УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-15

©2019. **Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов, Н.С. Ількевич**

ПРО ПОВЕДІНКУ ОБЕРНЕНИХ ГОМЕОМОРФІЗМІВ В ТЕРМІНАХ ПРОСТИХ КІНЦІВ

В даній роботі доведено результати стосовно неперервного межового продовження одного класу відображень в термінах так званих простих кінців. Як відомо, навіть конформні відображення не мають неперервного евклідового продовження на межу довільної однозв'язної області, проте, прості кінці в сенсі Каратеодорі є одним з можливих підходів при розгляді даного питання. Аналогічна ситуація і з відображеннями більш загальної природи, що вивчаються в тексті даної статті. Тут розглянуто клас гомеоморфізмів областей евклідового простору, обернені до яких спотворюють модуль сімей кривих по типу нерівності Полецького з інтегровною мажорантою. Для областей, що не є локально зв'язними на своїх межах, отримано теореми про одностайну неперервність вказаних класів в замиканні області, яке слід розуміти в термінах простих кінців.

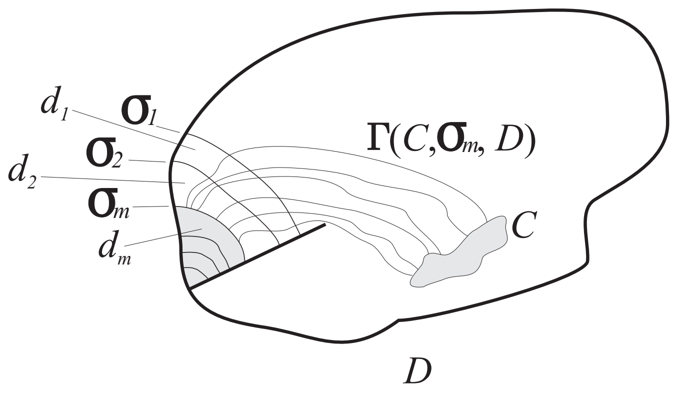
MSC: 30C65, 30D40, 31A15.

Ключові слова: *квазіконформні відображення, модулі сімей кривих.*

1. Вступ.

У нещодавніх роботах [1–2] отримані результати, що стосуються межової поведінки класів Орліча–Соболєва і гомеоморфізмів, визначених шляхом спотворення модуля сімей кривих (поверхонь). Тут розглядалася ситуація, коли відображення визначені в областях зі складною межею. Серед іншого, у вказаних роботах було встановлено можливість неперервного продовження відповідних обернених відображень в межові точки, якщо мажоранта, що відповідає за оцінки модуля, інтегровна (див. [1, теорема 6.1], [2, теорема 1]). Під «межовими точками» слід розуміти прості кінці, оскільки в областях складної структури навіть конформні відображення можуть виявитись розривними на межі в звичайному сенсі. У цій статті ми покажемо, що вказаний клас обернених гомеоморфізмів є одностайно неперервним в замиканні заданої області, яке визначається додаванням до неї усіх її простих кінців. Зауважимо, що в [3] були опубліковані деякі частинні випадки наведених нижче тверджень, проте, в даній роботі ми розглядаємо значно більш загальний випадок. Означення і позначення, що присутні далі, але не наведені в тексті, можна знайти, напр., в монографії [4].

Нагадаємо деякі означення (див., напр., [2]). Нехай ω – відкрита множина в $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Неперервне відображення $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ називається *k-вимірною поверхнею* в $\mathbb{R}^n$. *Поверхнею* будемо називати довільну $(n-1)$-вимірну поверхню σ в $\mathbb{R}^n$. Поверхня σ називається *жордановою поверхнею*, якщо $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ при $x \neq y$. Далі ми іноді будемо використовувати σ для позначення всього образу $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ при відображенні σ, $\overline{\sigma}$ замість $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\sigma$ замість $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхня $\sigma\colon \omega \to D$ в області D називається *розрізом* області D, якщо σ розділяє



Мал. 1. Простий кінець в області

D, тобто $D \setminus \sigma$ має більше однієї компоненти, $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ і $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Послідовність $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ розрізів області D називається *ланцюгом*, якщо:

(i) множина σ_{m+1} міститься в точності в одній компоненті d_m множини $D \setminus \sigma_m$, при цьому, $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$; (ii) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} d_m = \varnothing$.

Два ланцюги розрізів $\{\sigma_m\}$ і $\{\sigma_k'\}$ називаються *еквівалентними*, якщо для кожного $m = 1, 2, \ldots$ область d_m містить всі області d_k' за виключенням скінченної кількості, і для кожного $k = 1, 2, \ldots$ область d_k' також містить всі області d_m за виключенням скінченної кількості.

Кінець області D – це клас еквівалентних ланцюгів розрізів області D. Нехай K – кінець області D в $\mathbb{R}^n$, тоді множина $I(K) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$ називається *тілом кінця* K. Скрізь далі, як зазвичай, $\Gamma(E, F, D)$ позначає сім'ю всіх таких кривих $\gamma\colon [a, b] \to D$, що $\gamma(a) \in E$ і $\gamma(b) \in F$, крім того, $M(\Gamma)$ позначає модуль сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$, а запис $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ означає, що функція ρ борелева, невід'ємна і має довжину, не меншу ніж одиницю, в метриці ρ (див. [5–7]). Слідуючи [5], будемо говорити, що кінець K є *простим кінцем*, якщо K містить ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$, такий, що $M(\Gamma(\sigma_m, \sigma_{m+1}, D)) < \infty$ при всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{m\to\infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0$ для деякого континууму C в D (див. малюнок 1). Далі використовуються наступні позначення: множина простих кінців, що відповідають області D, позначається символом E_D, а поповнення області D її простими кінцями позначається $\overline{D}_P$.

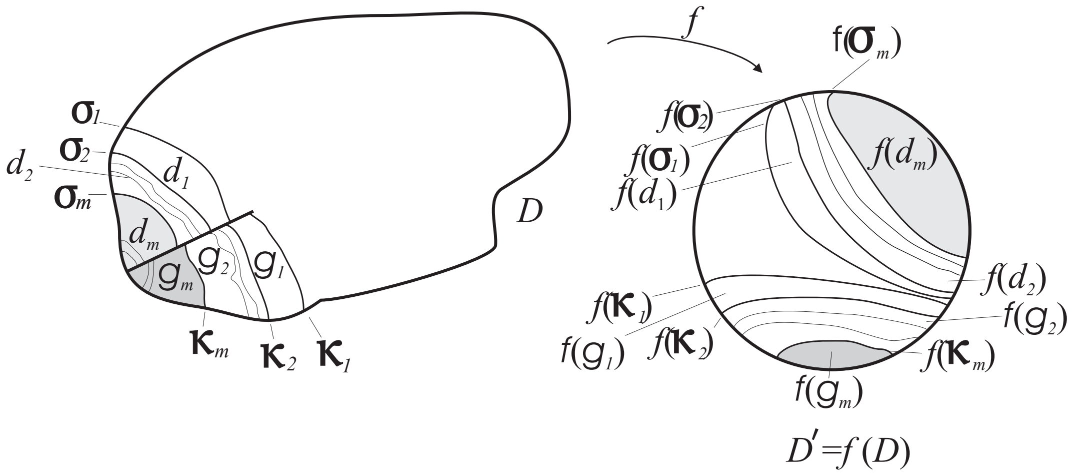
Будемо говорити, що межа області D в $\mathbb{R}^n$ є *локально квазіконформною*, якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U в $\mathbb{R}^n$, який може бути відображений квазіконформним відображенням φ на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною. Розглянемо також наступне означення (див. [2]). Для множин $E \subset \mathbb{R}^n$ і $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладемо

$$d(E) := \sup_{x,y\in E} |x-y|\,, \quad d(A,B) := \inf_{x\in A, y\in B} |x-y|\,.$$

Будемо називати ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ *регулярним*, якщо $\overline{\sigma_m}\cap\overline{\sigma_{m+1}}=\varnothing$ при кожному $m\in\mathbb{N}$ і, крім того, $d(\sigma_m)\to 0$ при $m\to\infty$. Якщо кінець K містить принаймні один регулярний ланцюг, то K будемо називати *регулярним*. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у просторі $\mathbb{R}^n$ кожний простий кінець регулярної області містить ланцюг розрізів з властивістю $d(\sigma_m)\to 0$ при $m\to\infty$, і навпаки, якщо у кінця є вказана властивість, то він – простий (див. [5, теорема 5.1]). Крім того, замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому, якщо $g:D_0\to D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, то для $x,y\in\overline{D}_P$ покладемо:

$$\rho(x,y):=|g^{-1}(x)-g^{-1}(y)|\,, \tag{1}$$

де для $x\in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на [5, теорема 4.1]. Зокрема, будемо говорити, що послідовність $x_m\in D$, $m=1,2,\ldots$, *збігається* до простого кінця $P\in E_D$ при $m\to\infty$, якщо для будь-якого натурального $k\in\mathbb{N}$ всі елементи послідовності x_m, крім скінченної кількості, належать області d_k (де d_k, $k=1,2,\ldots$ – послідовність вкладених областей з означення простого кінця P). Якщо f – гомеоморфізм області D на D', то не важко переконатись, що між кінцями областей D і $D'=f(D)$ є взаємно однозначна відповідність (див. малюнок 2).



Мал. 2. Відповідність простих кінців при відображенні

Відображення $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ будемо називати Q-*відображенням*, якщо f задовольняє співвідношення

$$M(f(\Gamma))\leqslant\int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\,dm(x) \tag{2}$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ в області D і кожної допустимої функції $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Нехай (X, d) і (X', d') – метричні простори з метриками d і d', відповідно. Сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \to X'$ називається *одностайно неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $f \in \mathfrak{F}$ і для всіх $x \in X$ таких, що $d(x, x_0) < \delta$. Кажуть, що $\mathfrak{F}$ *одностайно неперервна*, якщо $\mathfrak{F}$ є одностайно неперервною в кожній точці з $x_0 \in X$. Скрізь далі, якщо не сказано протилежне, d – одна з метрик в $\overline{D}_P$, згаданих вище, а d' – одна з метрик в $\overline{D'}_P$.

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континууму $A \subset D$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відображень $h : D' \to D$ таких, що $f = h^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою (2), при цьому, $d(f(A)) \geqslant \delta$. Виконується наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай області D і $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, регулярні і будь-яка компонента зв'язності $\partial D'$ є невиродженим континуумом. Якщо $Q \in L^1(D)$, то кожне відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується за неперервністю до відображення $\overline{h} : \overline{D'}_P \to \overline{D}_P$, $\overline{h}|_{D'} = h$, при цьому, $\overline{h}(\overline{D'}_P) = \overline{D}_P$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$, що складається із всіх продовжених відображень $\overline{h} : \overline{D'}_P \to \overline{D}_P$, є одностайно неперервною в $\overline{D'}_P$.*

2. Допоміжні твердження.

Нехай I – відкритий, замкнений, або напіввідкритий інтервал в $\mathbb{R}$. Як зазвичай, для кривої $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ покладемо:

$$|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a, b] : \gamma(t) = x\},$$

при цьому, $|\gamma|$ називається *носієм (образом)* γ. Будемо говорити, що крива γ лежить в області D, якщо $|\gamma| \subset D$, крім того, будемо говорити, що криві γ_1 і γ_2 не перетинаються, якщо не перетинаються їх носії.

За означенням, простому кінцю $P \in E_D$ відповідає послідовність вкладених одна в одну областей d_m, $m \geqslant 1$, при цьому, якщо $P \in D$, то будемо вважати, що P відповідає послідовність куль $B(P, r_m)$ з радіусами $r_m \to 0$, $m \to \infty$, $r_m > 0$, що лежать в області D разом із своїм замиканням. (Взагалі кажучи, така послідовність куль не відповідає деякому простому кінцю в тому сенсі слова, що ми використовуємо).

Наступне твердження було встановлене в статті [6, пропозиція 1].

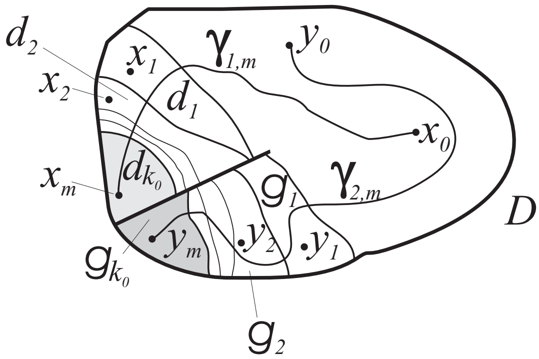
Пропозиція 2.1. Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, локально зв'язна на своїй межі. Тоді будь-які дві пари точок $a \in D, b \in \overline{D}$, і $c \in D, d \in \overline{D}$ можна з'єднати непересічними кривими $\gamma_1 : [0, 1] \to \overline{D}$ і $\gamma_2 : [0, 1] \to \overline{D}$, такими, що $\gamma_i(t) \in D$ при всіх $t \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = c$, $\gamma_2(1) = d$.

Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж точки такий, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для довільних континуумів $E, F \subset D$, що перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабко плоскою, якщо відповідна властивість виконується в кожній точці межі D. Доведення наступного твердження дослівно повторює доведення [7, теорема 17.10], і тому не наводиться.

Пропозиція 2.2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – область з локально квазіконформною межею, тоді межа цієї області є слабко плоскою. Крім того, окіл U в означенні локально квазіконформної межі може бути взятий як завгодно малим, при цьому, в означенні можна вважати $\varphi(x_0) = 0$.

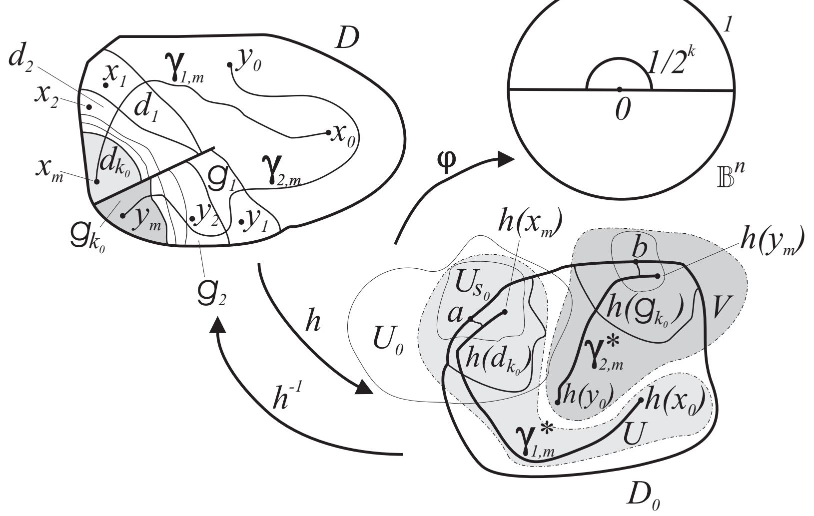
Наступне твердження вказує на можливість «зручного» з'єднання кривими точок регулярної області.

Лема 2.1. *Нехай область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, регулярна, і нехай послідовності $x_m, y_m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, збігаються при $m \to \infty$ до різних елементів $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$. Припустимо, що d_m, g_m, $m = 1, 2, \ldots$, – послідовності спадних областей, що відповідають P_1 і P_2, $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \in D \setminus (d_1 \cup g_1)$. Тоді існують k_0 і $M_0 \in \mathbb{N}$, такі що при всіх $m \geqslant M_0$ виконується наступна умова: знайдуться непересічні криві $\gamma_{i,m} : [0,1] \to D$, $i = 1, 2$, $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = x_m$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(1) = y_m$, такі що $|\gamma_{1,m}| \cap \overline{g_{k_0}} = \varnothing = |\gamma_{2,m}| \cap \overline{d_{k_0}}$ (див. малюнок 3).*



Мал. 3. До твердження леми 2.1

Доведення. Оскільки за умовою D – регулярна область, вона може бути відображена на деяку область D_0 з локально квазіконформною межею за допомогою (деякого) квазіконформного відображення $h : D \to D_0$. Зауважимо, що область D_0 локально зв'язна на своїй межі, що випливає безпосередньо з означення локальної квазіконформності. Крім того, якщо P_1 і P_2 – різні прості кінці в D, то $h(P_1)$ і $h(P_2)$ – прості кінці в D_0, при цьому, тілами цих кінців $I(h(P_1))$ і $I(h(P_2))$ є деякі різні точки a і b межі D_0 (див. [5, теорема 4.1]). Якщо ж P_1 (або P_2) – внутрішні точки D, то $h(P_1)$ (або $h(P_2)$) – внутрішні точки області D_0, які позначимо через a і b, відповідно. Оскільки за умовою $x_0, y_0 \in D \setminus (d_1 \cup g_1)$, то, зокрема, $P_1 \neq x_0 \neq P_2$, $P_1 \neq y_0 \neq P_2$. Звідси випливає, що $a, b, h(x_0), h(y_0)$ – чотири різні точки в $\overline{D_0}$, із яких не менше двох є внутрішніми відносно D_0. Див. ілюстрацію до проведених тут міркувань на малюнку 4. За твердженням 2.1 можна з'єднати точки a і $h(x_0)$ і точки b і $h(y_0)$ непересічними кривими $\alpha : [0,1] \to \overline{D_0}$ і $\beta : [0,1] \to \overline{D_0}$ так, що



Мал. 4. До доведення леми 2.1

$|\alpha|\cap|\beta|=\varnothing$, $\alpha(t),\beta(t)\in D$ при всіх $t\in(0,1)$, $\alpha(0)=h(x_0)$, $\alpha(1)=a$, $\beta(0)=h(y_0)$ і $\beta(1)=b$. Так як $\mathbb{R}^n$ є нормальним топологічним простором, образи $|\alpha|$ і $|\beta|$ кривих α і β мають непересічні відкриті околи

$$U\supset|\alpha|,\quad V\supset|\beta|\,. \tag{3}$$

Можливі два випадки: або $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0}, або точка в D_0. Нехай $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0}. Оскільки $I(h(P_1))=a$, то знайдеться номер $k_1\in\mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(d_k)}\subset U$ при $k\geqslant k_1$. Якщо ж $h(P_1)$ – точка області D, то також знайдеться номер $k_1\in\mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(d_k)}\subset U$ при всіх $k\geqslant k_1$, де $d_k:=B(P_1,r_k)$, $r_k\to0$, $k\to\infty$, $r_k>0$. В обох випадках $\overline{h(d_k)}\subset U$ при $k\geqslant k_1$. Аналогічно, знайдеться номер $k_2\in\mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(g_k)}\subset V$ при всіх $k\geqslant k_2$. Тоді при $k_0:=\max\{k_1,k_2\}$ маємо:

$$\overline{h(d_k)}\subset U\,,\quad \overline{h(g_k)}\subset V\,,\quad U\cap V=\varnothing\,,\quad k\geqslant k_0\,. \tag{4}$$

Оскільки послідовність x_m збігається до P_1, то послідовність $h(x_m)$ збігається до a, отже, знайдеться номер $m_1\in\mathbb{N}$ такий, що $h(x_m)\in h(d_{k_0})$, $m\geqslant m_1$. Аналогічно, оскільки послідовність y_m збігається до кінця P_2, то послідовність $h(y_m)$ збігається до b, отже, знайдеться номер $m_2\in\mathbb{N}$ такий, що $h(y_m)\in h(g_{k_0})$, $m\geqslant m_2$. Покладемо $M_0:=\max\{m_1,m_2\}$. Покажемо, що

$$|\alpha|\cap h(d_{k_0})\neq\varnothing,\qquad |\beta|\cap h(g_{k_0})\neq\varnothing\,. \tag{5}$$

Досить встановити перше із цих співвідношень, оскільки друге співвідношення можна довести аналогічно. Якщо $a=h(P_1)$ – внутрішня точка D_0, то дане включення очевидне. Нехай тепер $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0}. Оскільки область

D_0 має локально квазіконформну межу, знайдеться послідовність сфер $S(0,1/2^k)$, $k=0,1,2,\ldots$, спадна послідовність околів U_k точки a і деяке квазіконформне відображення $\varphi : U_0\rightarrow {\mathbb B}^n$, для яких $\varphi(U_k)=B(0, 1/2^k)$, $\varphi(\partial U_k\cap D_0)=S(0, 1/2^k)\cap {\mathbb B}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n): |x|<1, x_n>0\}$ (див. роздуми при доведенні [5, лема 3.5]). Зауважимо, що $U_k\cap D_0$ є областю, так як $U_k\cap D_0=\varphi^{-1}(B_+(0, 1/2^k))$, $B_+(0, 1/2^k)=\{x=(x_1,\ldots,x_n): |x|<1/2^k, x_n>0\}$, і φ – гомеоморфізм. Крім того, послідовність областей $U_k\cap D_0$ відповідає деякому простому кінцю, тілом якого є точка a, а відповідними розрізами є множини $\sigma_k:=\partial U_k\cap D_0$. За [5, теорема 4.1] точка $a\in D_0$ відповідає лише одному простому кінцю, отже, будь-яка область $h(d_m)$ містить всі області $U_k\cap D_0$, за виключенням скінченної кількості, і навпаки. Зокрема, знайдеться $s_0\in {\mathbb N}: U_k\cap D_0\subset h(d_{k_0})$ при всіх $k\geqslant s_0$. Оскільки $a\in |\alpha|$, знайдеться $t_0\in (0, 1)$ таке, що $p:=\alpha(t_0)\in U_{s_0}\cap D_0$. Але тоді також $p\in h(d_{k_0})$, так як $U_{s_0}\cap D_0\subset h(d_{k_0})$. Перше із співвідношень в (5) встановлене.

Отже, нехай $p:=\alpha(t_0)\in |\alpha|\cap h(d_{k_0})$. Зафіксуємо $m\geqslant M_0$ і з'єднаємо точку p з точкою $h(x_m)$ кривою $\alpha_m:[t_0, 1]\rightarrow h(d_{k_0})$ так, що $\alpha_m(t_0)=p$, $\alpha_m(1)=h(x_m)$, що можливо, тому що $h(d_{k_0})$ – область. Покладемо

$$\gamma^*_{1,m}(t)=\quad\left\{\begin{array}{rr} \alpha(t), & t\in [0, t_0],\\ \alpha_m(t), & t\in [t_0, 1]\end{array} \right.\quad. \tag{6}$$

Зауважимо, що крива $\gamma^*_{1,m}$ повністю лежить в U.

Аналогічно міркуючи, маємо точку $t_1\in (0, 1)$ і точку $q:=\beta(t_1)\in |\beta|\cap h(g_{k_0})$. Зафіксуємо $m\geqslant M_0$ і з'єднаємо точку q з точкою $h(y_m)$ кривою $\beta_m:[t_1, 1]\rightarrow h(g_{k_0})$ так, що $\beta_m(t_0)=q$, $\beta_m(1)=h(y_m)$, що можливо, тому що $h(g_{k_0})$ – область. Покладемо

$$\gamma^*_{2,m}(t)=\quad\left\{\begin{array}{rr} \beta(t), & t\in [0, t_1],\\ \beta_m(t), & t\in [t_1, 1]\end{array} \right.\quad. \tag{7}$$

Зауважимо, що крива $\gamma^*_{2,m}$ повністю лежить в V. Покладемо

$$\gamma_{1,m}:=h^{-1}(\gamma^*_{1,m})\,,\quad \gamma_{2,m}:=h^{-1}(\gamma^*_{2,m})\,. \tag{8}$$

Зауважимо, що криві $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ задовольняють всі умови, перераховані в висновку леми 2.1, $m\geqslant M_0$. Справді, ці криві за означенням з'єднують точки x_m і x_0, y_m і y_0, відповідно. Криві $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ не перетинаються, оскільки їх образи при відображенні h належать непересічним околам U і V, відповідно. Зауважимо також, що $|\gamma_{1,m}|\cap \overline{g_{k_0}}=\varnothing$ при $m\geqslant M_0$. Справді, якщо $x\in |\gamma_{1,m}|\cap g_{k_0}$, то $h(x)\in |\gamma^*_{1,m}|\cap h(g_{k_0})\subset U\cap h(g_{k_0})$, що неможливо з огляду на співвідношення (4). Якщо ж $x\in |\gamma_{1,m}|\cap \partial g_{k_0}$, то $h(x)\in \overline{h(g_{k_0})}\cap |\gamma^*_{1,m}|$, що також суперечить (4).

Аналогічно, $|\gamma_{2,m}|\cap g_{k_0}=\varnothing$ при $m\geqslant M_0$. Лема доведена. $\Box$

Розглянемо сім'ю кривих, що з'єднують образи кривих $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ з попередньої леми. Наступне твердження містить в собі верхню оцінку модуля перетвореної сім'ї кривих при відображенні f з нерівністю (2).

Лема 2.2. *Нехай $D\subset {\mathbb R}^n$, $n\geqslant 2$, – регулярна область в ${\mathbb R}^n$ і $f:D\rightarrow {\mathbb R}^n$ – неперервне відображення, що задовольняє оцінку (2) з деякою $Q\in L^1(D)$. Тоді в* *умовах і позначеннях леми 2.1 знайдеться стала* $0 < N < \infty$, *що не залежить від параметру* m *і відображення* f, *така що* $M(f(\Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D))) \leqslant N$ *при всіх* $m \geqslant M_0$, *де* M_0 *– номер із формулювання леми 2.1.*

Доведення. Нехай $l(\gamma)$ означає довжину кривої γ, а $|\gamma|$ – носій (образ) кривої γ. Покладемо $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. Покажемо, що знайдеться $L_0 > 0$ такий, що $l(\gamma) > L_0$ для всіх $\gamma \in \Gamma_m$ і всіх $m \geqslant M_0$. Зафіксуємо таке m і криву $\gamma \in \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. Нехай $\gamma : [0, 1] \to D$, $\gamma(0) \in |\gamma_{1,m}|$, $\gamma(1) \in |\gamma_{2,m}|$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (0, 1)$. Можливі дві ситуації: **1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$; **2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, див. співвідношення (6) і (8).

Розглянемо ситуацію **1).** Нехай $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$. Можливі два підвипадки: **1.1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$; **1.2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$.

Нехай виконується **1.1)**, тобто, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$. Тоді, очевидно, що

$$l(\gamma) \geqslant d(h^{-1}(|\alpha|), h^{-1}(|\beta|)) > 0\,, \tag{9}$$

оскільки h – гомеоморфізм, криві α і β не перетинаються за побудовою, а крива γ з'єднує $|\alpha|$ і $|\beta|$. Нехай тепер виконується **1.2)**, тобто, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$. Тоді $|\gamma| \cap |g_{k_0}| \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap (D \setminus |g_{k_0}|)$, оскільки $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|) \subset D \setminus g_{k_0}$ і $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|) \subset h^{-1}(g_{k_0})$. В такому випадку, з огляду на [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $|\gamma| \cap \partial g_{k_0} \neq \varnothing$. Зауважимо, що $\partial g_{k_0} \cap h^{-1}(|\alpha|) = \varnothing$ з огляду на (3)–(4). Таким чином, оскільки γ з'єднує точки множин ∂g_{k_0} і $h^{-1}(|\alpha|)$, то її довжина не менша ніж відстань між ними, тобто,

$$l(\gamma) \geqslant d(\partial g_{k_0}, h^{-1}(|\alpha|)) > 0\,. \tag{10}$$

Розглянемо ситуацію **2).** Нехай $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$. Як вище, можливі два підвипадки: **2.1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$; **2.2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$.

Випадок **2.1)** зводиться до випадку **1.2)** заміною $\alpha_m \mapsto \beta_m$, $\alpha \mapsto \beta$ і перепараметризацією кривої γ у вигляді $\overline{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$. У цьому випадку ми маємо:

$$l(\gamma) \geqslant d(\partial d_{k_0}, h^{-1}(|\beta|)) > 0\,. \tag{11}$$

Нехай виконується **2.2)**, тоді, оскільки $|\beta_m| \subset h(g_{k_0})$ і $|\alpha_m| \subset h(d_{k_0})$ за побудовою, то $|\gamma| \cap \partial g_{k_0} \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap \partial d_{k_0}$ з огляду на [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. За (3)–(4) маємо: $d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D) > 0$. Таким чином,

$$l(\gamma) \geqslant d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D) > 0\,. \tag{12}$$

Виходячи з розглянутих ситуацій **1)** і **2)**, на основі (9), (10), (11) і (12), маємо:

$$l(\gamma) \geqslant S_0\,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} S_0 := \min\{&d(h^{-1}(|\alpha|), h^{-1}(|\beta|)), d(\partial g_{k_0}, h^{-1}(|\alpha|)),\\ &d(\partial d_{k_0}, h^{-1}(|\beta|)), d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D)\}\,. \end{aligned}$$

З (13) випливає, що функція $\rho(x)=1/S_0$ при $x\in D$ і $\rho(x)=0$ при $x\notin D$ допустима для Γ_m при $m\geqslant M_0$. Отже, за означенням відображень f в (2), маємо:

$$M(f(\Gamma_m))\leqslant \frac{1}{S_0^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x)=N=N(S_0,Q,D)<\infty\,,$$

оскільки за умовою $Q\in L^1(D)$. Лема доведена. $\Box$

Наступне твердження вказує на те, що для деякого широкого класу відображень, що фіксують по діаметру деякий невироджений континуум, образ цього континууму при цих відображеннях не може наближатись до межі відповідної області.

Лема 2.3. *Припустимо, що область D регулярна, $\overline{D'}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, D' має локально квазіконформну межу і $Q\in L^1(D)$. Якщо $f_m:D\rightarrow D'$ – послідовність Q-гомеоморфізмів області D на область D', що задовольняють для деякого (фіксованого) континууму $A\subset D$ умову $d(f_m(A))\geqslant\delta>0$ при всіх $m=1,2,\ldots$, то знайдеться $\delta_1>0$ таке, що $d(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0$ для всіх $m\in\mathbb{N}$.*

Доведення. Підемо від супротивного, тобто, припустимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ існує $m=m_k:d(f_{m_k}(A),\partial D')<1/k$, де m_k, $k=1,2,\ldots$ – деяка зростаюча послідовність номерів. За умовою $\overline{D'}$ – компакт, тому і $\partial D'$ також компакт як замкнута підмножина компакту $\overline{D'}$. Крім того, $f_{m_k}(A)$ компакт як неперервний образ компакту A. Тоді знайдуться $x_k\in f_{m_k}(A)$ і $y_k\in\partial D'$ такі, що $d(f_{m_k}(A),\partial D')=|x_k-y_k|<1/k$. Так як $\partial D'$ – компакт, можна вважати, що $y_k\rightarrow y_0\in\partial D'$, $k\rightarrow\infty$; тоді також

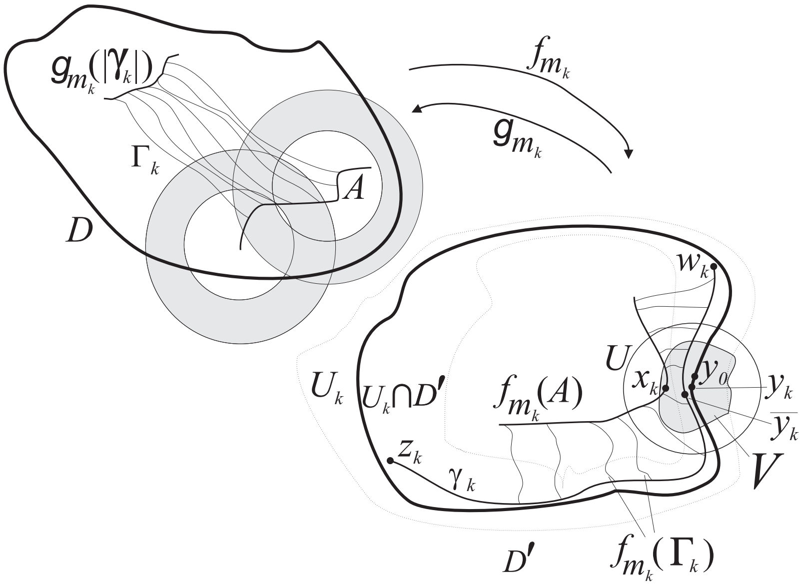
$$x_k\rightarrow y_0\in\partial D',\quad k\rightarrow\infty\,. \tag{14}$$

Нехай K_0 – зв'язна компонента $\partial D'$, що містить точку y_0 (див. малюнок 5).) Оскільки D' має локально квазіконформну межу, то K_0 – невироджений континуум в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо що, при кожному $k\in\mathbb{N}$ відображення $g_{m_k}:=f_{m_k}^{-1}$ продовжується до неперервного відображення $g_{m_k}:\overline{D'}_P\rightarrow\overline{D}_P$, де $\overline{D'}_P$ і $\overline{D}_P$ – відповідні замикання у просторі простих кінців (див. [1, теорема 6.1] і [3, теорема 2]). З огляду на [5, теорема 4.1] прості кінці області D' можна ототожнювати з точками D', при цьому, для двох простих кінців $P_1,P_2\in E_{D'}$ за означенням маємо: $\rho_*(P_1,P_2):=|p_1-p_2|$, де $p_i:=I(P_i)$, $i=1,2$. Таким чином, далі ми можемо вважати, що $\overline{D'}_P=\overline{D'}$. Зауважимо, що g_{m_k} рівномірно неперервне на $\overline{D'}$, як відображення простору $\overline{D'}$ на $\overline{D}_P$, неперервне на компакті $\overline{D'}$. Нехай ρ – одна з метрик в E_D, визначена в (1). Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta_k=\delta_k(\varepsilon)<1/k$ таке, що

$$\rho(g_{m_k}(x),g_{m_k}(x_0))<\varepsilon\quad\forall\, x,x_0\in\overline{D'},\quad |x-x_0|<\delta_k\,,\quad \delta_k<1/k\,, \tag{15}$$

Нехай далі $\varepsilon>0$ – довільне число з умовою

$$\varepsilon<(1/2)\cdot d(\partial D_0,g^{-1}(A))\,, \tag{16}$$



Мал. 5. До доведення леми 2.3

де A – континуум з умов леми, а $g : D_0 \to D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, що відповідає означенню метрики ρ в (1). При кожному фіксованому $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B(x_0, \delta_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Зауважимо, що B_k – відкрита множина, що містить K_0, іншими словами, B_k – деякий окіл континууму K_0. З огляду на [9, лема 2.2] існує окіл $U_k \subset B_k$ континууму K_0, такий, що $U_k \cap D'$ зв'язний. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що U_k – відкрита множина, тоді $U_k \cap D'$ також лінійно зв'язна (див. [4, пропозиція 13.1]). Нехай $d(K_0) = m_0$, тоді знайдуться $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $d(K_0) = |z_0 - w_0|$. Отже, можна вибрати послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ і $w_k \in U_k \cap D'$ так, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можна вважати, що

$$|z_k - w_k| > m_0/2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{17}$$

З'єднаємо послідовно точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k кривою γ_k в $U_k \cap D'$ (це можливо, оскільки $U_k \cap D'$ лінійно зв'язна). Нехай $|\gamma_k|$ – як зазвичай, носій (образ) кривої γ_k в D'. Тоді $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компакт в D. Нехай $x \in |\gamma_k|$, тоді знайдеться $x_0 \in K_0 : x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо $\omega \in A \subset D$. З (15) і (16), з огляду на нерівність трикутника, маємо:

$$\rho(g_{m_k}(x), \omega) \geqslant \rho(\omega, g_{m_k}(x_0)) - \rho(g_{m_k}(x_0), g_{m_k}(x)) \geqslant$$

$$\geqslant d(\partial D_0, g^{-1}(A)) - (1/2) \cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)) = (1/2) \cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)) > \varepsilon\,. \tag{18}$$

Переходячи до inf по всіх $x\in|\gamma_k|$ і $\omega\in A$, з (18) отримуємо, що

$$\rho(g_{m_k}(|\gamma_k|),A)\geqslant\varepsilon\,,k=1,2,\ldots\,, \tag{19}$$

де, як зазвичай, $\rho(A,B):=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\rho(x,y)$ – відстань між множинами $A,B\subset\mathbb{R}^n$ в метриці ρ. Покажемо тепер, що знайдеться $\varepsilon_1>0$ таке, що

$$d(g_{m_k}(|\gamma_k|),A)>\varepsilon_1,\quad\forall\ k=1,2,\ldots\,, \tag{20}$$

де $d(A,B)$, як зазвичай, позначає евклідову відстань між множинами $A,B\subset\mathbb{R}^n$. Справді, нехай (20) порушується, тоді для числа $\varepsilon_l=1/l$, $l=1,2,\ldots$ знайдуться $\xi_l\in|\gamma_{k_l}|$ і $\zeta_l\in A$ такі, що

$$|g_{m_{k_l}}(\xi_l)-\zeta_l|<1/l\,,\quad l=1,2,\ldots\,. \tag{21}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність номерів k_l, $l=1,2,\ldots$, зростаюча. Оскільки A – компакт, то можна вважати, що послідовність ζ_l збігається до $\zeta_0\in A$ при $l\to\infty$. За нерівністю трикутника і з (21) випливає, що

$$|g_{m_{k_l}}(\xi_l)-\zeta_0|\to 0\,,\quad l\to\infty\,. \tag{22}$$

З іншого боку, нагадаємо, що $\rho(g_{m_k}(x),\omega)=|g^{-1}(g_{m_k}(x))-g^{-1}(\omega)|$, де $g:D_0\to D$ – деяке квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на D (див. (1)). Зокрема, g^{-1} – неперервне відображення в D, тому за нерівністю трикутника і з (22) маємо:

$$|g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l))-g^{-1}(\zeta_l)|\leqslant$$

$$\leqslant|g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l))-g^{-1}(\zeta_0)|+|g^{-1}(\zeta_0)-g^{-1}(\zeta_l)|\to 0,\quad l\to\infty\,. \tag{23}$$

Однак, за означенням ρ і з (23) випливає, що

$$\rho(g_{m_{k_l}}(|\gamma_{k_l}|),A)\leqslant\rho(g_{m_{k_l}}(\xi_l),\zeta_l)=|g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l))-g^{-1}(\zeta_l)|\to 0,\quad l\to\infty\,,$$

що суперечить (19). Отримане протиріччя вказує на вірність (20).

У такому випадку, довжина довільної кривої, що з'єднує компакти $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ і A в D, не менша ніж ε_1. Покладемо $\Gamma_k:=\Gamma(g_{m_k}(|\gamma_k|),A,D)$, тоді функція $\rho(x)=1/l$ при $x\in D$, $\rho(x)=0$ при $x\notin D$, допустима для Γ_k. За означенням відображень f_{m_k} в (2) маємо:

$$M(f_{m_k}(\Gamma_k))\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x)=c=c(\varepsilon_1,Q)<\infty\,, \tag{24}$$

оскільки за умовою $Q\in L^1(D)$.

Покажемо тепер, що ми отримали протиріччя з (24) з огляду на локальну квазіконформність межі $\partial D'$. Перш за все, зауважимо, що $\partial D'$ – слабко плоска за твердженням 2.2. Виберемо в точці $y_0 \in \partial D'$ кулю $U := B(y_0, r_0)$, $0 < r_0 < \min\{\delta/4, m_0/4\}$, де δ – число з умов леми, а $d(K_0) = m_0$. Зауважимо, що $|\gamma_k| \cap U \neq \varnothing \neq |\gamma_k| \cap (D' \setminus U)$ при досить великих $k \in \mathbb{N}$, оскільки $d(|\gamma_k|) \geqslant m_0/2 > m_0/4$ і $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $\overline{y_k} \to y_0$ при $k \to \infty$. Міркуючи аналогічно, ми отримаємо, що $f_{m_k}(A) \cap U \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus U)$. Так як $|\gamma_k|$ і $f_{m_k}(A)$ – континууми, то

$$f_{m_k}(A) \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial U \neq \varnothing\,, \tag{25}$$

див. [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. Для фіксованого $P > 0$, нехай далі $V \subset U$ – окіл точки y_0, що відповідає означенню слабко плоскої межі, тобто такий, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ з умовою $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P\,. \tag{26}$$

Зауважимо, що при досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{27}$$

Справді, $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $x_k \in f_{m_k}(A)$, де $x_k, \overline{y_k} \to y_0 \in V$ при $k \to \infty$, тому $|\gamma_k| \cap V \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap V$ при великих $k \in \mathbb{N}$. Крім того, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < m_0/2$ і, оскільки $d(|\gamma_k|) > m_0/2$ з огляду на (17), то $|\gamma_k| \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тоді $|\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing$ (див. [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]). Аналогічно, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < \delta/2$ і, оскільки $d(f_{m_k}(A)) > \delta$ за умовою леми, то $f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Оскільки, згідно з встановленим вище $f_{m_k}(A) \cap V \neq \varnothing$, то за [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing$. Отже, співвідношення в (27) встановлені.

Таким чином, згідно з (26) ми маємо, з огляду на (25) і (27), що

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) > P\,. \tag{28}$$

Зауважимо, що $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$, так що нерівність (28) може бути переписана у вигляді

$$M(f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D))) = M(f_{m_k}(\Gamma_k)) > P\,,$$

що суперечить нерівності (24). Отримане протиріччя вказує на хибність початкового припущення $d(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Лема доведена. $\Box$

3. Доведення теореми 1.1.

Неперервне продовження відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на межу області D' встановлене в [1, теорема 6.1] при $n = 2$ і [3, теорема 2] при $n \geqslant 3$. Одностайна неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ у внутрішніх точках області D' доведена в [10, теорема 1.1]. Рівність $\overline{h}(\overline{D'}_P) = \overline{D}_P$ для $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ встановлюється так, як і при доведенні [1, теорема 6.1], тому докладні міркування, пов'язані з цим фактом, не наводяться.

Покажемо одностайну неперервність $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на $E_{D'}$. Можна вважати, що D' має локально квазіконформну межу. З огляду на [5, теорема 4.1] ми можемо вважати, що $\overline{D'} = \overline{D'}_P$, зокрема, можна вважати, що $E_{D'} = \partial D'$.

Здійснимо доведення від супротивного. Нехай, знайдеться точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$ і послідовності $z_m \in \overline{D'}$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$ і $\overline{h}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ такі, що

$$\rho(\overline{h}_m(z_m), \overline{h}_m(z_0)) \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

де ρ – одна з метрик в $\overline{D}_P$, визначена формулою (1). Так як $\overline{h}_m$ за неперервністю продовжується на межу D', можна вважати, що $z_m \in D$ і, крім того, знайдеться ще одна послідовність $z'_m \in \overline{D'}$, $z'_m \to z_0$ при $m \to \infty$, така, що $\rho(h_m(z_m), \overline{h}_m(z_0)) \to 0$ при $m \to \infty$, де $h_m = \overline{h}_m|_{D'}$. Тоді з (29) випливає, що

$$\rho(h_m(z_m), h_m(z'_m)) \geqslant \varepsilon_0/2, \quad m \geqslant m_0 \,. \tag{30}$$

Так як область D регулярна, то простір $\overline{D}_P$ є компактом. Отже, ми можемо вважати, що послідовності $h_m(z_m)$ і $\overline{h}_m(z_0)$ є збіжними при $m \to \infty$ до деяких елементів $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$, $P_1 \neq P_2$. Нехай d_m, g_m – послідовності спадних областей, що відповідають простим кінцям P_1, P_2, відповідно. Виберемо $x_0, y_0 \in A$ так, щоб $x_0 \neq y_0$ і $P_1 \neq x_0 \neq P_2$, $P_1 \neq y_0 \neq P_2$, де континуум $A \subset D$ – з умов теореми 1.1. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \notin d_1 \cup g_1$. За лемою 2.1 існують k_0 і $M_0 \in \mathbb{N}$, такі що при всіх $m \geqslant M_0$ виконується наступна умова: знайдуться непересічні криві $\gamma_{i,m}(t) : [0,1] \to D$, $i = 1, 2$, $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = h_m(z_m)$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(0) = h_m(z'_m)$, такі що $|\gamma_{1,m}| \cap g_{k_0} = \varnothing = |\gamma_{2,m}| \cap d_{k_0}$. Крім того, за лемою 2.2 знайдеться стала $0 < N < \infty$, що не залежить від параметру m, така що

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant N \,, m \geqslant M_0 \,, \tag{31}$$

де $f_m := h_m^{-1}$, $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. З іншого боку, за лемою 2.3 знайдеться число $\delta_1 > 0$ таке, що $d(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Звідси отримаємо, що

$$d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) \geqslant |z_m - f_m(x_0)| \geqslant (1/2) \cdot d(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2 \,,$$

$$d(f_m(|\gamma_{2,m}|)) \geqslant |z'_m - f_m(y_0)| \geqslant (1/2) \cdot d(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2 \tag{32}$$

при великих $m = 1, 2, \ldots$. Виберемо в точці $z_0 \in \partial D'$ кулю $U := B(z_0, r_0)$, де $r_0 > 0$ і $r_0 < \delta_1/4$, де δ_1 – число зі співвідношень в (32). Зауважимо, що $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap U \neq \varnothing \neq f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap (D' \setminus U)$ при досить великих $m \in \mathbb{N}$, оскільки $d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) \geqslant \delta_1/2$ і $z_m \in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$. Аналогічно міркуючи, $f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap U \neq \varnothing \neq f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap (D' \setminus U)$. Так як $f_m(|\gamma_{1,m}|)$ и $f_m(|\gamma_{2,m}|)$ – континууми, то

$$f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial U \neq \varnothing, \quad f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap \partial U \neq \varnothing \,, \tag{33}$$

див. [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. Для фіксованого $P > 0$, нехай далі $V \subset U$ – окіл точки z_0, що відповідає означенню слабко плоскої межі, тобто такий, що для будьяких континуумів $E, F \subset D'$ з умовою $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P \,. \tag{34}$$

Зауважимо, що при досить великих $m \in \mathbb{N}$

$$f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \neq \varnothing, \quad f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{35}$$

Справді, $z_m \in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z'_m \in f_m(|\gamma_{2,m}|)$, де $z_m, z'_m \to z_0 \in V$ при $m \to \infty$, тому $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap V \neq \varnothing \neq f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap V$ при великих $m \in \mathbb{N}$. Крім того, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) > \delta_1/2$ з огляду на (32), то $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тоді $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \neq \varnothing$ (див. [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]). Аналогічно, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $d(f_m(|\gamma_{2,m}|)) > \delta_1/2$ з огляду на (32), то $f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тоді за [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (35) доведені.

Згідно з (34) і враховуючи (33) і (35), ми отримаємо, що

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(|\gamma_{1,m}|), f_m(|\gamma_{2,m}|), D')) > P\,,$$

що суперечить нерівності (31). Отримане протиріччя вказує на хибність початкового припущення, зробленого в (29). Теорема доведена. □

Зауваження 3.1. Зауважимо, що означення простого кінця по Няккі (див. розділ 4 в [5] дещо відрізняється від означення, запропонованого вище. Проте, для областей з локально квазіконформними межами (а, отже, і регулярних областей) ці класи співпадають, див., напр., теорему 4.1 в [5] і теорему 2.1 в [11]).

Цитована література

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 27–66.
2. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории простых концов для пространственных отображений // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 4. – С. 467–479.
3. *Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* О равностепенной непрерывности одного семейства обратных отображений в терминах простых концов // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 9. – С. 1264–1273.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
5. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – 35. – P. 13–40.
6. *Севостьянов Е.А., Скворцов С.А.* О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 7. – С. 952–967.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
8. *Куратовский К.* Топология, т. 2. – Мир, Москва. – 1969.
9. *Herron J. and Koskela P.* Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains // Compl. Var. Theor. Appl. – 1990. – 15. – P. 167–179.
10. *Севостьянов Е.А., Скворцов С.А.* О локальном поведении отображений метрических пространств // Укр. мат. вісник. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 215–227.
11. *Ильютко Д.П., Севостьянов Е.А.* О простых концах на римановых многообразиях // Укр. мат. вісник. – 2018. – Т. 15, № 3. – С. 358–392.

References

1. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *J. Math. Sci. (N.Y.)., 210*(1), 22-51.
2. Kovtonyuk, D.A., Ryazanov, V.I. (2015). On the theory of prime ends for space mappings. *Ukr. Math. J., 67*(4), 528-541.
3. Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2018). On equicontinuity of one class of inverse mappings in terms of prime ends. *Ukr. Math. J., 70*(9), 1264-1273.
4. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Monographs in Mathematics. New York, Springer.
5. Näkki, R. (1979). Prime ends and quasiconformal mappings. *J. Anal. Math., 35*, 13-40.
6. Sevost'yanov, E. A., Skvortsov, S. A. (2018). On the convergence of mappings in metric spaces with direct and inverse modulus conditions. *Ukr. Math. J., 70*(7), 1097-1114.
7. Väisälä, J. (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer–Verlag.
8. Kuratovskij, K. (1969). *Topologiya, t. 2.* Mir, Moskva (in Russian).
9. Herron, J., Koskela P. (1990). Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains. *Compl. Var. Theor. Appl., 15*, 167–179.
10. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2019). On the local behavior of mappings of metric spaces. *J. Math. Sci. (N.Y.)., 244*(1), 44-55.
11. Il'yutko, D.P., Sevost'yanov, E.A. (2018). On prime ends on Riemannian manifolds. *J. Math. Sci. (N.Y.)., 241*(1), 47-63.

E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov, N.S. Ilkevych

On behavior of inverse homeomorphisms in terms of prime ends.

As is known, even conformal mappings of plane simply connected domains do not, generally speaking, have continuous boundary extension in the Euclidean sense. One of the minimum requirements necessary for such an extension is the local connectedness of the definition domain of the corresponding map on its boundary. Of course, quite a lot of simply connected domains do not have this property. For example, the unit disk with a cut along the positive part of the real axis is not locally connected at the boundary. In the same way, the mapped domain must also satisfy certain conditions necessary for the continuous extension of a mapping. The situation changes significantly if we are not talking about the Euclidean boundary behavior of mappings, but about extension in terms of the so-called prime ends. In this case, the domain of definition of mappings should be only regular, that is, this domain should be the image of a domain with a locally quasiconformal boundary under some quasiconformal mapping. A similar requirement also applies to the mapped domain. In this article, we study the equicontinuous families of maps at inner and boundary points in the case where the prime ends of the domain serve as boundary points. Relatively speaking, the paper consists of two parts, one of which contains a number of auxiliary statements, and the second, the final part of the work, contains the formulation of the main theorem and its proof. We consider a class of homeomorphisms of Euclidean space, inverse of which distort moduli of families of paths by the Poletsky type inequality. Note that these classes include most well-known mappings, such as conformal mappings, quasiconformal mappings, mappings with finite length and area distortion, and so on. It should be noted that under conformal mappings, distortion of the modulus of families of paths does not occur, therefore, when passing to inverse mappings, we remain in the class under study. A similar situation is in the case of quasiconformal mappings, since, as is known, the inverse mapping to a quasiconformal is also quasiconformal. In more general situations, the studied configurations can turn out to be much more complicated, in particular, the transition to inverse mappings can significantly change their properties (this is confirmed by specific examples of mappings, which are rather easy to construct in this case). This article is actually devoted to the study of this particular case, that is, when we are dealing with a certain family of homeomorphisms with an unbounded characteristic, in addition, mappings inverse to them are studied. In more detail, we consider mappings whose inverse satisfy the upper distortion estimate of the modulus of families of paths with integrable majorant. In the article, we proved that the families of the indicated mappings are equicontinuous both at the inner and boundary points of the domain, provided that the majorant responsible for the distortion of the modulus of the families of paths is integrable, besides that, the definition and mapped domains are regular, and the boundary points are prime ends of the definition domain. The results obtained in the paper are applicable to well-known classes of mappings, such as mappings with bounded and finite distortion, as well as to the Sobolev and Orlicz–Sobolev classes.

Keywords: *quasiconformal mappings, moduli of families of paths.*

Житомирський державний університет імені Івана Франка
Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
esevostyanov2009@gmail.com, serezha.skv@gmail.com, ilkevych@list.ru

Отримано 22.10.19