УДК 517.95
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-12

©2019. **М.В. Краснощок**

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ З ПАМ'ЯТТЮ

М. Капуто було запропоновано модифікований закон Дарсі, в якому швидкість руху рідини в пористому середовищі залежить не тільки від градієнту тиску, але також від його дробової похідної. Дане явище пов'язане з тим, що в певних середовищах проникність залежить від попередніх значень тиску в рідині. У даній роботі розглянуто відповідну задачу фільтрації з памяттю. Подібні задачі виникають також при моделюванні руху узагальненної рідини другого порядку. За допомогою методу Галеркіна доведено існування і єдиність узагальненного розв'язку першої початково-крайової задачі. Також вивчено задачу оптимального керування, в якій функціонал вартості має класичний вигляд і складається із суми квадратичної норми різниці між станом керованої системи і заданим елементом та регуляризуючим інтегралом Тихонова. Мета роботи полягає в тому, щоби
(i) отримати умови існування глобального мінімуму функціонала вартості,
(ii) отримати необхідні і достатні умови існування єдиного мінімайзера,
(iii) скласти конструктивний алгоритм знаходження апроксимацій оптимального керування.

MSC: 49K20.

Ключові слова: *оптимальне керування, похідна Капуто, простори Соболева.*

Вступ. Фізична модель.

Класичний закон Дарсі має вигляд

$$\overrightarrow{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \tag{1}$$

де $\overrightarrow{v}$ – швидкість фільтрації, k – коефіцієнт проникності, μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини, p – тиск. В роботах М. Капуто [7–9] запропоновано моделі, в яких проникність залежить від попередніх за часом значень градієнту тиску і потоку. Це явище, яке математично представлено за допомогою формалізму пам'яті, спостерігається при видобутку нафти в геотермальних районах, а також в лабораторних умовах.

Перейдемо до опису конкретної моделі [9]. Надалі, для скорочення запису, всі фізичні константи дорівнюють одиниці. Рідину вважаємо однорідною, тому рівняння стану і модифікований закон Дарсі запишемо у вигляді

$$\rho(x,t) = p(x,t), \qquad \overrightarrow{v}(x,t) = -\nabla p(x,t) - D_t^\sigma \nabla p(x,t),$$

де ρ -густина рідини і

$$D_t^\sigma p(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^t \frac{p_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \tag{2}$$

похідна Капуто порядку $\sigma \in (0,1)$. Позначимо через $q(x,t)$ масову швидкість перетікання рідини в одиниці об'єму породи. З урахуванням рівняння нерозривності

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho \overrightarrow{v}) = q \tag{3}$$

дістаємо лінеаризовану модель

$$p_t(x,t) - \mathrm{div}(\nabla p(x,t)) - \mathrm{div}(D_t^\sigma \nabla p(x,t)) = q(x,t). \tag{4}$$

З цього приводу, див. також роботу [11] і монографію [2, розділ 1, §4].

Із загальними положеннями теорії диференціальних і інтегральних рівнянь дробового порядку можна ознайомитися за монографіями [10,13]. Питання розв'язності крайових задач для для рівнянь дробового порядку з частинними похідними вивчалося різними методами в роботах [1, 3–5, 17, 25]. Задачі оптимального керування для таких рівнянь були предметом досліджень у публікаціях [12, 14, 18, 26]. Загальну теорію оптимального керування системами викладено, наприклад, в монографіях [6, 22].

Структура статті така. У першому розділі сформульовано задачу оптимального керування. Другій розділ містить вихідні положення теорії рівнянь з похідними дробового порядку і основний результат даної роботи – Теорему 1. У третьому розділі доведено існування узагальненного роз'язку задачі (P_u). Четвертий і п'ятий розділи присвячено доведенню Теореми 1 – існування розв'язку та обґрунтування умови оптимальності відповідно. У шостому розділі показано, що до задачі, що досліджується, може бути застосовано результати робіт [23, 24], де для розв'язання задачі оптимального керування було запропоновано використати метод спряжених градієнтів і отримано деякі результати стосовно його збіжності.

1. Формулювання задачі.

Нехай $Q \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$ – обмежена область з регулярною межею S. Позначимо $Q_T = Q \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$.

Основним об'єктом даної роботи виступає задача оптимального керування для рівняння (див. (3), (4))

$$y_t(x,t) - \mathrm{div}(\nabla y(x,t)) - \mathrm{div}(D_t^\sigma \nabla y(x,t)) = u(x,t), \tag{5}$$

за умов

$$y(x,0) = \phi(x), \quad x \in Q, \tag{6}$$

$$y(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T. \tag{7}$$

У подальшому будемо називати задачу (5)-(7) задачею (P_u).

Введемо функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_Q |y_u(x,t) - z_d(x)|^2\,dx + \frac{\alpha}{2}\iint_{Q_T} |u(x,t)|^2\,dt\,dx, \tag{8}$$

де $z_d \in L_2(Q)$ і $\alpha > 0$ є заданими, а y_u— узагальнений розв'язок задачи (P_u) (див. пункт 2, Означення 1).

Розглянемо задачу: знайти керування $v \in L_2(Q_T)$ таке, що

$$J(v) = \inf_{u \in L_2(Q_T)} J(u). \tag{9}$$

2. Основні позначення та факти.

Позначимо через

$$(u \cdot v) = \int_Q u(x)v(x)\,dx, \quad (u \cdot v)_T = \iint_{Q_T} u(x,t)v(x,t)\,dtdx,$$

скалярні добутку у просторах $L_2(Q)$ і $L_2(Q_T)$ відповідно, а згортку за часовою змінною через

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t-s)v(s)\,ds.$$

Для будь-якого $t > 0$ позначимо

$$\omega_\beta(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \beta > 0, \tag{10}$$

тоді означення похідної Капуто (2) набуває вигляду

$$D_t^\sigma p(t) = (\omega_{1-\sigma} * p_t)(t). \tag{11}$$

Лема 1. *Для довільної абсолютно неперервної функції $\rho(t)$ маємо*

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \omega_\beta(\tau - s)\rho_s(s)\,ds = \int_0^t \omega_\beta(\tau - s)\rho(s)\,ds - \rho(0)\omega_{1+\beta}(t), \tag{12}$$

$$\rho(t)D_t^\sigma \rho(t) \geq \frac{1}{2}D_t^\sigma \rho^2(t), \tag{13}$$

$$(\omega_\sigma * D_t^\sigma \rho)(t) = \rho(t) - \rho(0). \tag{14}$$

Доведення. Дійсно

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \omega_\beta(\tau - s)\rho_s(s)\,ds = \int_0^t \rho_s(s)\,ds \int_s^t \omega_\beta(\tau - s)\,d\tau =$$
$$= \int_0^t \rho_s(s)\omega_{1+\beta}(t-s)\,ds = -\rho(0)\omega_{1+\rho}(t) + \int_0^t \omega_\beta(t-s)\rho(s)\,ds.$$

Таким чином, має місце тотожність (12). Нерівність (13) доведено в роботі [1]. Властивість (14) є результатом теореми 3.8 монографії [10]. □

Також нам знадобиться нерівність

$$\int_0^t (\omega_{1-\beta} * u)(\tau)u(\tau)\,d\tau \geq 0, \quad \beta \in (0,1), \tag{15}$$

справедлива для довільної функції $u \in L_2(0,T)$ і будь-якого $t > 0$ (див. [13, твердження 16.3.1]).

Введемо ліву і праву похідні Рімана–Ліувілля порядку $\sigma \in (0,1)$ (див. [15, формули (2.1.8), (2.1.9)])

$$\mathcal{D}_t^\sigma w(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{w(x,\tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\,\tau,$$
$$ {}_T\mathcal{D}_t^\sigma w(x,t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{w(x,\tau)}{(\tau-t)^\sigma} d\,\tau. \tag{16}$$

Зазначимо, що заміна змінної $t \to T - s$ переводить праву похідну Рімана–Ліувілля в ліву, тобто для довільних w, $\bar{w}$ таких, що $\bar{w}(x,s) = w(x,T-s)$, $s \in (0,T)$ маємо

$$ {}_T\mathcal{D}_t^\sigma w(x,t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{T-t} \frac{w(x,T-\rho)}{(T-t-\rho)^\sigma} d\,\rho$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^s \frac{\bar{w}(x,\rho)}{(s-\rho)^\sigma} d\,\rho = \mathcal{D}_s^\sigma \bar{w}(x,s). \tag{17}$$

Для достатньо регулярних функцій $w(x,t)$, $\widehat{w}(x,t)$ за допомогою інтегрування частинами отримаємо

$$\int_0^T D_t^\sigma w(x,t)\widehat{w}(x,t)dt = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T w_s(x,s) \int_s^T \frac{\widehat{w}(x,t)}{(t-s)^\sigma}\, dt\, ds$$
$$= \left\{ \frac{w(x,s)}{\Gamma(1-\sigma)} \int_s^T \frac{\widehat{w}(x,t)}{(t-s)^\sigma}\, dt \right\}\Bigg|_0^T - \int_0^T \frac{w(x,t)}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \frac{\widehat{w}(x,t)}{(t-s)^\sigma}\, dt\, ds,$$

отже

$$\int_0^T D_t^\sigma w(x,t)\widehat{w}(x,t)dt = \int_0^T w(x,t)\, {}_T\mathcal{D}_t^\sigma \widehat{w}(x,t)dt, \text{ якщо } w(x,0) = 0. \tag{18}$$

Через

$$\|v\| = \left(\int_Q v^2(x)\, dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_T = \left(\iint_{Q_T} v^2(x,t)\, dt\, dx \right)^{1/2}$$

позначимо норми в $L_2(Q)$ і $L_2(Q_T)$ відповідно. Також, для скорочення запису, використовуємо наступні позначення

$$\|v\|_1 = \left(\sum_{l=1}^n \int_Q |v_{x_i}(x)|^2\, dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{1,T} = \left(\sum_{l=1}^n \iint_{Q_T} |v_{x_i}(x,t)|^2\, dt\, dx \right)^{1/2}.$$

Введемо гільбертови простори Соболева $H^k(Q)$, $(k = 1, 2)$ функцій, які мають слабкі похідні порядку k з $L_2(Q)$ (див. [20, розділ I]). Замикання множини $C_0^\infty(\overline{Q})$ за нормою простору $H^1(Q)$

$$\|p\|_{H^1(Q)} = \left(\|p\|^2 + \|p\|_1^2 \right)^{1/2}$$

позначимо через $H_0^1(Q)$. Зазначимо, що, внаслідок нерівності Пуанкаре, як норму у просторі $H_0^1(Q)$ можна взяти $\|\cdot\|_1$. Крім того, нам знадобиться простір

$$W^\sigma(0,T)=\{p\in L_\infty(0,T;H_0^1(Q)):\, p_t\in L_2(Q_T),\, D_t^\sigma p\in L_2(0,T;H_0^1(Q))\},$$

з нормою

$$\|p\|_{W^\sigma(0.T)}=\sup_{t\in(0,T)}\|p(\cdot,t)\|_1+\|p_t\|_T+\|D_t^\sigma p\|_{1,T}.$$

Зауваження 1. Зазначимо, що $W^\sigma(0,T)\subseteq C([0,T];L_2(Q))$ (див., наприклад, [20, лема 7.3]) і

$$\|y\|_{C([0,T];L_2(Q))}\le C\|y\|_{1,T}. \tag{19}$$

Означення 1. Будемо називати функцію $y\in W^\sigma(0,T)$ узагальненним розв'язком задачі (P_u), якщо для довільної функції $\bar{y}\in L_2(0,T;H_0^1(Q))$ виконується варіаційне рівняння

$$(y_t\cdot\bar{y})_T+(\nabla\, y\cdot\nabla\bar{y})_T+((D_t^\sigma\nabla\, y)\cdot\nabla\bar{y})_T=(u\cdot\bar{y})_T$$

і відповідна початкова умова $y(x,0)=\phi(x)$.

Для того, щоб сформулювати необхідну умову оптимальності основної задачі (9) розглянемо "спряжену задачу" до (P_u)

$$\begin{aligned}&p_t(x,t)+\operatorname{div}(\nabla\, p(x,t))+\operatorname{div}({}_T\mathcal{D}_t^\sigma\nabla\, p(x,t))=0,\quad (x,t)Q_T,\\ &p(x,T)=y(x,T)-z_d(x),\ x\in Q,\quad p(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_T.\end{aligned} \tag{20}$$

Введемо простори

$$V(0,T)=C([0,T];L_2(Q))\cap C([0,T);H^2(Q)\cap H_0^1(Q)\cap L_2(0,T;H^1(Q)),$$
$$\mathcal{W}^\sigma(0,T)=\{\bar{p}\in L_2(0,T;H_0^1(Q)):\,\bar{p}_t\in L_2(Q_T),\,D_t^\sigma\bar{p}\in L_2(0,T;H_0^1(Q)),\,\bar{p}(x,0)=0\}.$$

Означення 2. Будемо називати функцію $p(x,t)\in V(0,T)$ узагальненним розв'язком задачі (20), якщо $p\in V(0,T)$, і для всіх $\bar{p}\in W^\sigma(0,T)$ виконується варіаційна рівність

$$((y(\cdot,T)-z_d)\cdot\bar{p}(\cdot,T))-(p\cdot\bar{p}_t)_T-(\nabla\cdot\nabla\bar{p})_T+(\nabla p\cdot D_t^\sigma\nabla\bar{p})_T=0. \tag{21}$$

Враховуючі (17), до задачі (20) можна застосувати результати робіт [4, 5], де розглядалася задача

$$\begin{aligned}p_t(x,t)-\operatorname{div}(\nabla\, p(x,t))-\operatorname{div}(\mathcal{D}_t^\sigma\nabla\, p(x,t))&=f(x,t),\quad (x,t)Q_T,\\ p(x,0)=\psi(x),\ x\in Q,\quad p(x,t)=0,\quad &(x,t)\in S_T.\end{aligned} \tag{22}$$

Зокрема, теорему існування та єдиності розв'язку задачі (20), в сенсі Означення 2 див. [5, Теорема 2.1]. Зазначимо, що при $\psi=0$, $f\in L_2(Q_T)$ розв'язок задачі (22) є більш гладким у порівнянні з випадком $\psi\neq 0$, $f=0$, а саме (див. [4, §5])

$$\|p_t\|_T+\|\Delta p\|_T+\|\mathcal{D}_t^\sigma\Delta p\|_T\le C\|f\|_T.$$

Основний результат даної роботи міститься в наступній теоремі.

Теорема 1. *Задача* (9) *має єдиний розв'язок – оптимальне керування* v*, яке характеризується наступним чином*

$$v(x,t) = -\frac{1}{\alpha} p(x,t),\ (x,t) \in Q_T,$$

де p *– узагальнений розв'язок спряженої задачі (20).*

3. Ров'язність задачі (P_u)**.**

Теорема 2. *Нехай* $u \in L_2(Q_T)$*,* $\varphi \in H_0^1(Q)$*. Тоді задача* (P_u) *має єдиний узагальнений розв'язок. До того ж справедлива оцінка*

$$\|y\|_{W^\sigma(0,T)} \le C\left(\|\varphi\|_1 + \|u\|_T\right). \tag{23}$$

Доведення. Нехай $\{\lambda_k, w_k\}_{k=1}^{\infty}$ система власних значень і функцій оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \lambda_k w_k, \quad x \in Q, \\ w_k(x) &= 0, \quad x \in S, \end{aligned} \tag{24}$$

причому

i) $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_m \to \infty$, якщо $k \to \infty$;

ii) $w_k \in H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$;

iii) послідовність $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ утворює ортонормований базіс в $L_2(Q)$.

Зазначимо також, що

$$\begin{aligned} (\nabla w_k \cdot \nabla w_l) = -(w_k \cdot \Delta w_l) = \lambda_l (w_k \cdot w_l) = \lambda_l \delta_{kl}, \\ (\Delta w_k \cdot \Delta w_l) = \lambda_k \lambda_l (w_k \cdot w_l) = \lambda_k \lambda_l \delta_{kl}, \end{aligned} \tag{25}$$

де δ_{kl} – символ Кронекера, і, як наслідок,

$$\lambda_k \int_Q w_k^2(x)\,dx = \int_Q |\nabla w_k|^2\,dx = \|w_k\|_1, \quad \lambda_k^2 \int_Q w_k^2(x)\,dx = \int_Q |\Delta w_k|^2\,dx. \tag{26}$$

Шукаємо розв'язок задачі (P_u) у вигляді

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (y(\cdot,t), w_k) w_k(x).$$

Позначимо $y_k(t) = (y(\cdot,t), w_k)$, $u_k(t) = (u(\cdot,t), w_k)$, $\phi_k = (\phi, w_k)$. Із (25), (26) бачимо, зокрема, що

$$\|y(\cdot,t)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_k^2(t). \tag{27}$$

Для невідомих $\{y_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ одержимо систему

$$y_k'(t) + \lambda_k y_k(t) + \lambda_k D_t^\sigma y_k(y) = u_k(t), \qquad y_k(0) = \phi_k. \tag{28}$$

Із загальної теорії (див, наприклад, [20, теорема 1.44]) випливає існування абсолютно неперервного розв'язку задачі (28) в малому за часом. Рівняння такого вигляду досліджувалося, наприклад, в роботах [3,17]. В [3], за допомогою перетворення Лапласа в [3] було побудовано відповідні функції Гріна та досліджено їх властивості. Зокрема було доведено, що вони є абсолютно монотонними функціями.

Помножимо кожне рівняння (28) відповідно на $y_k(t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} y_k^2(t) + \lambda_k y_k^2(t) + \lambda_k D_t^\sigma y_k(t) \cdot y_k(t) = u_k(t) y_k(t), \tag{29}$$

далі використаємо (13) і проінтегруємо за змінною t, тоді

$$\frac{y_k^2(\tau)}{2} + \lambda_k \int_0^\tau y_k^2(t)\, dt + \frac{\lambda_k}{2} \int_0^\tau D_t^\sigma (y_k^2(t))\, dt \le \frac{\phi_k^2}{2} + \int_0^\tau u_k(t) y_k(t)\, dt. \tag{30}$$

Враховуючі (11), у третьому доданку в лівій частині (30) можна використати рівність (12). Отже

$$\begin{aligned} \frac{y_k^2(\tau)}{2} + \lambda_k \int_0^\tau y_k^2(t)\, dt + \frac{\lambda_k}{2} \int_0^\tau \omega_{1-\sigma}(\tau - t) y_k^2(t)\, dt \\ \le \frac{\phi_k^2}{2} + \frac{\lambda_k}{2}\phi_k^2 + \int_0^\tau u_k(t) y_k(t)\, dt. \end{aligned} \tag{31}$$

Далі ми помножимо (30) на $w_k^2(x)$. Інтегрування за змінною x та додавання за індексом k приводять до нерівності

$$\|y(\cdot,\tau)\|^2 + c_1 \|y\|_{1,\tau}^2 + c_2 (\omega_{1-\sigma} * \|y\|_1^2)(\tau) \le \|\phi\|^2 + c_3 \|\phi\|_1^2 + c_4 \|u\|_\tau^2. \tag{32}$$

Якщо (28) помножити на $y_k'(t)$, тоді, із урахуванням (15), (11), одержимо

$$|y_k'(t)|^2 + \frac{\lambda_k}{2}\frac{d}{dt}[y_k(t)]^2 \le |u_k(t)||y_k(t)|.$$

Знову помножимо на $w_k^2(x)$, проінтегруємо за змінними t, x. У підсумку маємо

$$\|y_t\|_\tau^2 + c_5 \|y(\cdot,\tau)\|_1^2 \le c_6 \|\phi\|_1^2 + c_7 \|u\|_\tau^2. \tag{33}$$

На наступному кроці одержимо оцінку $\|D_t^\sigma \nabla y\|_\tau$. Із цією метою помножимо (28) на $D_t^\sigma y_k$, і, за допомогою (13), одержимо

$$D_t^\sigma (y_k^2)(t) + \lambda_k D_t^\sigma (y_k^2)(t) + 2\lambda_k |D_t^\sigma (y_k)(t)|^2 \le 2|u_k(t)||D_t^\sigma (y_k)(t)|.$$

Помножимо обидві частини цієї нерівності на $\omega_\sigma(\tau - t)$. Зазначимо, що

$$\omega_\sigma(\tau - t) \ge \eta_* \equiv \frac{T^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \text{ при } 0 < t < \tau \le T. \tag{34}$$

На підставі (34) і нерівності Коші–Буняковського, бачимо, що

$$\omega_\sigma(\tau-t)D_t^\sigma(y_k^2)(t)+\lambda_k\omega_\sigma(\tau-t)D_t^\sigma(y_k^2)(t)+2\lambda_k\eta_*|D_t^\sigma(y_k)(t)|^2 \\ \le \frac{1}{\varepsilon\lambda_k}|\omega_\sigma(\tau-t)u_k(t)|^2+\varepsilon\lambda_k|D_t^\sigma(y_k)(t)|.$$

Нехай $\varepsilon=\eta_*$. Після інтегрування одержаної нерівності за змінною t із застосуванням співвідношення (14) до лівої частини і теореми Янга до першого доданку в правій частині, маємо

$$y_k^2(\tau)+\lambda_k y_k^2(\tau)+\lambda_k\eta_*\int_0^\tau |D_t^\sigma(y_k)(t)|^2\,dt \\ \le y_k^2(0)+\lambda_k y_k^2(0)+c_8\int_0^\tau \omega_\sigma(t)\,dt\int_0^\tau |u_k(t)|^2\,dt.$$

Повторюючи наведені вище міркування, маємо

$$\|y(\cdot,\tau)\|^2+\|y(\cdot,\tau)\|_1^2+\eta_*\|D_t^\sigma\nabla y\|_\tau^2 \le \|\phi\|^2+\|\phi\|_1^2+c_9\|u\|_\tau^2. \tag{35}$$

З оцінок (32), (33), (35) випливає

$$\sup_{t\in(0,T)}\|y(\cdot,t)\|+\sup_{t\in(0,T)}\|y(\cdot,t)\|_1+\|y_t\|_T+\|D_t^\sigma\nabla y\|_T \le C\left(\|\phi\|+\|\phi\|_1+\|u\|_T\right). \tag{36}$$

Єдиність розв'язку задачі (P_u) можна встановити за допомогою нерівності (13). $\square$

4. Існування розвязку задачі оптимального керування.

З теореми 1.2 розділу 3 та леми 2.2 розділу 4 монографії [6] випливає, що для доведення Теореми необхідно переконатися у правильності таких тверджень

1) якщо $\|u\|_T\to\infty$, тоді $J(u)\to+\infty$;

2) функціонал $J(u)$ є строго опуклим;

3) функціонал $J(u)$ є слабко напівперервним знизу.

Властивість 1) випливає безпосередньо з вигляду функціоналу $J(u)$.

Для того, щоб переконатися у правильності 2), достатньо помітити, що для довільних $\gamma\in(0,1)$, u_1, $u_2\in L_2(Q_T)$, для відповідних розв'язків задач $(P)_{u_1}$,$(P)_{u_2}$, $(P)_{\gamma u_1+(1-\gamma)u_2}$, маємо $y_{\gamma u_1+(1-\gamma)u_2}=\gamma y_{u_1}+(1-\gamma)y_{u_2}$, а потім скористатися строгою опуклістю квадратичної функції.

Остання властивість 3) є наслідком неперервності і опуклості функціонала J (див. теорему 2.12 монографії [22]).

5. Умова оптимальності першого порядку.

Спочатку виконаємо деякі формальні обчислення. Нехай u, $\bar u\in L_2(Q_T)$. Позначимо

$$w_u\langle\bar u\rangle(x,t)=\frac{1}{\lambda}(y_{u+\lambda\bar u}(x,t)-y_u(x,t)),\quad \lambda\ne 0.$$

Функція $w_u\langle\bar{u}\rangle$ є, очевидно, розв'язком задачі

$$\begin{aligned} &w_t(x,t) - \mathrm{div}(\nabla w(x,t)) - \mathrm{div}(D_t^\sigma \nabla w(x,t)) = \bar{u}(x,t), \\ &\quad w(x,0) = 0, \quad x \in Q, \qquad w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T. \end{aligned} \tag{37}$$

Для відповідних значень функціоналу J маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}(J(u+\lambda\bar{u}) - J(u)) = \int_Q w_u\langle\bar{u}\rangle \left(\frac{y_{u+\lambda\bar{u}}(x,T) + y_u(x,T)}{2} - z_d(x) \right) dx \\ + \alpha \iint_{Q_T} \left(u(x,t) + \frac{\lambda}{2}\bar{u}(x,t) \right) \bar{u}(x,t)\, dtdx. \end{aligned} \tag{38}$$

Позначимо через $\delta J_u\langle\bar{u}\rangle$ похідну Гато функціоналу J в точці u в напрямку $\bar{u}$. Внаслідок оцінок (19), (36) фінальне значення $y_u(x,T)$ розв'язку задачі (P_u) неперервно в $L_2(Q)$ залежить від $u \in L_2(Q_T)$, тому

$$\delta J_u\langle\bar{u}\rangle = \int_Q w_u\langle\bar{u}\rangle(x,T)(y_u(x,T) - z_d(x))\, dx + \alpha \iint_{Q_T} u(x,t)\bar{u}(x,t)\, dtdx. \tag{39}$$

Якщо $v \in L_2(Q_T)$ є точкою мінімуму функціоналу J, тоді для довільних функцій $\bar{u} \in L_2(Q_T)$ і $\lambda > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\lambda}(J(v+\lambda\bar{u}) - J(v)) \geq 0.$$

При $\lambda \to 0$ бачимо, що $\delta J_v\langle\bar{u}\rangle \geq 0$, і, так само, $\delta J_v\langle-\bar{u}\rangle \geq 0$, тобто якщо v є мінімайзером J, тоді для всіх $\bar{u} \in L_2(Q_T)$ маємо $\delta J_v\langle\bar{u}\rangle = 0$. З урахуванням (39), остання умова набуває вигляду

$$\delta J_v\langle\bar{u}\rangle = \int_Q w_v\langle\bar{u}\rangle(x,T)(y_v(x,T) - z_d(x))\, dx + \alpha \iint_{Q_T} v(x,t)\bar{u}(x,t)\, dtdx = 0. \tag{40}$$

Зауваження 2. Зазначимо, що необхідна умова оптимальності (40) є і достатньою, внаслідок опуклості функціоналу J. Дійсно, для довільних v, $\bar{v} \in L_2(Q_T)$, $\lambda \in (0,1)$ маємо

$$\begin{aligned} &J((1-\lambda)v + \lambda\bar{v}) \leq (1-\lambda)J(v) + \lambda J(\bar{v}), \\ &\frac{1}{\lambda}(J(v + \lambda(\bar{v} - v) - J(v))) \leq J(\bar{v}) - J(v). \end{aligned} \tag{41}$$

Отже, якщо $\delta_v J\langle\bar{u}\rangle = 0$ для всіх $\bar{u} \in L_2(Q_T)$, тоді, очевидно, $\delta_v J\langle\bar{v} - v\rangle = 0$ для всіх $\bar{v} \in L_2(Q_T)$. При $\lambda \to 0$ в нерівності (41) маємо $J(\bar{v}) - J(v) \geq 0 = \delta_v J\langle\bar{v} - v\rangle$. Таким чином, функція v, яка задовольняє необхідну умову оптимальності, є точкою мінімуму функціоналу J.

Для довільного $p \in L_2(0,T;H_0^1(Q))$ одержимо

$$\iint_{Q_T} \bar u(x,t)p(x,t)\,dtdx = \iint_{Q_T} \frac{\partial w_v\langle \bar u\rangle}{\partial t}(x,t)p(x,t)\,dxdt$$
$$+\iint_{Q_T} \left(\nabla w_v\langle \bar u\rangle(x,t)\cdot \nabla p(x,t) + (D_t^\sigma \nabla\, w_v\langle \bar u\rangle(x,t))\cdot \nabla p(x,t)\right)\,dtdx.$$

Якщо p є розв'язком задачі (20), тоді

$$\iint_{Q_T} \bar u(x,t)p(x,t)\,dtdx = \int_Q w_u\langle \bar u\rangle(x,T)(y_u(x,T)-z_d(x))\,dx. \tag{42}$$

Отже з (39), (42) випливає, що для всіх $\bar u \in L_2(Q_T)$

$$\iint_{Q_T} (p(x,t)+\alpha v(x,t))\bar u(x,t)\,dtdx = 0. \tag{43}$$

Це означає, що

$$v(x,t) = -\frac{1}{\alpha}p(x,t) \text{ майже всюди в } Q_T. \tag{44}$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, робимо висновок, що для того, щоб функція $v \in L_2(Q_T)$ була розв'язком задачи оптимального керування необхідно і достатньо виконання (44) та наступних умов

$$(y_t\cdot \bar y)_T + (\nabla\, y\cdot \nabla \bar y)_T + ((D_t^\sigma \nabla\, y)\cdot \nabla \bar y)_T = -\frac{1}{\alpha}(p\cdot \bar y)_T, \quad y(x,0)=\phi(x), \tag{45}$$

$$((y(\cdot,T)-z_d)\cdot \bar p(\cdot,T)) - (p\cdot \bar p_t)_T - (\nabla p\cdot \nabla \bar p)_T + (\nabla p\cdot D_t^\sigma \nabla \bar p)_T = 0, \tag{46}$$

де $\bar y \in L_2(0,T;H_0^1(Q))$, $\bar p \in \mathcal{W}^\sigma(0,T)$.

6. Метод спряжених градієнтів.

Надалі використовуємо методи роботи [23].

По-перше, для довільного $\widehat h \in L_2(Q)$ розглянемо допоміжну систему

$$(\widehat y_t\cdot \bar y)_T + (\nabla\, \widehat y\cdot \nabla \bar y)_T + ((D_t^\sigma \nabla\, \widehat y)\cdot \nabla \bar y)_T = \frac{1}{\alpha}(\widehat p\cdot \bar y)_T, \quad \widehat y(x,0)=0, \tag{47}$$

$$(\widehat h\cdot \bar p(\cdot,T)) - (\widehat p\cdot \bar p_t)_T - (\nabla \widehat p\cdot \nabla \bar p)_T + (\nabla \widehat p\cdot D_t^\sigma \nabla \bar p)_T = 0, \tag{48}$$

де $\bar y \in L_2(0,T;H_0^1(Q))$, $\bar p \in \mathcal{W}^\sigma(0,T)$.

З Теорем 1, 2 випливає, що (47) має єдиний розв'язок $\widehat y \in W^\sigma(0,T)$, $\widehat p \in V(0,T)$. Таким чином, визначено оператор $R : h \to \widehat y(\cdot,T)$, що неперервно діє з $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$. Треба довести, що $\widehat y \in C([0,T];H_0^1(Q))$.

Лема 2. *Нехай $q \in L_2(0,T;H^1(Q))$ і r – узагальнений розв'язок задачі*

$$\begin{aligned} r_t(x,t) - div(\nabla r(x,t)) - div(D^\sigma \nabla r(x,t)) &= q(x,t), \;\; (x,t)\in Q_T,\\ r(x,0)=0,\;\; x\in Q, \qquad\qquad r(x,t) &= 0,\;\; (x,t)\in S_T, \end{aligned} \tag{49}$$

тоді $r \in C((0,T]; H^1(Q))$.

Доведення. Знову шукаємо розв'язок r у вигляді $r(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) w_k(x)$. Для знаходження r_k отримаємо систему

$$r_k'(t) + \lambda_k r_k(t) + \lambda_k D_t^{\sigma} r_k(t) = q_k(t), \quad r_k(0) = 0.$$

За допомогою перетворення Лапласу

$$\widetilde{r}_k(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) r_k(t) dt$$

спочатку виводимо, що

$$\widetilde{r}_k(s) = \widetilde{U}_k(s) \widetilde{q}_k(s), \quad \widetilde{U}_k(s) = \frac{1}{s + \lambda_k + \lambda_k s^{\sigma}},$$

а потім

$$r_k(t) = (U_k * q_k)(t). \tag{50}$$

Властивості функцій U_k досліджувалися в роботі [5] (див. Теорему 2.2 вказаної роботи), де доведено, що справедливі наступні оцінки

$$0 < U_k(t) \leq 1, \quad t \geq 0, \tag{51}$$

і тому

$$\lambda_k |r_k^2(t)| \leq \lambda_k \int_0^t U_k^2(\tau) d\tau \int_0^t q_k^2(\tau) d\tau \leq T \int_0^t \lambda_k q_k^2(\tau) d\tau. \tag{52}$$

Очевидно, що $r_k(t) w_k(x) \in C([0,T]; H_0^1(Q))$ для всіх натуральних k. З оцінки (52) бачимо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) w_k(x)$ збігається в $H_0^1(Q)$ рівномірно по t на відрізку $[0,T]$, якщо $q \in L_2(0,T; H^1(Q))$. З теореми про неперервність ряду, що рівномірно збігається, випливає, що $r \in C([0,T]; H_0^1(Q))$. Лему доведено. □

Більше того, оператор R є позитивним і самоспряженим, тобто

$$(R\widehat{h} \cdot h') = (Rh' \cdot \widehat{h}) \text{ для довільних } h', \widehat{h} \in L_2(Q), \tag{53}$$

$$(R\widehat{h} \cdot \widehat{h}) \geq 0 \text{ для всіх } \widehat{h} \in L_2(Q). \tag{54}$$

Насправді, нехай h', $\widehat{h}$ відповідають розв'язки системи (47)позначені через (u', p') та $(\widehat{u}, \widehat{p})$, тоді

$$\begin{gathered}
(\widehat{y}_t \cdot p')_T + (\nabla \widehat{y} \cdot \nabla p')_T + ((D_t^{\sigma} \nabla \widehat{y}) \cdot \nabla p')_T = \frac{1}{\alpha} (\widehat{p} \cdot p')_T, \\
(h' \cdot \widehat{y}(\cdot, T)) - (p' \cdot \widehat{y}_t)_T - (\nabla p' \cdot \nabla \widehat{y})_T - (\nabla p' \cdot D_t^{\sigma} \nabla \widehat{y})_T = 0.
\end{gathered} \tag{55}$$

Якщо до першого рівняння додати друге, отримаємо

$$(h' \cdot \widehat{y}(\cdot, T)) = \frac{1}{\alpha} (\widehat{p} \cdot p')_T, \text{ де за означенням } \widehat{y}(\cdot, T) = R\widehat{h}. \tag{56}$$

За аналогією маємо

$$(\widehat{h} \cdot y'(\cdot, T)) = \frac{1}{\alpha}(\widehat{p} \cdot p')_T, \text{ де за означенням } y'(\cdot, T) = Rh'. \tag{57}$$

Властивості (53), (54) випливають безпосередньо з (56), (57).

На другому кроці ми переформулюємо співвідношення (45) в термінах оператора R.

Нехай пара функцій (y, p) є розв'язком системи. Позначимо $h^* = p(\cdot, T)$. Представимо y у вигляді $y(x, t) = \eta(x, t) - y^*(x, t)$, де функція η знаходиться із розв'язання наступної задачі наступних задач

$$(\eta_t \cdot \bar{y})_T + (\nabla \eta \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla y) \cdot \nabla \bar{y})_T = 0, \quad \eta(x, 0) = \phi(x),$$

а для знаходження y^* розглядається система типу (47)

$$(y_t^* \cdot \bar{y})_T + (\nabla y^* \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla y^*) \cdot \nabla \bar{y})_T = \frac{1}{\alpha}(p^* \cdot \bar{y})_T, \quad y^*(x, 0) = 0, \tag{58}$$

$$(h^* \cdot \bar{p}(\cdot, T)) - (p^* \cdot \bar{p}_t)_T - (\nabla p^* \cdot \nabla \bar{p})_T + (\nabla p^* \cdot D_t^\sigma \nabla \bar{p})_T = 0, \tag{59}$$

де $\bar{y} \in L_2(0, T; H_0^1(Q))$, $\bar{p} \in \mathcal{W}^\sigma(0, T)$. З отриманих співвідношень бачимо, що з одного боку

$$u(x, T) - z_d(x) = p(x, T) \equiv h^*(x)$$

і з іншого

$$u(x, T) = \eta(x, T) - u^*(x, T) \equiv \eta(x, T) - Rh^*(x).$$

Таким чином

$$h^*(x) + z_d(x) = \eta(x, T) - Rh^*(x). \tag{60}$$

Якщо ж позначити $f(x) = \eta(x, T) - z_d(x)$, тоді (60) (а значить і систему (47)) можна записати у вигляді операторного рівняння

$$(I + R)h^* = f. \tag{61}$$

Наслідуючи роботу [23], використаємо метод спряжених градієнтів до рівняння (61). Позначимо

$$\begin{aligned} e_n = h^* - h_n, \quad & r_n = (I + R)e_n = f - (I + R)h_n, \\ h_{n+1} = h_n + \alpha_n s_n, \quad & \alpha_n = \|h_n\|^2/(h_n, (I + R)s_n), \\ s_{n+1} = r_{n+1} + \beta_n s_n, \quad & s_0 = r_0, \quad \beta_n = \|r_{n+1}\|^2/\|r_n\|^2. \end{aligned} \tag{62}$$

Безпосередньо з Теореми 4.1 роботи [23] випливає (суперлінійна) оцінка збіжності ітераційного процесу (62):

$$\|e_n\| \leq (c_n)^n \|e_0\|, \tag{63}$$

де послідовність $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ така, що $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$.

Цитована література

1. *Alikhanov A.A.* A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order eqautions // Differential Equations. – 2010. – V. 46. – P. 660–666.
2. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
3. *Bazhlekova E.* Properties of the fundamental and impulse-response solutions of multi-term fractional differential equations // Complex Analysis and Applications'13 (Proc. Intern. Conf., Sofia, 2013). – Bulg. Acad. Sci., Sofia, 2013.
4. *Bazhlekova E.* Subordination principle for a class of fractional order differential equations // Mathematics. – 2015. – V. 2. – P. 412–427.
5. *Bazhlekova E., Jin B., Lazarov R., Zhou Z.* An analysis of the Raylegh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid // Numer. Math. – 2015. – V. 131, № 1. – P. 1–31.
6. *Cea J.* Lectures on optimization—theory and algorithms. – Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978. – 236 p.
7. *Caputo M.* Models of flux in porous media with memory // Water Resour. Res. – 2000. – V. 36. – P. 693–705.
8. *Caputo M, Plastino W.* Diffusion in porous layers with memory // Geophys J. Int. – 2004. – V. 158. – P. 385–396.
9. *Iaffaldano G., Caputo M., and Martino S.* Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand // Hydrol. Earth Sys. Sci. Discuss. – 2005. – V. 2. – P. 1329–1357.
10. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. – Springer-Verlag, Berlin, 2010. – 248 p.
11. *Deseri L., Zingales M.* A mechanical picture of fractional-order Darcy equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2015. – V. 20. – P. 940–949.
12. *Dorville R., Mophou G.M., Valmorin V.S.* Optimal control of a nonhomogeneous Dirichlet boundary fractional diffusion equation // Computers and Mathematics with Applications. – 2011. – V. 62. – P. 1471–1481.
13. *Gripenberg G., Londen S.O., Staffans O.* Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge etc., Cambridge University Press, 1990. XXII. – 701 p.
14. *Janno J., Kinash N.* Reconstruction of an order and asource term in a fractional diffusion equation from final measurements // Inverse problems. – 2018. – V. 34. – 025007.
15. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. – North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. – 523 p.
16. *Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М'яус О.М.* Класичний розв'язок оберненої задачі для рівняння дробової дифузії при інтегральній за чосам умові перевизначення // Математичні студії. – 2015. – Т. 44, № 2. – С. 215–220.
17. *Luchko Y.* Initial boundary-value problem for the generalized time-fractional diffusion equations // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – V. 374. – P. 538–548.
18. *Mophou G.M.* Optimal control of fractional diffusion equation // Computers and Mathematics with Applications. – 2011. – V. 61. – P. 68–78.
19. *Mophou G.M.* Optimal Control for Fractional Diffusion Equations with Incomplete Data // J. Optim. Theory Appl. – 2017. – V. 174. – P. 176–196.
20. *Roubiček T.* Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. – Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2005. – 404 p.
21. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications applications to some inverse problems // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – V. 382. – P. 426–447.
22. *Tröltzsch, F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. – Graduate Studies in Mathematics, 112. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. – 399 p.

23. *Winther R.* Initial value methods for parabolic control problems // Mathematics of Computation. – 1980. – V. 34. – P. 115–125.
24. *Winther R.* Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method // SIAM J. Numer. Anal. – 1980. – V. 17. – P. 14–17.
25. *Zacher R.* Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces // Funcialaj Ekvacioj. – 2009. – V. 52. – P. 1–18.
26. Zhou, Y., Peng, L. (2017). Weak solution of the tome-fractional Navier–Stokes equations and optimal control. *Computers and Mathematics, 73*(6), 1016-1027.

References

1. Alikhanov, A.A. (2010). A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order eqautions. *Differential Equations, 46*, 660-666.
2. Barenblatt, G.I., Entov, V.M., Ryzhik, V.M. (1984). *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks.* M.: Nedra (in Russian).
3. Bazhlekova, E. (2013). Properties of the fundamental and impulse-response solutions of multi-term fractional differential equations. *Complex Analysis and Applications'13 (Proc. Intern. Conf., Sofia, 2013)*, Bulg. Acad. Sci., Sofia.
4. Bazhlekova, E. (2015). Subordination principle for a class of fractional order differential equations. *Mathematics, 3*(2), 412-427.
5. Bazhlekova, E., Jin, B., Lazarov, R., Zhou, Z. (2015). An analysis of the Raylegh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid. *Numer. Math., 131*(1), 1-31.
6. Cea, J. (1978). *Lectures on optimization—theory and algorithms.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 236 p.
7. Caputo, M. (2000). Models of flux in porous media with memory. *Water Resour. Res., 36*(3), 693-705.
8. Caputo, M., Plastino, W. (2004). Diffusion in porous layers with memory. *Geophys J. Int., 158*, 385-396.
9. Iaffaldano, G., Caputo, M., Martino, S. (2005). Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand. *Hydrol. Earth Sys. Sci. Discuss, 2*(4), 1329-1357.
10. Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin.
11. Deseri, L., Zingales, M. (2015). A mechanical picture of fractional-order Darcy equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 20*(3), 940-949.
12. Dorville, R., Mophou, G.M., Valmorin, V.S. (2011). Optimal control of a nonhomogeneous Dirichlet boundary fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications, 62*(3), 1471-1481.
13. Gripenberg, G., Londen, S.O., Staffans, O. (1990). *Volterra Integral and Functional Equations.* Cambridge etc., Cambridge University Press, XXII.
14. Janno, J., Kinash, N. (2018). Reconstruction of an order and asource term in a fractional diffusion equation from final measurements. *Inverse problems, 34*, 025007.
15. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam.
16. Lopushans'ka, G.P., Lopushansky, A.O., M'yaus, O. M. (2015). Classical solution of an inverse problem for a fractional diffusion equation under a time-integral over-determination condition. *Mat. Stud., 44*(2), 215–220 (in Ukrainian).
17. Luchko, Y. (2011). Initial boundary-value problem for the generalized time-fractional diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl., 374*(2), 538-548.
18. Mophou, G.M. (2011). Optimal control of fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications, 61*(1), 68-78.
19. Mophou, G.M. (2017). Optimal Control for Fractional Diffusion Equations with Incomplete Data. *J. Optim. Theory Appl., 174*(1), 176–196.

20. Roubiček, T. (2005). Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin.
21. Sakamoto, K., Yamamoto, M. (2011). Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl., 382*(1), 426–447.
22. Tröltzsch, F. (2010). *Optimal control of partial differential equations.* Theory, methods and applications. Graduate Studies in Mathematics, 112. American Mathematical Society, Providence, RI.
23. Winther, R. (1980). Initial value methods for parabolic control problems. *Mathematics of Computation, 34*(149), 115-125.
24. Winther, R. (1980). Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method. *SIAM J. Numer. Anal., 17*(1), 14-17.
25. Zacher, R. (2009). Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces. *Funcialaj Ekvacioj, 52*(1), 1-18.
26. Zhou, Y., Peng, L. (2017). Weak solution of the tome-fractional Navier–Stokes equations and optimal control. *Computers and Mathematics, 73*(6), 1016-1027.

M.V. Krasnoshchok

Optimal control problem for an equation of filtration with memory.

Fractional diffusion models are generalization to the diffusion models with integer derivatives. There has been great interest in the study of this models because of their appearance in modeling various applications in the physical sciences, medicine and biology. We consider a filtration model with nonclassical Darcy's constitutive equation. Resulting equation states that the flux of fluid is proportional to not only gradient pressure but it's Riemann–Liouville fractional derivative also. This model was proposed by M. Caputo and allows the permeability varies with time depending on the previous pressure gradient. These phenomena, which we will represent mathematically with memory formalisms, have often been observed qualitatively in oil extraction, in geothermal areas and in the laboratory Similar problems arises in the study of flow of generalized second grade fluid. Existence results of initial and boundary value problems for partial fractional differential equations have been studied by E. Bazhlekova, K. Diethelm, J. Janno, A.N. Kochubei, G.P. Lopushans'ka, R. Zacher and others. Fractional optimal control problems have attracted for example R.Dorville, G.M. Mophou, V.S. Valmorin, Y. Zhou, L. Peng and many techniques have been developed for solving such problems. We consider the problem of minimization of the standard cost functional $J(u)$ which is determined in the terms of generalized solution of initial-boundary problem of time-fractional differential equation under considerations. We consider a control via right hand term u and an observation on the whole domain in L_2 norm with a Tikhonov regularizer term. First we introduce functional spaces and establish some auxiliary properties of fractional integrals and fractional derivatives. Second we prove an existence and uniqueness result for the state problem. We remind that we deals with an equation of filtration with memory. Our objectives are: a) to prove that there exists a minimizer u of the cost functional J; b) to obtain necessary and sufficient conditions for u to be an extremum; c) to obtain constructive algorithm amenable to computations for approximations of the optimal control. An unique solvability of state and conjugate problem is established by the help of Galerkin method and corresponding a priori estimates. Then we prove that the cost functional is coercive, convex and weakly lower semicontinuous. We show the existence of the optimal solution by proving the existence of the weakly convergent minimization sequence satisfying the state equation. The uniqueness follows directly from the strong convexity of the cost functional. This gives us the item a). The item b) is obtained from the first order optimality condition. We justify also the conjugated gradient method to search the optimal control function. On this way we use some results of R. Winther, which allows us to use the conjugate gradient method in our situation and prove its superlinear convergence.

Keywords: *optimal control, Caputo derivative, Sobolev spaces.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
iamm012@ukr.net

Отримано 12.11.19