_{11}}{a_4}, b_{22} = \frac{A'_1P_2 + A'_2P_1}{a_4}, b_1 = b_{11}\omega + b_{12}, b_{11} = \frac{C_1 + C_2}{a_4}k$$

Коефіцієнти a_0 , a_3 не змінюються, а перша нерівність $I_3 > 0$ матиме вигляд квадратної нерівності відносно ω

$$(a_3 b_{31} - b_{21}) b_{21} \omega^2 - (a_3^2 \tilde{a}_{22} - a_3 \tilde{a}_{11} - a_3 b_{22} b_{31} + 2 b_{21} b_{22}) \omega - \tilde{a}_{12} a_3 + a_3^2 \tilde{a}_{21} - b_{22}^2 > 0$$

невиконання якої веде до асимптотичної нестійкості.

5. Висновки.

Умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опором двох вільних гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначаються трьома нерівностями. Обертання кожного гіроскопа підтримується постійним моментом в інерціальній системі координат. Розглянуто випадки виродження пружного сферичного шарніра в сферичний непружний, циліндричний і універсальний пружний шарнір (шарнір Гука). Показано, що при досить великій жорсткості шарніра умови стійкості визначаються тільки однією нерівністю, яка збігається з нерівністю, отриманою для випадку циліндричного шарніра. При співпадінні кутових швидкостей власних обертань гіроскопів ця нерівність збігається з відомою умовою для одного гіроскопа.

Цитована література

1. *Reis G.F., Sundberg W.J.* Calculations of the aeroelastic bending of a sounding rocket based on flight data // AIAA Sound. – New York, 1967. – P. 402–422.
2. *Cochran J.E., Christensen D.E.* Post-launch effect of transverse bending of a spinning free-flight rocket during the guidance phase // AIAA: Atmos. Flight Mech. Conf.: Future Space Syst. N.Y., s.a., 1979. – P. 324–325.
3. *Cochran J.E., Christensen D.E.* Free-Flight rocket attitude motion due to transverse vibration // J. Spacecraft and Rockets. – 1980. – 17, № 5. – P. 425–431.
4. *Dornheim M.* New Path to Space. Aviation // Week & Space Technology. – 2005. – № 24. – P. 26–30.
5. *Леутин А.П.* Моделирование движения связанных тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2012. – №1. – С. 27–44.
6. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
7. *Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 160 с.
8. *Светличная Н.В.* Устойчивость равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа, связанных упругим сферическим шарніром // Механика твердого тела. – 1985. – Вып. 17. – С. 77–79.
9. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
10. *Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А.* Динамика систем связанных твердых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. – ИПММ НАН Украины, Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
11. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращения твердого тела, близких к случаю Лагранжа // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. – 1998. – 2(6). – С. 32–37.
12. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движения твердого тела относительно центра масс. – М. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.

13. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass. – Springer International Publishing AG, 2017. – 243 p.
14. Карапетьян А.В., Лагутина И.С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – №5. – С. 29–33.
15. Джурю Э. Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

References

1. Reis, G.F., Sundberg, W.J (1967). Calculations of the aeroelastic bending of a sounding rocket based on flight data. *AIAA Sound*, N.Y., 402-422.
2. Cochran, J.E., Christensen, D.E. (1979). Post-launch effect of transverse bending of a spinning free-flight rocket during the guidance phase. *AIAA: Atmos. Flight Mech. Conf.: Future Space Syst.* N.Y., 324-325.
3. Cochran J.E., Christensen D.E. (1980). Free-Flight rocket attitude motion due to transverse vibration. *J. Spacecraft and Rockets*, 17(5), 425-431.
4. Dornheim, M. (2005). New Path to Space. Aviation. *Week & Space Technology*, 24, 26-30.
5. Leutin, A.P. (2012). Modeling the Motion of Connected Bodies. *Mechanics of Solids*, 47(1), 19-33.
6. Harlamov, P.V. (1972). Ob uravneniyah dvizheniya sistemy tverdyih tel. *Mehanika tverdogo tela*, 4, 52-73 (in Russian).
7. Savchenko, A.Ya. (1977). *Ustoychivost statsionarnyih dvizheniy mehanicheskikh sistem*. K.: Nauk. dumka (in Russian).
8. Svetlichnaya, N.V. (1985). Ustoychivost ravnomernyih vrascheniy sistemy dvuh giroskopov Lagranzha, svyazannyih uprugim sfericheskim sharnirom. *Mehanika tverdogo tela*, 17, 77-79 (in Russian).
9. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyihin, G.A. (1991). *Ustoychivost dvizheniya sistem svyazannyih tvyordyih tel*. K.: Nauk. dumka (in Russian).
10. Bolgrabskaya, I.A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel*. Seriya "Zadachi i metody: matematika, mehanika, kibernetika", V. 9. K.: Nauk. Dumka (in Russian).
11. Leschenko, D.D. (1998). Evolyutsiya vrascheniya tverdogo tela, blizkih k sluchayu Lagranzha. *Aktualnyie problemy aviatsionnyih i aerokosmicheskikh sistem: protsessyi, modeli, eksperiment*, 2(6), 32-37 (in Russian).
12. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leschenko, D.D. (2015). *Evolyutsiya dvizheniya tverdogo tela otноситelno tsentra mass*. M. Izhevsk: Izhevskiy institut kompyuternyih issledovaniy (in Russian).
13. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (2017). *Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass*. Springer International Publishing AG.
14. Karapetyan, A.V., Lagutina, I.S. (1998). O vliyaniy dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnyih dvizheniy volchka Lagranzha. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*, 5, 29-33 (in Russian).
15. Dzhuri, E. (1979). *Innoryi i ustoychivost dinamicheskikh sistem*. M.: Nauka (in Russian).

Yu.M. Kononov, Ya.I. Sviatenko

On the subject of influence of dissipative and permanent momentums on stability of uniform rotations of two elastically connected free gyroscopes of Lagrange.

In many works, there are studies of the asymptotic stability of rotation of a free Lagrange gyroscope in a resisting medium. This article generalizes this problem to the case of uniform rotations of two free Lagrange gyroscopes connected by an elastic restoring spherical hinge. The rotation of each gyroscope is maintained by a constant moment in an inertial coordinate system. The characteristic equation of the perturbed motion is presented in the form of an algebraic equation of the fourth degree with complex

coefficients. Based on the inner approach, conditions of asymptotic stability are obtained in the form of a system of three inequalities. The left-hand side of these inequalities is represented, respectively, in the form of determinants of the third, fifth, and seventh orders. Up to first-order values of smallness, relative to the reciprocal of the stiffness coefficient, a study is made of the effect of the joint stiffness on stability conditions. From the conditions of positivity of the highest coefficients in three inequalities, it is shown that for a sufficiently large rigidity, the stability conditions are determined by only one inequality. Cases of degeneration of an elastic spherical joint into a spherical inelastic, cylindrical, and universal elastic joint (Hooke's joint) are considered. In the case of an inelastic spherical joint, the system of three inequalities is slightly simplified. The greatest simplification arises in the case of a cylindrical hinge. In this case, the characteristic equation is represented as a quadratic equation with complex coefficients. According to the inner approach, the conditions of asymptotic stability are written in the form of a single inequality, the left side of which is presented in the form of third-order determinants. It is shown that this inequality coincides with the inequality obtained earlier for the case of a sufficiently large rigidity of the hinge. If the angular velocities of the proper rotations of the gyroscopes coincide, the inequality obtained for the cylindrical hinge coincides with the well-known inequality for one gyroscope. In the case of a universal elastic hinge (Hooke's hinge), the first inequality is represented as a square inequality with respect to the angular velocity of proper rotation.

Keywords: *dynamically symmetric rigid bodies, ball-and-socket elastic and cylindrical hinge, resisting environment, uniform rotations, asymptotic stability.*

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
Вінниця
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
filiioeee@gmail.com*

Отримано 04.05.19